Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #04

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

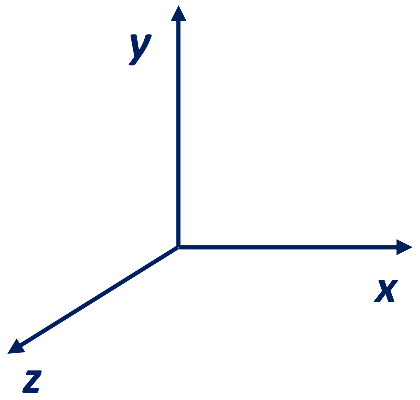
16/08/2023

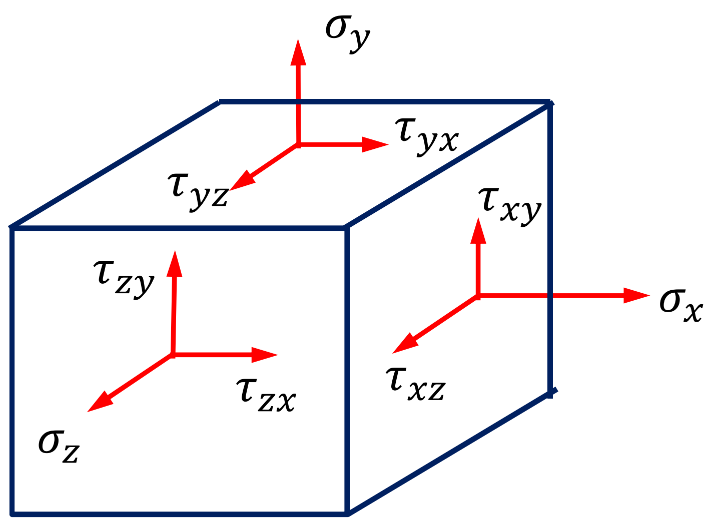
Estudo das Tensões – Aula 3
Agenda:

1. Tensões principais e direções principais de tensão;
2. Obtenção das tensões principais e das direções principais de tensão;
3. Exemplos.

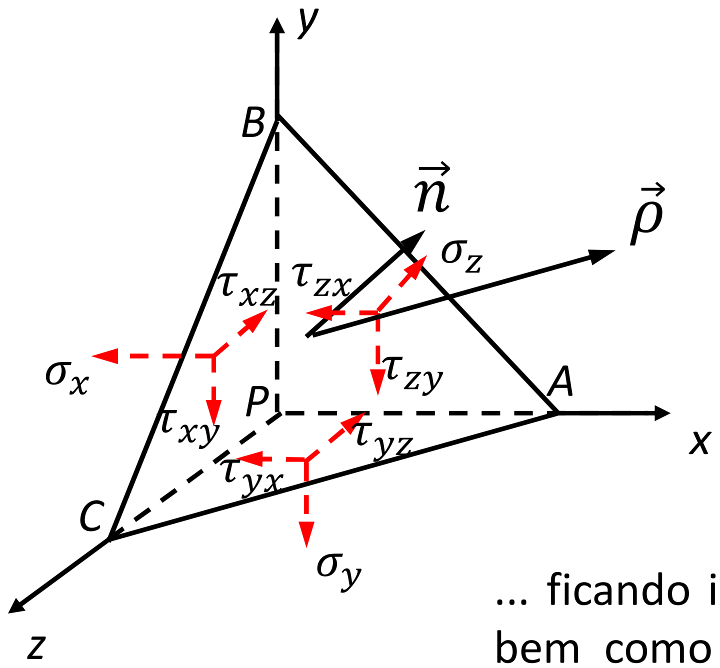
1. Tensões principais e direções principais de tensão

Vimos que o estado de tensões em um ponto de um sólido fica totalmente definido se conhecermos as componentes do vetor tensão em três planos ortogonais entre si:





Vimos também que o vetor tensão de Cauchy, associado a um dado ponto *P* e a um dado plano de normal $\vec{n}$ é dado por:



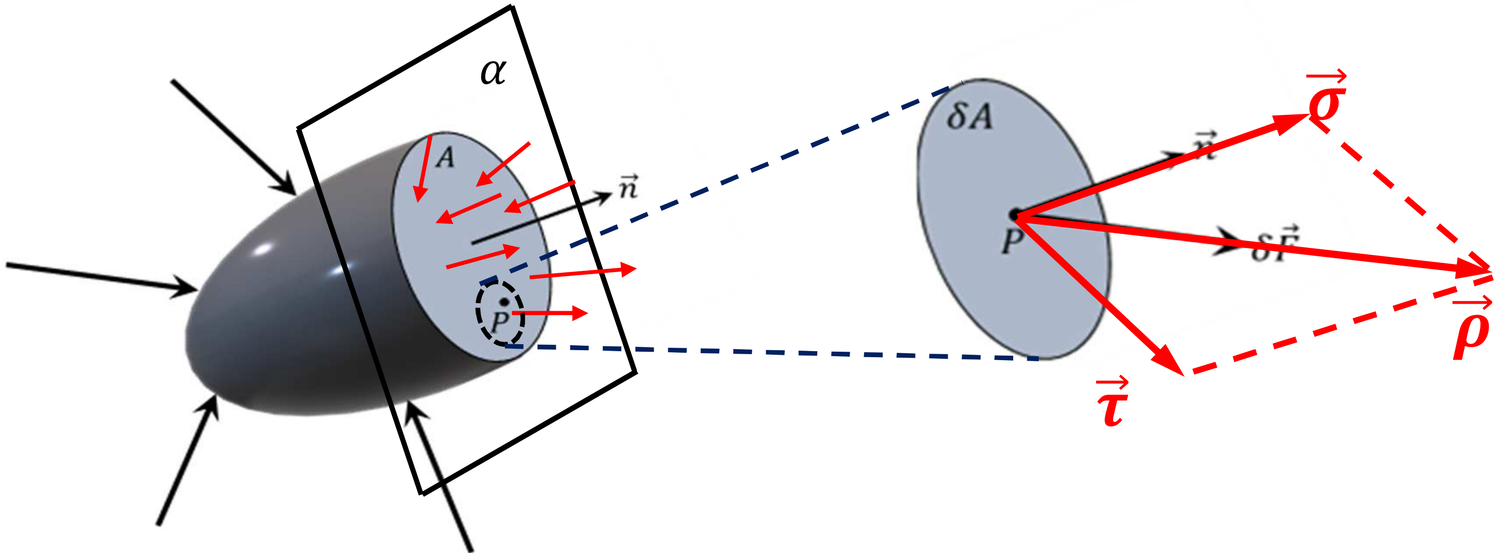
$$\{\vec{\rho}\} = [T]\,\{\vec{n}\}$$

$$\begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

... ficando implícito que o tensor das tensões no ponto *P*, bem como o vetor tensão e a normal unitária $\vec{n}$, estão todos escritos na MESMA base $\boldsymbol{b} = (\vec{\boldsymbol{e}}_x, \vec{\boldsymbol{e}}_y, \vec{\boldsymbol{e}}_z)$.

Vimos, por fim, que o vetor tensão $\vec{\rho}$ pode ser decomposto segundo uma componente normal ao plano de corte $\boldsymbol{\alpha}$ (denominada tensão normal) e uma componente paralela ao plano de corte (denominada tensão cisalhante). A relação entre o vetor tensão e suas componentes (normal e cisalhante) é, portanto, **<u>sempre</u>** dada por:

$$\vec{\rho} = \vec{\sigma} + \vec{\tau} = \sigma\vec{n} + \tau\vec{t}$$



Definição: Dizemos que uma dada direção definida por um versor $\vec{n}$ é uma *direção principal de tensão* se, e somente se:

$$\{\vec{\rho}\} = [T]\{\vec{n}\} = \sigma\{\vec{n}\}$$

Em outras palavras, o vetor tensão associado a tal direção possui a *componente cisalhante obrigatoriamente nula*.

Nestes casos, dizemos que o plano de normal $\vec{n}$ é um *plano principal de tensão*, e que a *tensão normal associada é uma tensão principal*.

2. Obtenção das tensões principais e das direções principais de tensão

Considerando que $\vec{n}$ seja uma direção principal de tensão, segue da definição que:

$$\{\vec{\rho}\} = [T]\{\vec{n}\} = \sigma\{\vec{n}\}$$

$$[T]\{\vec{n}\} - \sigma\{\vec{n}\} = \{\vec{0}\}$$

$$[T]\{\vec{n}\} - \sigma[I]\{\vec{n}\} = \{\vec{0}\}$$

$$([T] - \sigma[I])\{\vec{n}\} = \{\vec{0}\}$$

Explicitamente:

$$\left(\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{Eq.(1)}$$

O sistema dado acima é um sistema linear nas incógnitas n_x, n_y e n_z, o qual sempre admitirá, ao menos, uma solução, que é a solução trivial ($n_x = n_y = n_z = 0$). Para que existam soluções diferentes da solução trivial (que nem mesmo tem interesse prático, já que $\vec{n} = \vec{0}$ não caracteriza a normal a um plano), devemos impor que:

$$det\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} = 0$$

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \qquad \text{Eq.(2)}$$

Onde:

$$\begin{cases} I_1 = tr(T) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 = \begin{Vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{Vmatrix} = \\ \quad = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ I_3 = det(T) \end{cases}$$

As três raízes de Eq.(2) *serão sempre reais* e seus valores fornecem as tensões principais atuantes nos planos principais. Denotaremos as três tensões principais encontradas por σ_1, σ_2 e σ_3, as quais serão ordenadas seguindo a convenção:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3,$$

Ou seja, σ_1 será sempre a *maior tensão principal em valor algébrico* e σ_3 será sempre a *menor tensão principal em valor algébrico*.

Para cada raiz $\sigma = \sigma_i$ encontrada, deve-se determinar a direção principal $\vec{n} = \vec{n}_i$ correspondente usando a Eq.(1), reescrita abaixo para uma dada tensão principal:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_{x,i} \\ n_{y,i} \\ n_{z,i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Com relação à multiplicidade das raízes podemos ter os seguintes casos possíveis:

- As três tensões principais são iguais ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$): neste caso, mostra-se que toda direção é uma direção principal de tensão e tal estado de tensão é denominado estado hidrostático de tensão;
- Duas tensões principais são iguais ($\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ ou $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$): no 1º caso, todas as direções ortogonais à direção $\vec{n}_3$ serão direções principais associadas à tensão principal $\sigma_1 = \sigma_2$; e, no 2º caso, todas as direções ortogonais à direção $\vec{n}_1$ serão direções principais associadas à tensão principal $\sigma_2 = \sigma_3$;
- As três tensões principais são diferentes ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$): neste caso, mostra-se que as três direções principais são ortogonais entre si, formando uma base ortonormal (denominada base das direções principais de tensão).

Os coeficientes I_1, I_2 e I_3 do polinômio característico dado por Eq.(2) são denominados *invariantes de tensão*, pois seus valores não podem depender da base $b = \left(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$ escolhida inicialmente para representar o estado de tensões no ponto, sendo, portanto, invariantes com relação à base escolhida.

Observamos, por fim, que este é mais um exemplo (dentre os vários encontrados na Engenharia) de problema de determinação de autovalores e autovetores:

$T: (\vec{n} \in V^3) \rightarrow (\vec{\rho} \in V^3)$ (T é denominado um operador vetorial linear)

Quando $\vec{n}$ é direção principal de tensão:

$$[T]\{\vec{n}\} = \{\vec{\rho}\} = \sigma\{\vec{n}\}$$

$\vec{n}$, neste caso, é um autovetor associado ao autovalor σ.

Deve-se, notar, por fim que, sempre que substituirmos a tensão σ na Eq.(1) por uma das tensões principais (isto é, tomando $\sigma = \sigma_i$), o sistema linear obtido nas incógnitas $n_{x,i}$, $n_{y,i}$ e $n_{z,i}$ será um sistema possível e indeterminado. Esta indeterminação pode ser entendida facilmente se observarmos que, sendo $\vec{n}_i = \left(n_{x,i}, n_{y,i}, n_{z,i}\right)$ uma direção principal associada a σ_i, ou seja:

$$[T]\{\vec{n}_i\} = \sigma_i\{\vec{n}_i\}$$

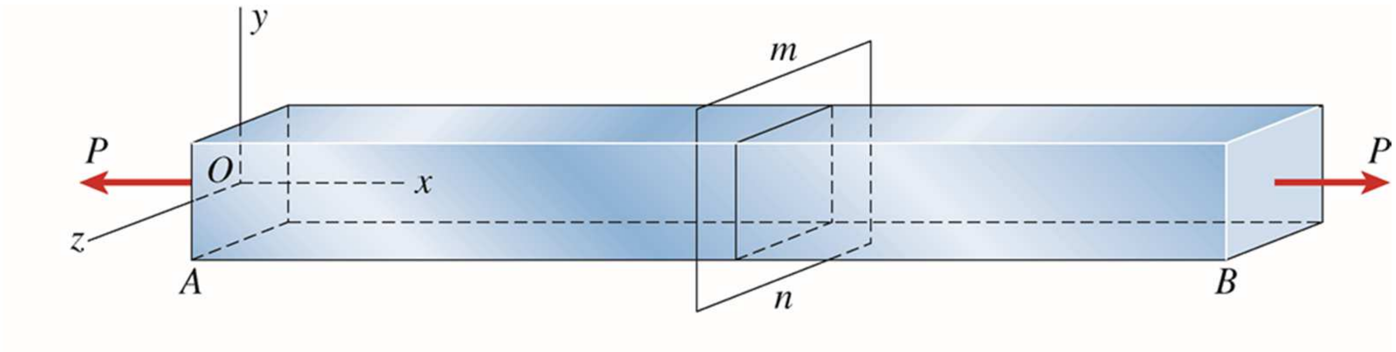
Então, sendo T um operador vetorial linear:

$$[T]\{\alpha\vec{n}_i\} = \alpha[T]\{\vec{n}_i\} = \alpha\sigma_i\{\vec{n}_i\} = \sigma_i\{\alpha\vec{n}_i\}$$

O que mostra que $\alpha\vec{n}_i$ também é um autovetor associado ao mesmo autovalor, ou seja, existem infinitos vetores (de módulos diferentes) que podem satisfazer a Eq.(1) para um mesmo autovalor.

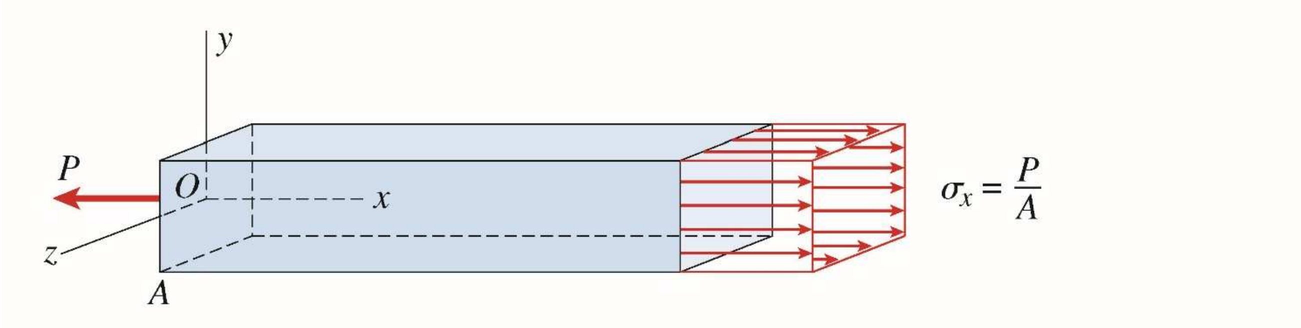
3. Exemplos

3.1. Barra prismática sob tração/compressão simples



Dados:
P = força normal de tração (se *P* > 0) ou de compressão (se *P* < 0);
A= área da seção transversal da barra.

Hipótese:
- Linha de ação de *P* passa pelos centroides das seções transversais.



Como vimos na aula anterior, o tensor das tensões, para qualquer ponto da barra (desde que suficientemente distante das extremidades), e escrito na base $b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, fica:

$$[T]_b = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que a ausência de tensões de cisalhamento nos planos paralelos aos planos ortogonais *yz*, *xz* e *xy* já mostra que as direções dadas pelos versores $\vec{n}_1 = \vec{e}_x = (1{,}0{,}0)_b$, $\vec{n}_2 = \vec{e}_y = (0{,}1{,}0)_b$ e $\vec{n}_3 = \vec{e}_z = (0{,}0{,}1)_b$ jã são direções principais de tensão. Vamos, contudo, aplicar o procedimento padrão para uma investigação completa dos autovalores e autovetores...

Como vimos, os autovalores do tensor das tensões são obtidos a partir da relação:

$$det([T] - \sigma[I]) = 0$$

...que, neste caso, fica:

$$det\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix} = 0$$

$$\sigma^2(\sigma_x - \sigma) = 0 \iff \begin{cases} \sigma = 0 & \text{(raiz de multiplicidade 2)} \\ \text{ou} & \\ \sigma = \sigma_x & \text{(raiz de multiplicidade 1)} \end{cases}$$

Uma vez encontradas as raízes, devemos ordená-las em valor algébrico, seguindo a convenção adotada. Considerando que a força *P* seja de tração, teremos $\sigma_x = P/A > 0$, logo:

$$\sigma_1 = \sigma_x = P/A \qquad \text{e} \qquad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

- ***Autovetor associado ao autovalor*** $\boldsymbol{\sigma_1 = \sigma_x = P/A}$

Da Eq.(3), teremos, utilizando o autovalor $\sigma_1 = \sigma_x = P/A$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A 1ª equação é satisfeita para quaisquer valores de n_x, n_y e n_z, ao passo que a 2ª e a 3ª equações exigem, respectivamente, que $n_y = 0$ e $n_z = 0$.

Logo, o autovetor correspondente ao autovalor $\sigma_1 = \sigma_x = P/A$ é:

$$\vec{n}_1 = (n_x, 0, 0)$$

Como devemos ter $\|\vec{n}_1\| = 1$, devemos tomar $n_x = 1$ ou $n_x = -1$ (*as duas escolhas são possíveis e corretas*). Assim:

$$\vec{n}_1 = (1, 0, 0) \qquad \text{ou} \qquad \vec{n}_1 = (-1, 0, 0)$$

Autovetores associados ao autovalor $\boldsymbol{\sigma_2 = \sigma_3 = 0}$

De forma análoga, utilizando o autovalor $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ em Eq.(1), virá :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

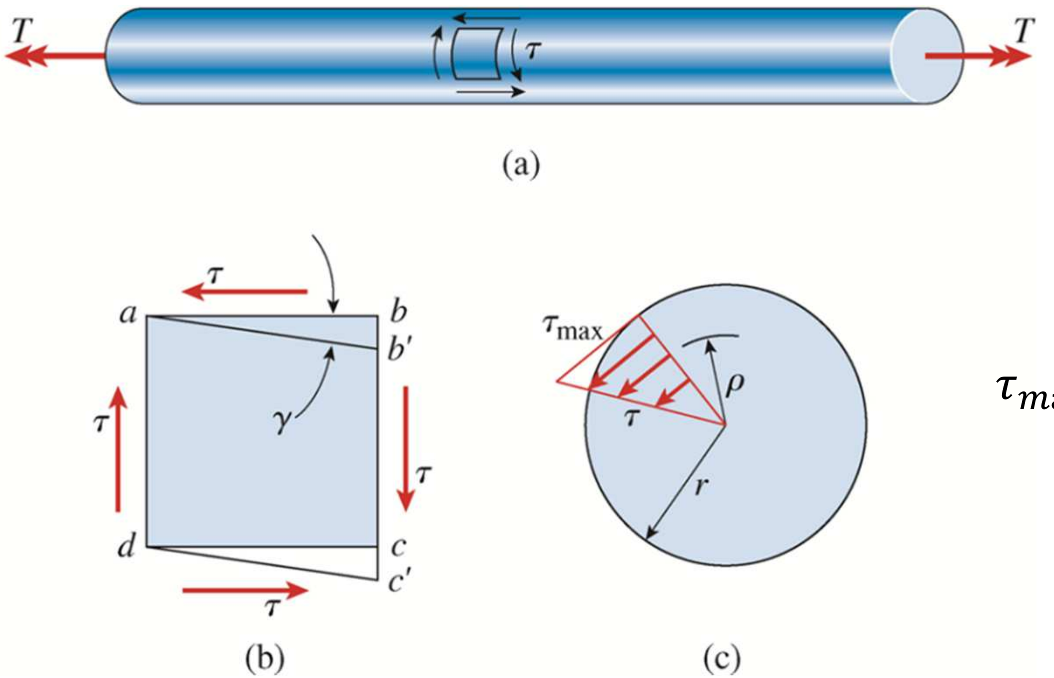
A 1ª equação é satisfeita quando $n_x = 0$, ao passo que a 2ª e a 3ª equações são satisfeitas para quaisquer valores de n_x, n_y e n_z. Assim, os autovetores associados ao autovalor $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ são da forma:

$$\vec{n} = \left(0, n_y, n_z\right) \qquad \text{com} \qquad n_y^2 + n_z^2 = 1$$

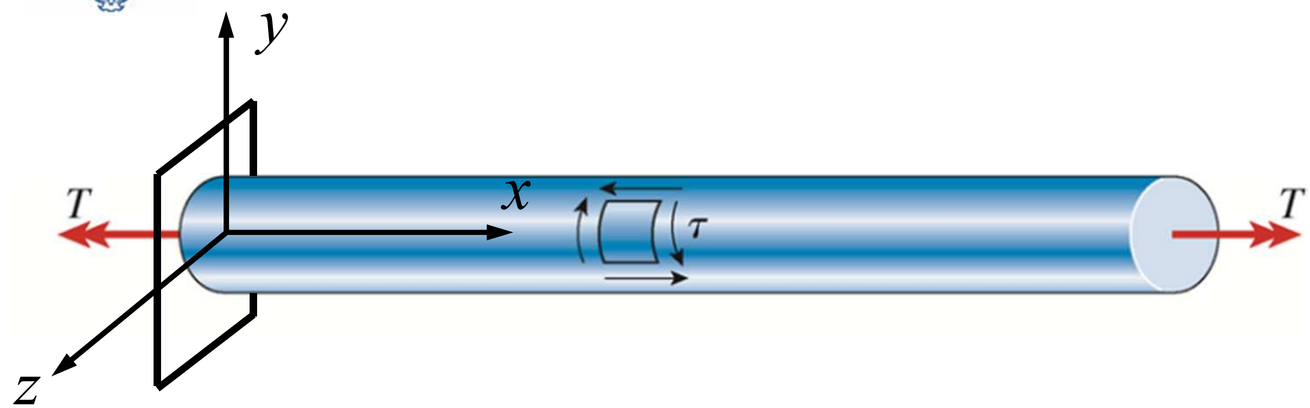
Ou seja: $\vec{n} = (0, cos\theta, sen\theta), \qquad 0 \leq \theta < 2\pi.$

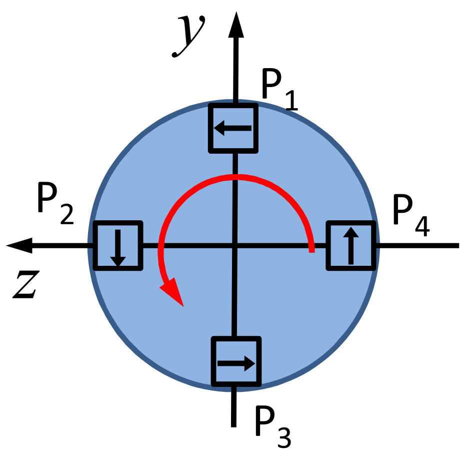
O que significa que *qualquer versor contido no plano yz* é uma direção principal associada ao autovalor $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ (existem infinitos autovetores neste caso).

3.2. Barra sob torção pura

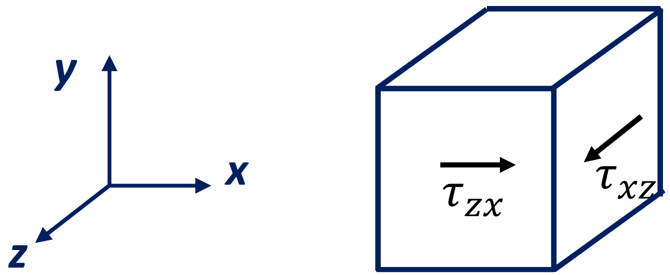


$$\tau_{máx} = \tau_0 = \frac{T}{I_p} r > 0$$





Estado de tensões e tensor das tensões em P_1:



$$[T(P_1)]_b = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ***Determinação dos autovalores do tensor das tensões:***

$$det\begin{bmatrix} -\sigma & 0 & \tau_0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ \tau_0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix} = 0$$

$$-\sigma^3 + \sigma\tau_0^2 = 0$$

$$-\sigma(\sigma^2 - \tau_0^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sigma = 0 \\ \text{ou} \\ \sigma = \pm|\tau_0| \end{array} \right.$$

Uma vez encontradas as raízes, devemos ordená-las em valor algébrico, seguindo a convenção adotada. Notamos que, independentemente do sentido do torque aplicado, teremos:

$$\sigma_1 = +|\tau_0| \qquad \sigma_2 = 0 \qquad \sigma_3 = -|\tau_0|$$

- ***Autovetor associado ao autovalor $\boldsymbol{\sigma_1} = +|\boldsymbol{\tau_0}|$:***

$$\begin{bmatrix} -|\tau_0| & 0 & \tau_0 \\ 0 & -|\tau_0| & 0 \\ \tau_0 & 0 & -|\tau_0| \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Notamos que a 1ª e a 3ª equações algébricas são linearmente dependentes e levam a:

$$n_x = \frac{\tau_0}{|\tau_0|} n_z = sign(\tau_0).\, n_z$$

Como neste caso temos $\tau_0 > 0$, virá: $n_x = n_z$

Já, da 2ª equação algébrica, teremos: $n_y = 0$

E, portanto, o autovetor associado ao autovalor $\sigma_1 = +|\tau_0|$ é dado por:

$$\vec{n}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Ou ainda por:

$$\vec{n}_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

- ***Autovetor associado ao autovalor $\boldsymbol{\sigma_2 = 0}$:***

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Neste caso, a 1ª equação leva a $n_z = 0$, e a 3ª equação leva a $n_x = 0$. Já a 2ª equação fica satisfeita para quaisquer valores de n_x, n_y e n_z. Logo, o autovetor associado ao autovalor $\sigma_2 = 0$ fica:

$$\vec{n}_2 = (0, 1, 0)$$

Ou ainda:

$$\vec{n}_2 = (0, -1, 0)$$

- ***Autovetor associado ao autovalor $\boldsymbol{\sigma_3 = -|\tau_0|}$:***

$$\begin{bmatrix} |\tau_0| & 0 & \tau_0 \\ 0 & |\tau_0| & 0 \\ \tau_0 & 0 & |\tau_0| \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \tau_0 & 0 & \tau_0 \\ 0 & \tau_0 & 0 \\ \tau_0 & 0 & \tau_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A 1ª e a 3ª equações algébricas são linearmente dependentes e levam a:

$$n_x = -n_z$$

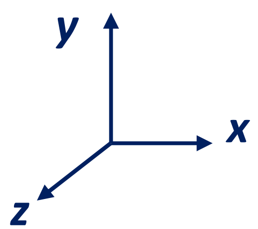
E a 2ª equação traz: $n_y = 0$

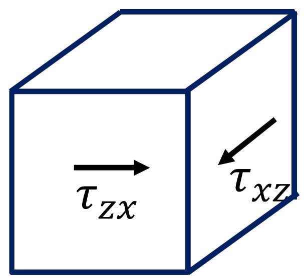
Logo, o autovetor associado ao autovalor $\sigma_3 = -|\tau_0|$ é dado por:

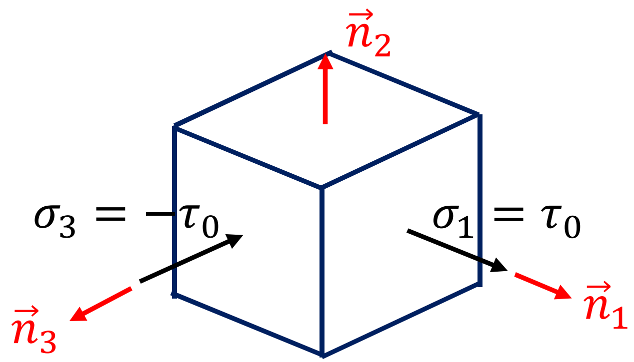
$$\vec{n}_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \vec{n}_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Para obtermos uma base formada pelas direções principais de tensão podemos considerar então:

$$\vec{n}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \vec{n}_2 = (0, 1, 0) \qquad \vec{n}_3 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$







Lembrando que em uma base genérica $b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, o tensor das tensões fica escrito como:

$$[T]_b = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{\rho}\Big|_{\vec{n}=\vec{e}_x} \qquad \vec{\rho}\Big|_{\vec{n}=\vec{e}_y} \qquad \vec{\rho}\Big|_{\vec{n}=\vec{e}_z}$$

Então, na base formada pelas direções principais de tensão, $b' = (\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$, o tensor das tensões ficará escrito como:

$$[T]_{b'} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

$\vec{\rho}\Big|_{\vec{n}=\vec{n}_1}$ $\vec{\rho}\Big|_{\vec{n}=\vec{n}_2}$ $\vec{\rho}\Big|_{\vec{n}=\vec{n}_3}$

Referências:

[1] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Tensões, (2020), 66p.

[2] Popov, E.P. Engineering Mechanics of Solids, 2nd ed., Prentice-Hall, Inc., 1998, 864p.

[3] Gere, J.M.; Goodno, B.J.; Mecânica dos Materiais, Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p.