



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica*

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #07

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

29/08/2023



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda

1. Introdução
2. Tensões em vasos de pressão esféricos (de parede fina) [1]
3. Tensões em vasos de pressão cilíndricos (de parede fina) [1]
4. Tensões em vasos de pressão esféricos (de parede espessa) [2,5]
5. Tensões em vasos de pressão cilíndricos (de parede espessa) [2,5]
6. Exemplo



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

1. Introdução

Referência: Gere & Goodno [1], cap.8, itens 8.1 a 8.3.

Os vasos de pressão formam uma classe de estruturas de grande importância, notadamente na Engenharia Mecânica. Exemplos habituais incluem tanques, tubos, cabines pressurizadas em aeronaves e veículos espaciais.

Na aula de hoje estudaremos os vasos de pressão esféricos e cilíndricos de parede fina. O termo “paredes finas” não é preciso, mas, como regra geral, podemos considerar que o vaso possui parede fina quando $t/R < 0,1$.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

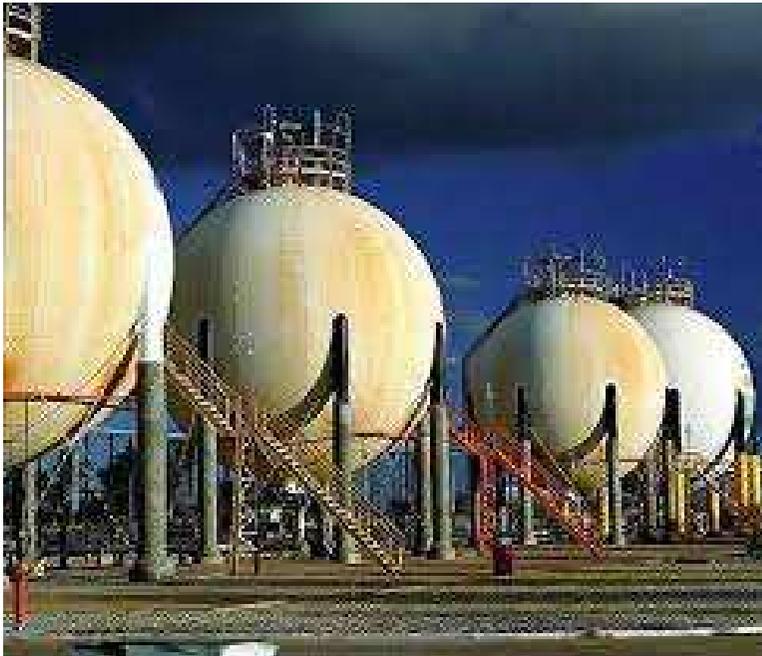


Fig.1: Vasos de pressão esféricos



Fig.2: Fabricação de tampos
(hemisféricos, torisféricos e elípticos)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Fig.3: Tampo hemisférico de parede espessa [3].



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Fig.4: Junção entre tampo hemisférico e vaso cilíndrico.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Fig.5: Vaso de pressão horizontal.



Fig.6: Vasos de pressão verticais.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Fig.7: Tampo torisférico.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Fig.8: Detalhe de uma seção cônica (tronco de cone) unindo duas seções cilíndricas de um vaso de pressão.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Fig.9: Tubulações submarinas estão sujeitas tanto a pressões internas quanto externas.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Fig.10: A fuselagem de uma aeronave também deve suportar os esforços decorrentes do diferencial de pressão.



2. Tensões em vasos de pressão esféricos (de parede fina)

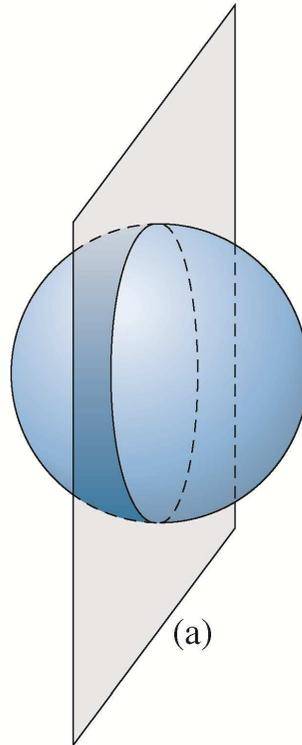
Hipóteses:

- Vaso com espessura constante e sem imperfeições;
- Pressões interna e externa estão distribuídas uniformemente nas superfícies interna e externa do vaso;
- Problemas de instabilidade não serão considerados na análise;
- Vaso é de parede fina ($t/R < 0,1$);
- Tensões são uniformemente distribuídas ao longo da espessura.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

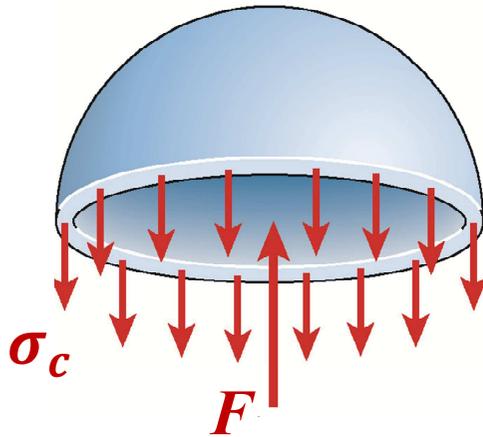
Em virtude das hipóteses estabelecidas, conclui-se que as tensões circunferenciais (*hoop stresses*) são as mesmas em qualquer plano diametral que divide o vaso em duas metades iguais (estrutura simétrica submetida a carregamentos simétricos).





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Do equilíbrio de forças na direção ortogonal ao plano de corte, teremos:



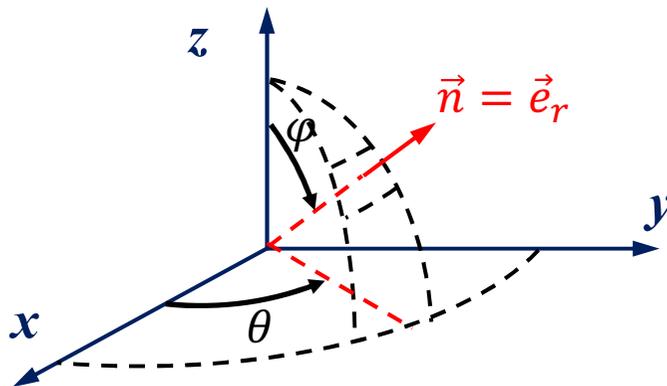
$$\sigma_c(2\pi R_m t) = F = \iint_{S_i} p_i(\vec{n} \cdot \vec{e}_z) dS_i - \iint_{S_o} p_o(\vec{n} \cdot \vec{e}_z) dS_o$$

$$\vec{n} = \vec{e}_r = (\text{sen}\varphi \cos\theta)\vec{e}_x + (\text{sen}\varphi \text{sen}\theta)\vec{e}_y + (\text{cos}\varphi)\vec{e}_z$$

$$\vec{n} \cdot \vec{e}_z = \text{cos}\varphi$$

$$dS_i = (R_i d\varphi)(R_i \text{sen}\varphi d\theta) = R_i^2 \text{sen}\varphi d\theta d\varphi$$

$$dS_o = (R_o d\varphi)(R_o \text{sen}\varphi d\theta) = R_o^2 \text{sen}\varphi d\theta d\varphi$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\sigma_c(2\pi R_m t) = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{p_i R_i^2 \text{sen}(2\varphi)}{2} d\theta d\varphi - \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{p_o R_o^2 \text{sen}(2\varphi)}{2} d\theta d\varphi$$

$$\sigma_c(2\pi R_m t) = p_i \pi R_i^2 - p_o \pi R_o^2 \iff \sigma_c = \frac{p_i R_i^2 - p_o R_o^2}{2R_m t}$$

Utilizando as relações: $R_i = R_m - \frac{t}{2}$ $R_o = R_m + \frac{t}{2}$

obtemos:
$$\sigma_c = \frac{(p_i - p_o)R_m}{2t} + \frac{(p_i - p_o)t}{8R_m} - \frac{(p_i + p_o)}{2}$$

$$\sigma_c = \frac{(p_i - p_o)R_m}{2t} \left[1 + \left(\frac{t}{2R_m} \right)^2 \right] - \frac{(p_i + p_o)}{2}$$

desprezível



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\sigma_c = \frac{(p_i - p_o)R_m}{2t} - \frac{(p_i + p_o)}{2}$$

Deve-se observar que, em alguns casos, a 2ª parcela da expressão dada acima pode ser tão importante quanto a 1ª parcela, não devendo ser desprezada. Se este não for o caso, podemos desprezar o efeito da 2ª parcela em relação ao da 1ª parcela e simplificar a expressão para:

$$\sigma_c \cong \frac{(p_i - p_o)R_m}{2t} = \frac{pR_m}{2t}$$

Onde $p = p_i - p_o$ representa o diferencial de pressão entre a pressão interna e a pressão externa (absolutas) que agem sobre o vaso (ou seja, é a pressão relativa ou manométrica).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Como não há tensões de cisalhamento nos planos diametrais, concluímos que as tensões principais e as máximas tensões de cisalhamento para um vaso de pressão esférico são dadas por:

- Para os pontos da superfície interna do vaso:

$$\sigma' = \sigma'' = \frac{(p_i - p_o)R_m}{2t} - \frac{(p_i + p_o)}{2} \quad \sigma''' = -p_i$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{|p_i - p_o|}{4} \left(\frac{R_m}{t} + 1 \right)$$

- Para os pontos da superfície externa do vaso:

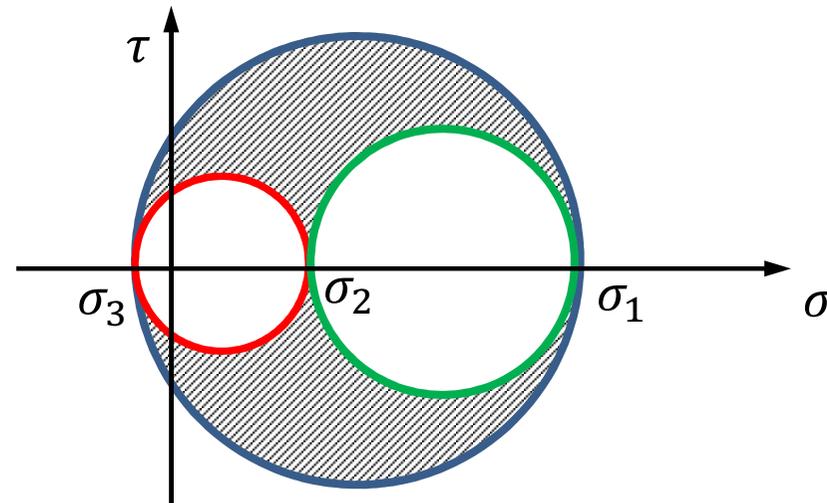
$$\sigma' = \sigma'' = \frac{(p_i - p_o)R_m}{2t} - \frac{(p_i + p_o)}{2} \quad \sigma''' = -p_o$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{|p_i - p_o|}{4} \left(\frac{R_m}{t} - 1 \right)$$

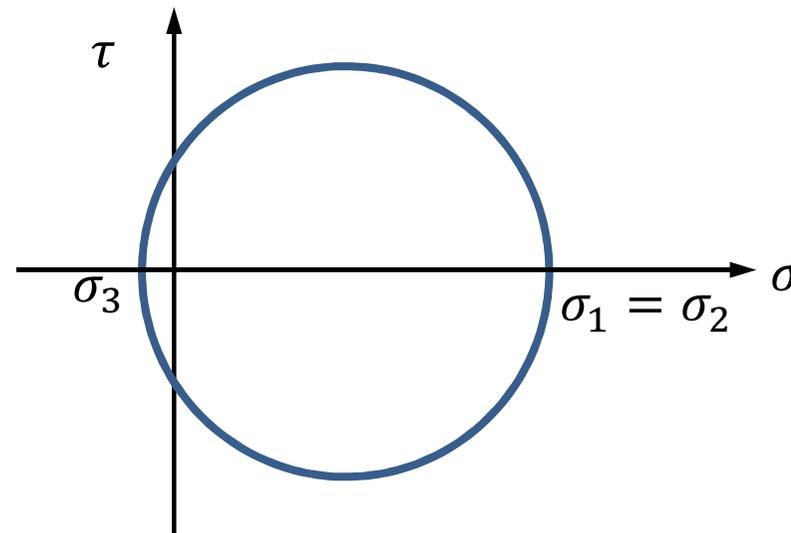


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Círculos de Mohr das tensões para o caso em que as três tensões principais são distintas:



Círculos de Mohr das tensões para o caso em que duas tensões principais são iguais, mas distintas da 3ª tensão principal (como no caso dos vasos esféricos de pressão). Note que a circunferência verde desaparece e a vermelha coincide com a azul.





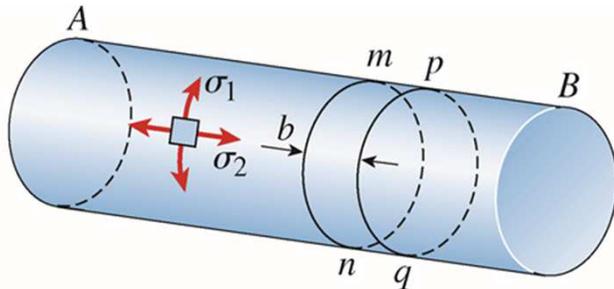
3. Tensões em vasos de pressão cilíndricos (de parede fina)

Hipóteses:

- Vaso com espessura constante e sem imperfeições;
- Admite-se que o vaso esteja fechado nas extremidades (de modo a gerar tensões longitudinais, além das circunferenciais);
- Pressões interna e externa estão distribuídas uniformemente nas superfícies interna e externa do vaso;
- Problemas de instabilidade não serão considerados na análise;
- Vaso é de parede fina ($t/R < 0,1$);
- Tensões são uniformemente distribuídas ao longo da espessura.



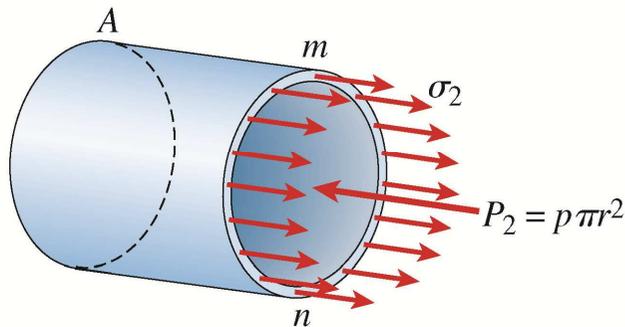
3.1. Tensões na direção longitudinal (σ_L)



O cálculo é análogo ao feito para os vasos esféricos (e independe do formato do tampo):

$$\sigma_L = \frac{(p_i - p_o)R_m}{2t} - \frac{(p_i + p_o)}{2}$$

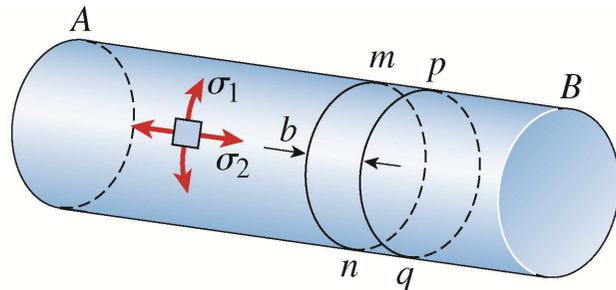
$$\sigma_L \cong \frac{(p_i - p_o)R_m}{2t} = \frac{pR_m}{2t}$$



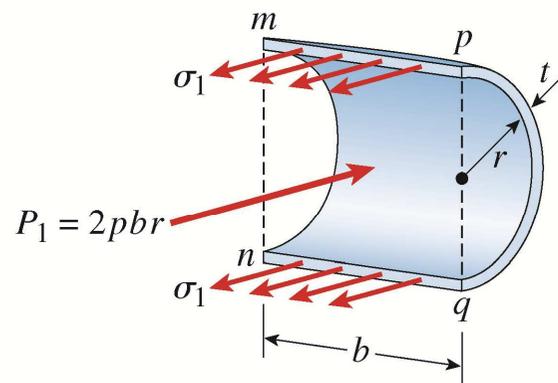
onde $p = p_i - p_o$ representa o diferencial de pressão entre a pressão interna e a pressão externa (absolutas) que agem sobre o vaso (ou seja, é a pressão relativa ou manométrica).



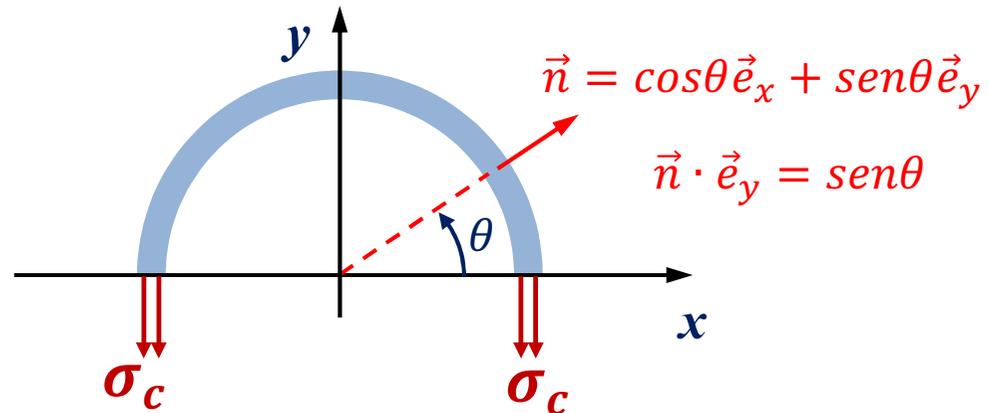
3.2. Tensões na direção circunferencial (σ_c)



$$\sigma_c(2bt) = b \left[\int_0^\pi p_i (\vec{n} \cdot \vec{e}_y) R_i d\theta - \int_0^\pi p_o (\vec{n} \cdot \vec{e}_y) R_o d\theta \right]$$



(b)





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\sigma_c(2bt) = b \left[\int_0^\pi p_i R_i \sin\theta d\theta - \int_0^\pi p_o R_o \sin\theta d\theta \right]$$

$$\sigma_c(2bt) = 2b(p_i R_i - p_o R_o)$$

$$\sigma_c = \frac{(p_i R_i - p_o R_o)}{t}$$

Utilizando as relações: $R_i = R_m - \frac{t}{2}$ $R_o = R_m + \frac{t}{2}$

teremos:
$$\sigma_c = \frac{(p_i - p_o)R_m}{t} - \frac{(p_i + p_o)}{2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Observamos novamente que, em alguns casos, a 2ª parcela da expressão obtida pode ser tão importante quanto a 1ª parcela, não devendo ser desprezada, como nos casos em que a pressão interna e a pressão externa (absolutas) têm praticamente a mesma ordem de grandeza.

Se este não for o caso, podemos desprezar o efeito da 2ª parcela em relação ao da 1ª parcela e simplificar a expressão para:

$$\sigma_c \cong \frac{(p_i - p_o)R_m}{t} = \frac{pR_m}{t}$$

Onde $p = p_i - p_o$ representa o diferencial de pressão entre a pressão interna e a pressão externa (absolutas) que agem sobre o vaso (ou seja, é a pressão relativa ou manométrica).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Concluimos do exposto que as tensões principais para um vaso de pressão cilíndrico são dadas por:

- Para os pontos da superfície interna do vaso:

$$\sigma' = \frac{(p_i - p_o)R_m}{t} - \frac{(p_i + p_o)}{2}$$

$$\sigma'' = \frac{(p_i - p_o)R_m}{2t} - \frac{(p_i + p_o)}{2}$$

$$\sigma''' = -p_i$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Onde: $\sigma_1 = \text{m\acute{a}x}\{\sigma', \sigma'', \sigma'''\}$

$$\sigma_3 = \text{m\acute{i}n}\{\sigma', \sigma'', \sigma'''\}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Para os pontos da superfície externa do vaso:

$$\sigma' = \frac{(p_i - p_o)R_m}{t} - \frac{(p_i + p_o)}{2}$$

$$\sigma'' = \frac{(p_i - p_o)R_m}{2t} - \frac{(p_i + p_o)}{2}$$

$$\sigma''' = -p_o$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Onde: $\sigma_1 = \text{máx}\{\sigma', \sigma'', \sigma'''\}$

$$\sigma_3 = \text{mín}\{\sigma', \sigma'', \sigma'''\}$$



4. Tensões em vasos de pressão esféricos (de parede espessa)

Resultados obtidos a partir da Teoria da Elasticidade mostram que a distribuição de tensões circunferenciais (σ_c) e radiais (σ_r) em um vaso de pressão esférico com raio interno a e raio externo b , submetido a uma pressão interna p_i e a uma pressão externa p_o são dadas por (vide, p.ex., Timoshenko e Goodier [2], ou Young e Budynas [5]):

$$\sigma_c = \frac{p_i a^3}{(b^3 - a^3)} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{r} \right)^3 \right] - \frac{p_o b^3}{(b^3 - a^3)} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right]$$
$$\sigma_r = \frac{p_i a^3}{(b^3 - a^3)} \left[1 - \left(\frac{b}{r} \right)^3 \right] - \frac{p_o b^3}{(b^3 - a^3)} \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right]$$

Onde: $a \leq r \leq b$ (note que as condições de contorno ficam plenamente atendidas, tanto na superfície interna quanto na superfície externa do vaso).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

A distribuição da máxima tensão de cisalhamento fica então dada por:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_c - \sigma_r}{2}$$
$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{3p_i a^3 b^3}{4(b^3 - a^3)r^3} - \frac{3p_o a^3 b^3}{4(b^3 - a^3)r^3}$$
$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{3(p_i - p_o)a^3 b^3}{4(b^3 - a^3)r^3}$$

Onde: $a \leq r \leq b$ (note que os pontos mais solicitados são os pontos da superfície interna do vaso, onde $r = a$).



5. Tensões em vasos de pressão cilíndricos (de parede espessa)

Resultados obtidos a partir da Teoria da Elasticidade mostram que a distribuição de tensões circunferenciais (σ_c) e radiais (σ_r) em um vaso de pressão cilíndrico com raio interno a e raio externo b , submetido a uma pressão interna p_i e a uma pressão externa p_o são dadas por (vide, p.ex., Timoshenko e Goodier [2], ou Young e Budynas [5]):

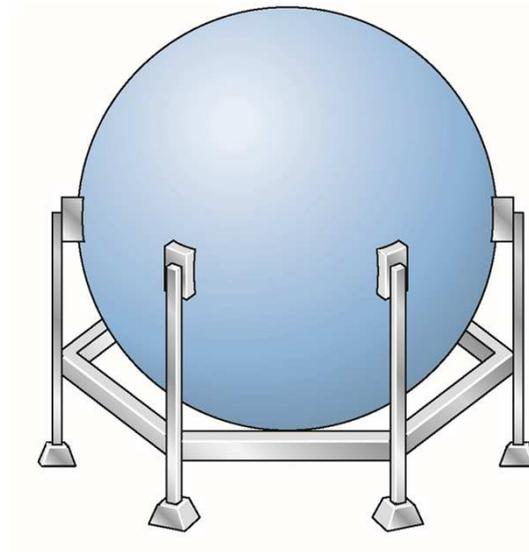
$$\sigma_c = \frac{p_i a^2}{(b^2 - a^2)} \left[1 + \left(\frac{b}{r} \right)^2 \right] - \frac{p_o b^2}{(b^2 - a^2)} \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right]$$
$$\sigma_r = \frac{p_i a^2}{(b^2 - a^2)} \left[1 - \left(\frac{b}{r} \right)^2 \right] - \frac{p_o b^2}{(b^2 - a^2)} \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right]$$

Onde: $a \leq r \leq b$ (note que as condições de contorno ficam plenamente atendidas, tanto na superfície interna quanto na superfície externa do vaso).



6. Exemplos (exercícios)

Um vaso de pressão esférico possui raio médio $R_m = 1000$ mm e espessura $t = 25$ mm. Considerando que a pressão interna seja $p = 5$ MPa (pressão manométrica), determine a máxima tensão de cisalhamento no vaso. Esboce também as distribuições de tensões circunferenciais ao longo do raio considerando a teoria aproximada e a teoria “exata”.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Temos: $\frac{t}{R_m} = \frac{25}{1000} = 0,025 < 0,10$

...o que mostra que o vaso pode ser considerado como de “parede fina”.

Considerando, inicialmente, o efeito da pressão interna e externa atuantes sobre o vaso teremos: $p_o \cong 0,1 \text{ MPa}$ e $p_i \cong 5,1 \text{ MPa}$. Logo:

$$\sigma_c = \frac{(p_i - p_o)R_m}{2t} - \frac{(p_i + p_o)}{2}$$
$$\sigma_c = \frac{(5) \times 1000}{2 \times 25} - \frac{(5,1 + 0,1)}{2} \quad (\text{MPa})$$

$$\sigma_c = 100 - 2,6 = 97,4 \text{ MPa}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Assim, os pontos da superfície interna terão como tensões principais:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_c = 97,4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = -p_i = -5,1 \text{ MPa}$$

E, assim, a máxima tensão de cisalhamento será:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{97,4 + 5,1}{2} = 51,25 \text{ MPa}$$

Verificando pela fórmula pronta (vide slide 17, para pontos da superfície interna do vaso):

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{|p_i - p_o|}{4} \left(\frac{R_m}{t} + 1 \right) = \frac{5}{4} \left(\frac{1000}{25} + 1 \right) = 51,25 \text{ MPa}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Pelos resultados “exatos” dado pela Teoria da Elasticidade, temos:

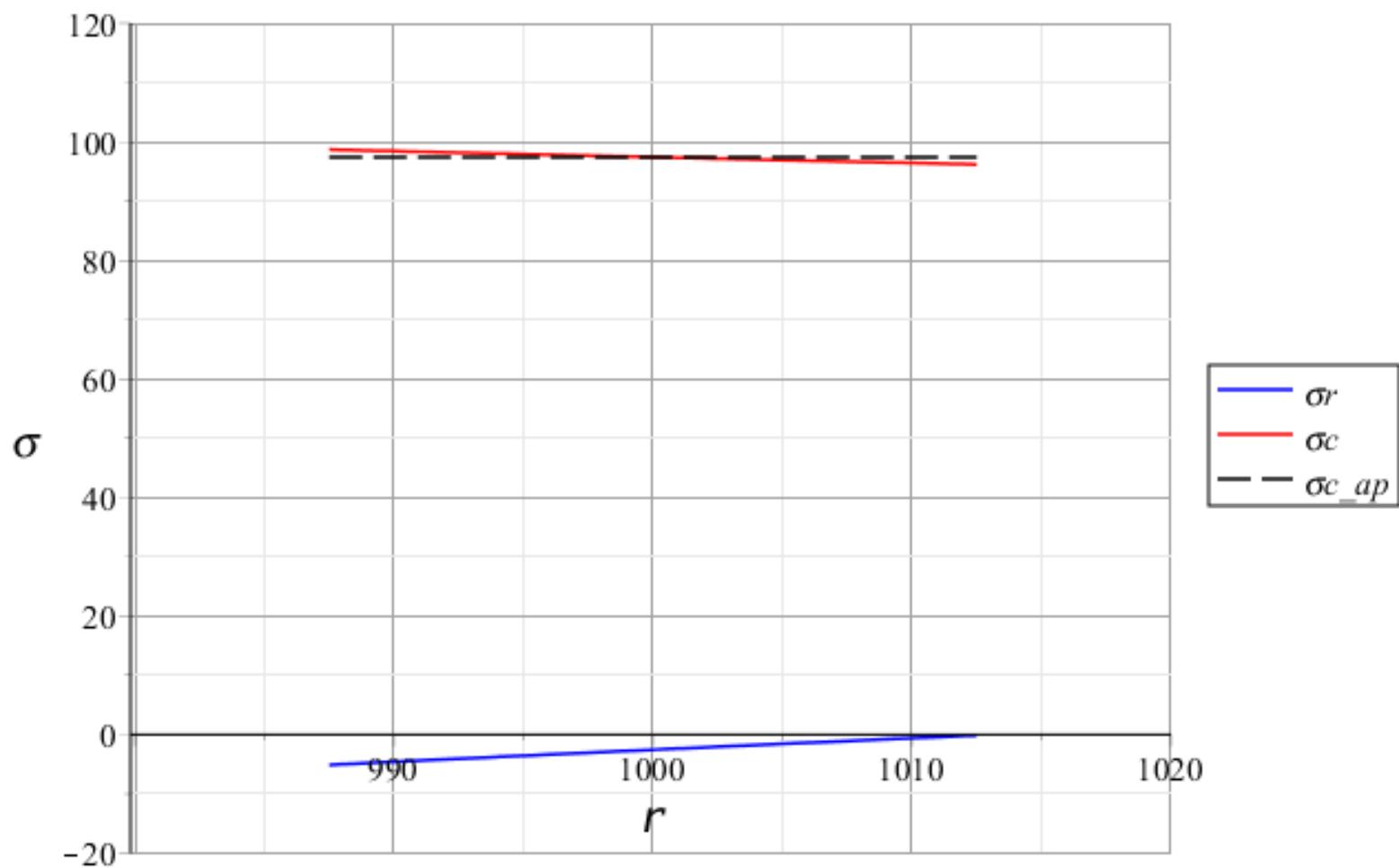
$$a = R_i = R_m - \frac{t}{2} = 987,5mm \quad p_i \cong 5,1 MPa$$

$$b = R_o = R_m + \frac{t}{2} = 1012,5mm \quad p_o \cong 0,1 MPa$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{3(p_i - p_o)b^3}{4(b^3 - a^3)} \cong 51,9 MPa$$

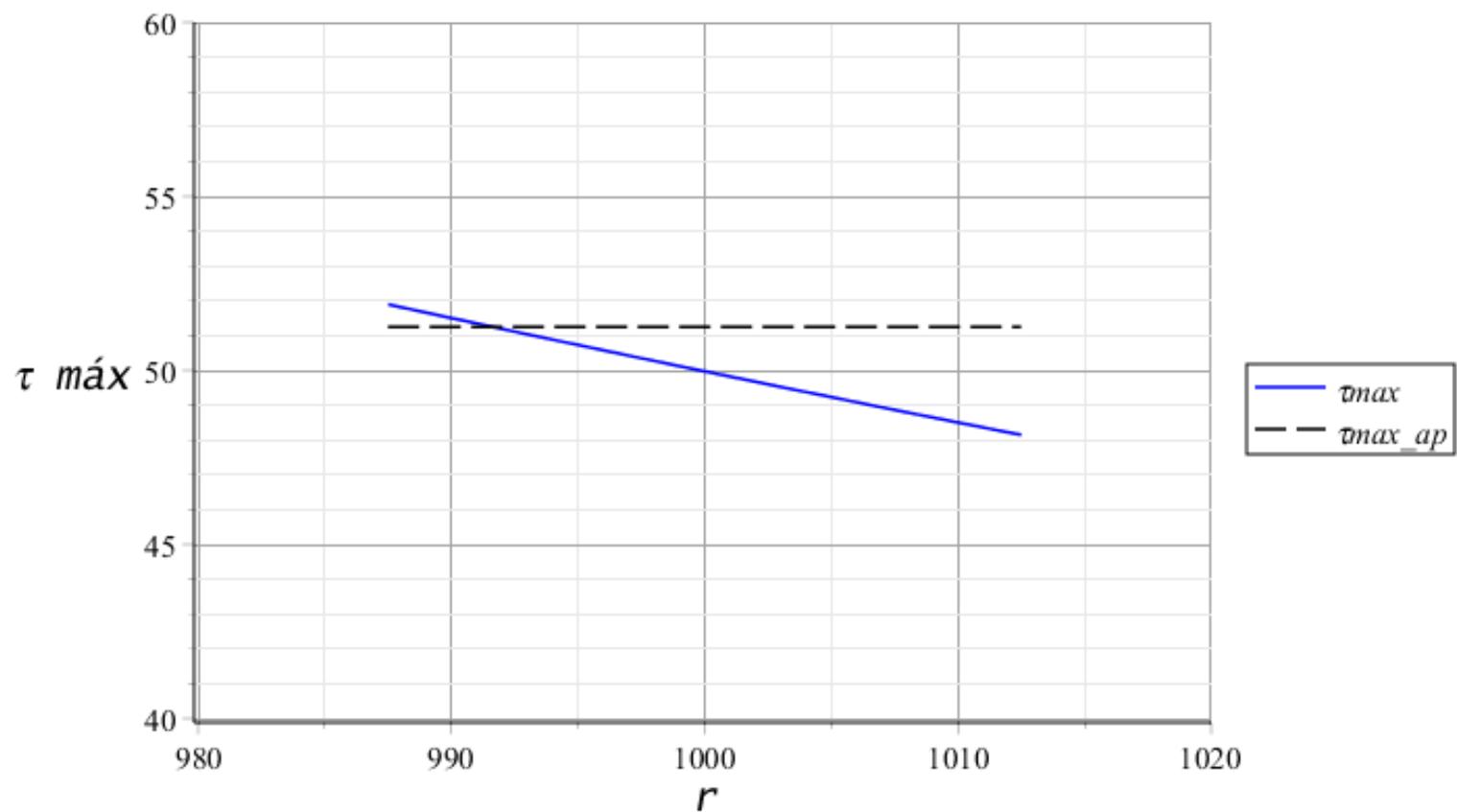


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.8.
- [2] Timoshenko, S.P., Goodier, J.N. Theory of Elasticity, 3rd ed. McGraw-Hill Publishing Company, 1970, 608 p.
- [3] <https://www.glmhead.com/hemispherical-dished-head-product/>
- [4] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Tensões, (2020), 66p.
- [5] Young, W.C., Budynas, R.G., Roark's formulas for stress and strain, 7th ed., McGraw-Hill Co., 854p.