



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #03

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

15/08/2023



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Estudo das Tensões – Aula 3

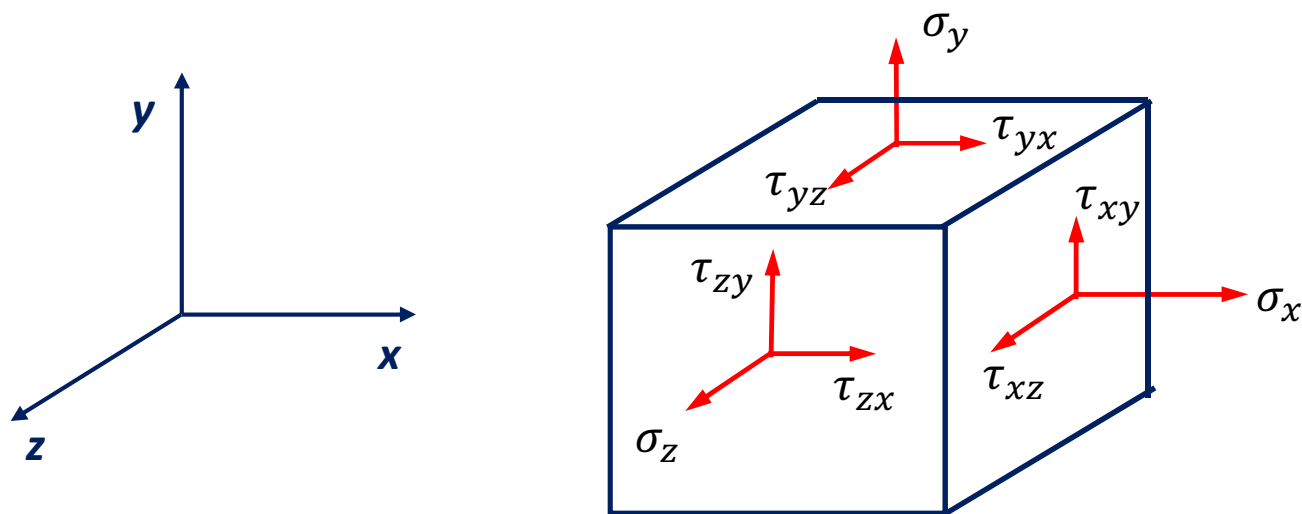
Agenda:

1. Estado de tensão em um ponto;
2. Vetor tensão em um plano inclinado e o tensor das tensões de Cauchy;
3. Componentes do vetor tensão;
4. Simetria do tensor das tensões de Cauchy;
5. Exemplos.



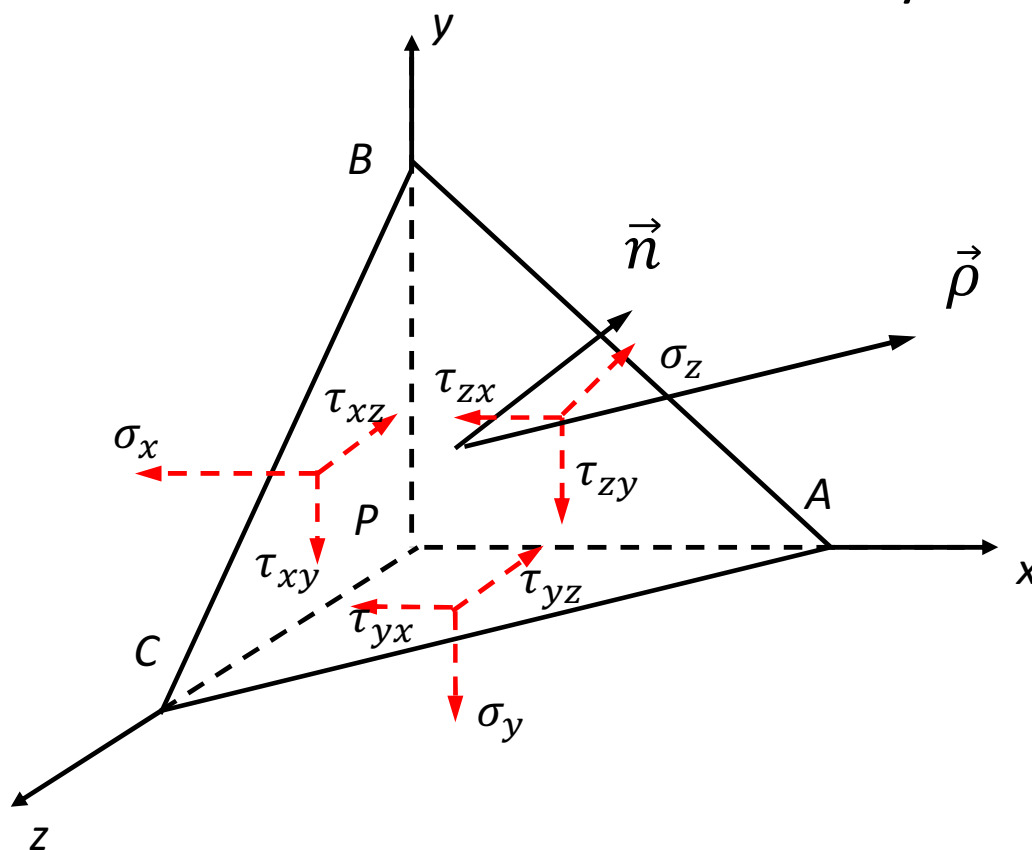
1. Estado de tensão em um ponto

O estado de tensões em um ponto de um sólido fica perfeitamente definido se conhecermos as componentes do vetor tensão em três planos ortogonais entre si:





2. Vetor tensão em um plano inclinado e o tensor das tensões de Cauchy





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Componentes do
vetor tensão
associado ao
ponto P e ao plano
de normal $\vec{n}$

$$\begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

Normal externa (unitária)
ao plano inclinado

Tensor das tensões no ponto P ,
escrito na base $\mathbf{b} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

De forma sintética: $\{\vec{\rho}\}_{\mathbf{b}} = [T]_{\mathbf{b}} \{\vec{n}\}_{\mathbf{b}}$

E, de forma ainda mais sintética:

$$\{\vec{\rho}\} = [T] \{\vec{n}\}$$

...ficando subentendida qual base está sendo utilizada (sempre a mesma base).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

$\vec{\rho}|_{\vec{n}=\vec{e}_x}$ $\vec{\rho}|_{\vec{n}=\vec{e}_y}$ $\vec{\rho}|_{\vec{n}=\vec{e}_z}$



3. Componentes do vetor tensão

Vimos que o vetor tensão $\vec{\rho}$ pode ser decomposto segundo uma componente normal ao plano de corte α (a qual é denominada tensão normal) e uma componente paralela ao plano de corte (a qual é denominada tensão cisalhante). A relação entre o vetor tensão e suas componentes (normal e cisalhante) é dada por:

$$\vec{\rho} = \vec{\sigma} + \vec{\tau} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t}$$

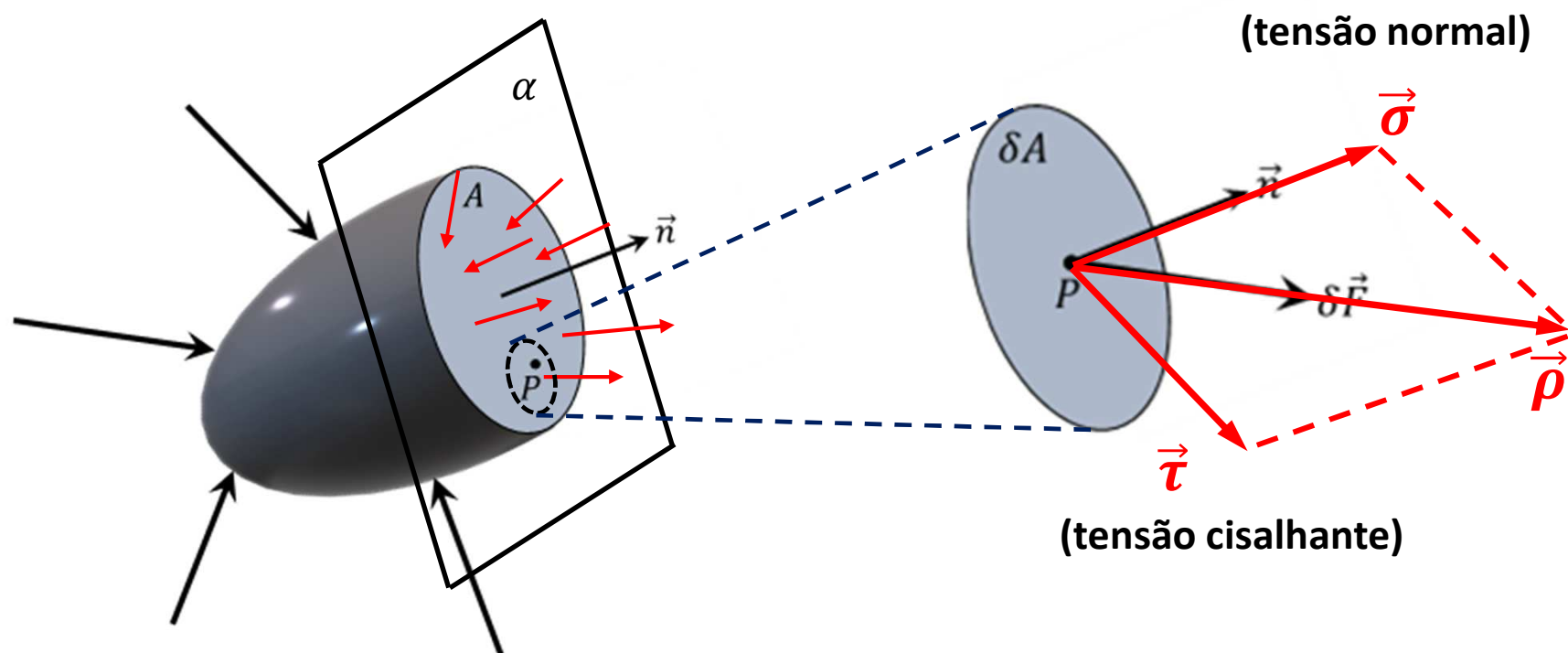
Onde:

- $\vec{\sigma} = \sigma \vec{n}$ $\vec{\tau} = \tau \vec{t}$
- $\vec{\sigma}$ e $\vec{\tau}$: são vetores (possuem magnitude, direção e sentido)
- σ e τ : são escalares
- $\vec{n}$ e $\vec{t}$: são versores (possuem norma unitária)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\vec{\rho} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t}$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Note que a componente normal ($\vec{\sigma}$) do vetor tensão ($\vec{\rho}$) terá sempre a direção do versor $\vec{n}$ (versor normal ao plano de corte), de forma que:

- Se $\sigma > 0$, dizemos que a tensão normal é de tração;
- Se $\sigma = 0$, dizemos que não há componente normal do vetor tensão;
- Se $\sigma < 0$, dizemos que a tensão normal é de compressão.

Quanto à componente cisalhante, esta pode ser obtida simplesmente pela subtração entre o vetor tensão e a componente normal:

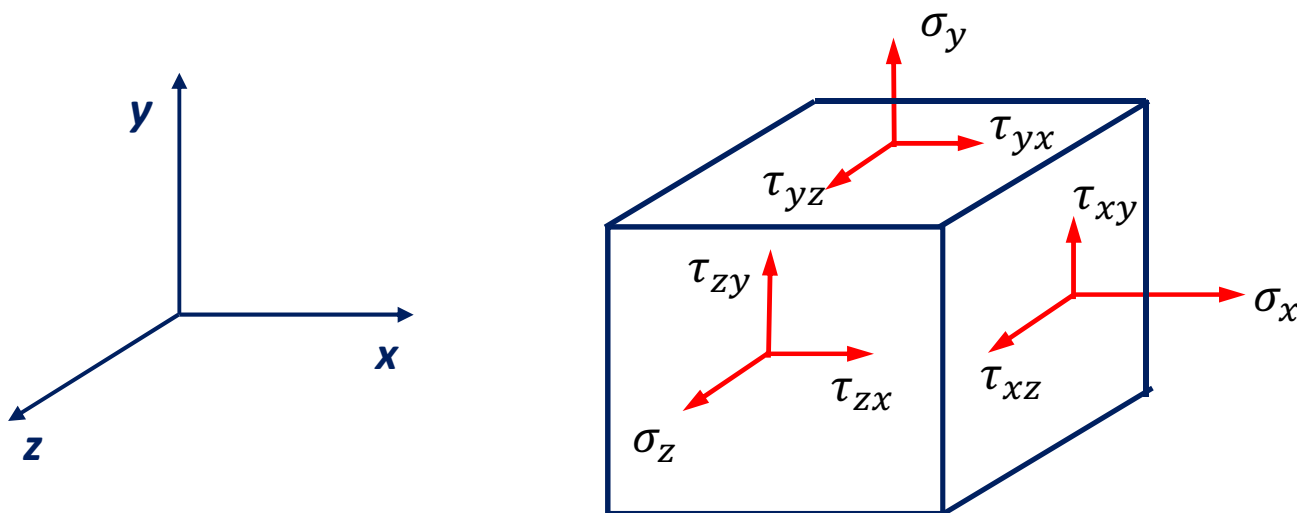
$$\vec{\rho} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t} \quad \longleftrightarrow \quad \tau \vec{t} = \vec{\rho} - \sigma \vec{n}$$

Outra relação útil: $\rho^2 = \sigma^2 + \tau^2$



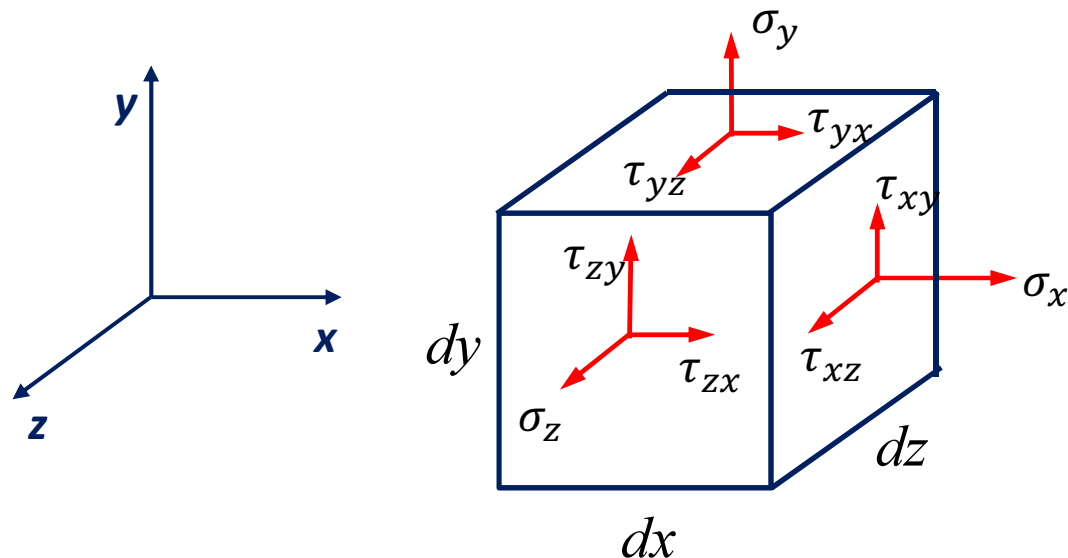
4. Simetria do tensor das tensões

A relação $\{\vec{\rho}\} = [T]\{\vec{n}\}$ foi obtida impondo-se o equilíbrio de forças em um tetraedro infinitesimal, a fim de obtermos o vetor tensão em um plano inclinado. Vamos, agora, impor o equilíbrio de momentos das forças, porém sobre um paralelepípedo, já que não é necessário haver uma face inclinada:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$\sum M_x = 0 \Leftrightarrow \tau_{yz}(dx dz) dy = \tau_{zy}(dx dy) dz \Leftrightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\sum M_y = 0 \Leftrightarrow \tau_{zx}(dx dy) dz = \tau_{xz}(dy dz) dx \Leftrightarrow \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

$$\sum M_z = 0 \Leftrightarrow \tau_{xy}(dy dz) dx = \tau_{yx}(dx dz) dy \Leftrightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

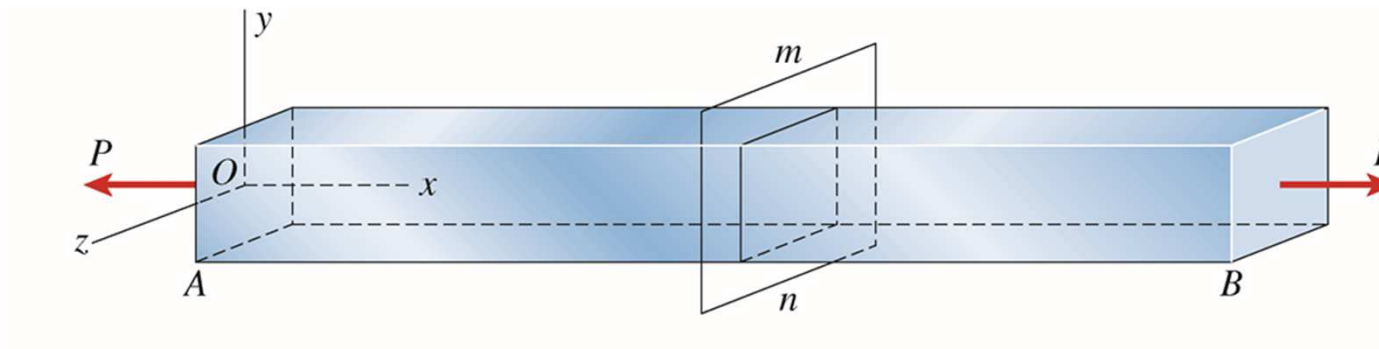
Decorre da simetria do tensor das tensões que, para determinar completamente o estado de tensões em um ponto do material, basta conhecer:

- As três componentes de tensão normal atuando em três planos ortogonais $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$;
- As três componentes de tensão cisalhante atuando nos mesmos três planos ortogonais: $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$.



5. Exemplos

5.1. Barra prismática sob tração/compressão simples



Dados:

P = força normal de tração (se $P > 0$) ou de compressão (se $P < 0$);

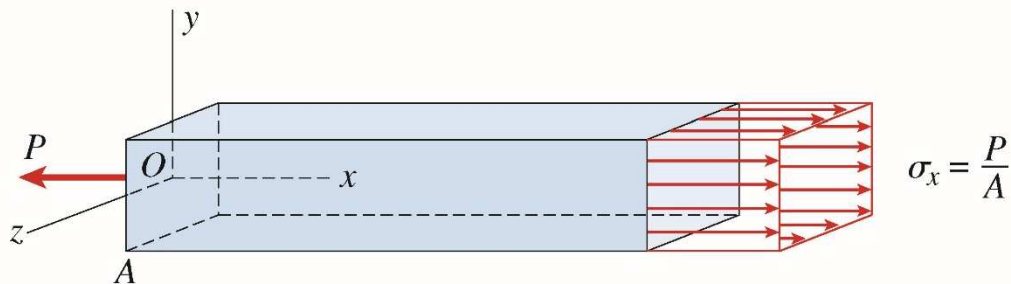
A = área da seção transversal da barra.

Hipótese:

- Linha de ação de P passa pelos centroides das seções transversais.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Em seções transversais distantes das extremidades da barra, pode-se admitir um estado de tensão uniforme tal que:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} \quad \sigma_y = \sigma_z = 0 \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

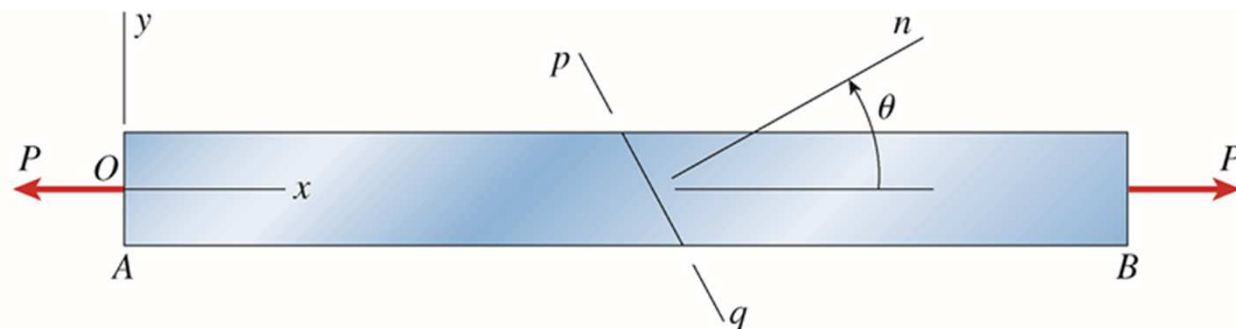
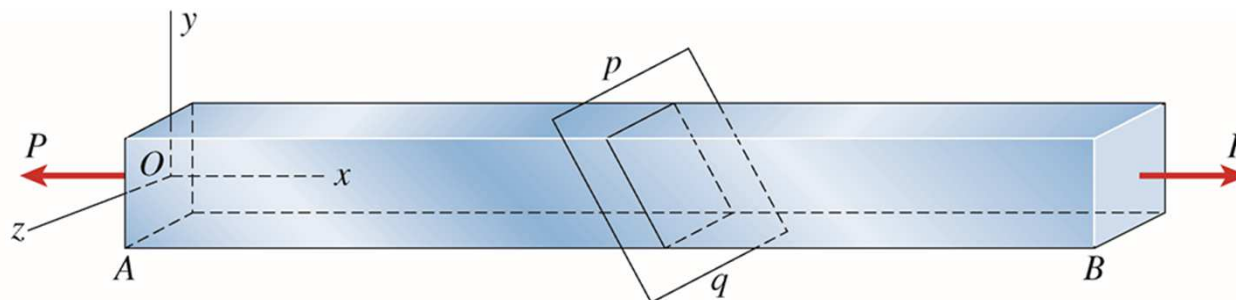
Neste caso, o tensor das tensões, para qualquer ponto da barra (desde que suficientemente distante das extremidades), e escrito na base $b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, fica:

$$[T]_b = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



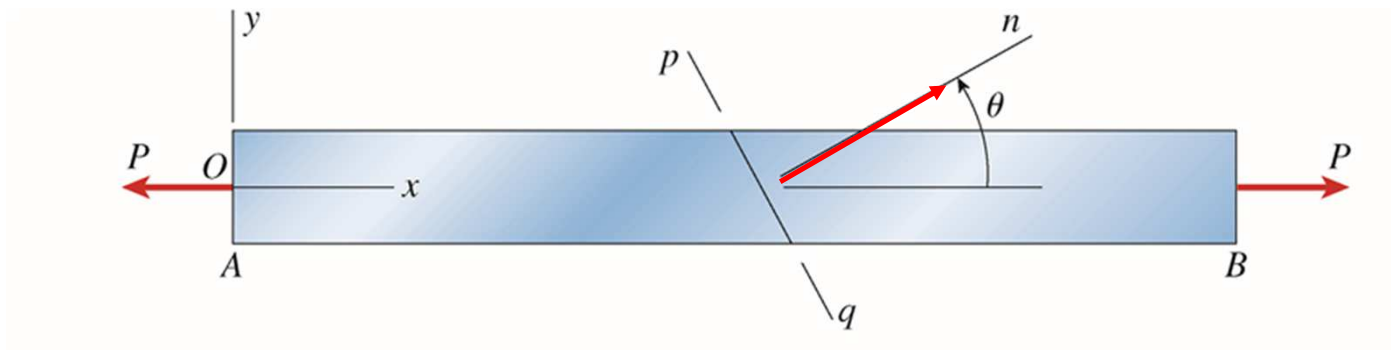
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Se desejarmos, agora, determinar as tensões em planos inclinados como os assinalados na figura abaixo (conforme vimos em PME-3210, Aula #07, vide também Gere & Goodno [3], cap.2), basta determinarmos o vetor tensão associado ao plano e suas componentes:



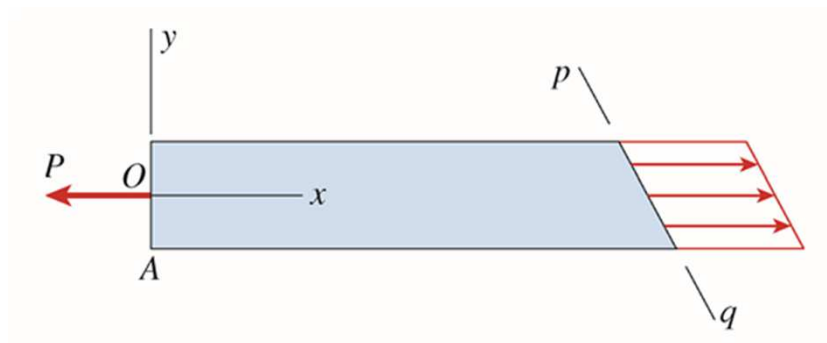


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Temos: $\vec{n} = \left(\cos\theta, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)_b = (\cos\theta, \sin\theta, 0)_b$

$$\{\vec{\rho}\} = [T] \{\vec{n}\} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Lembrando que: $\vec{\rho} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t}$,

A componente normal (escalar σ) do vetor tensão fica dada por (multiplicando escalarmente a relação acima por $\vec{n}$):

$$\sigma = \vec{\rho} \cdot \vec{n} = \sigma_x \cos^2 \theta$$

E, na forma vetorial:

$$\vec{\sigma} = \sigma \vec{n} = \sigma_x \cos^2 \theta \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para obtermos a componente de cisalhamento há várias possibilidades (dependendo do que se quer determinar: apenas o escalar τ que define o módulo da tensão cisalhante ou o vetor completo $\vec{\tau}$).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

A componente cisalhante ($\vec{\tau}$) fica dada por:

$$\vec{\tau} = \vec{\rho} - \vec{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \sigma_x \cos^2 \theta \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\tau} = \sigma_x \cos \theta \left(\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \cos^2 \theta \\ \sin \theta \cos \theta \\ 0 \end{Bmatrix} \right) = \sigma_x \cos \theta \begin{Bmatrix} \sin^2 \theta \\ -\sin \theta \cos \theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Já o módulo da componente cisalhante (τ) pode ser obtido por meio de:

a) $\tau^2 = \vec{\tau} \cdot \vec{\tau} \Rightarrow |\tau| = \sqrt{\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}}$

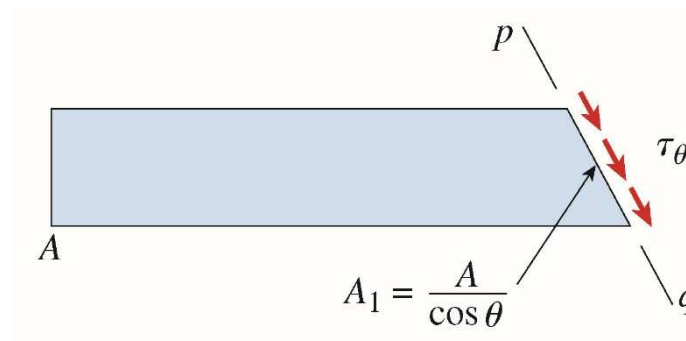
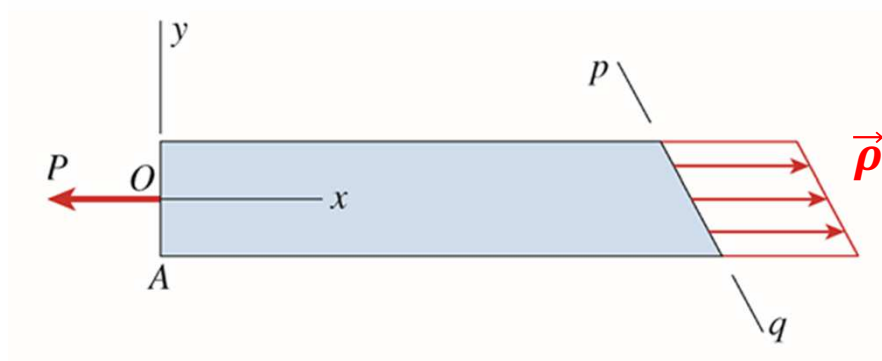
b) $\rho^2 = \sigma^2 + \tau^2 \Rightarrow |\tau| = \sqrt{\rho^2 - \sigma^2}$

c) Pelo produto escalar de $\vec{\rho}$ por $\vec{\tau}$ ou por $-\vec{\tau}$ (ver próximo slide).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

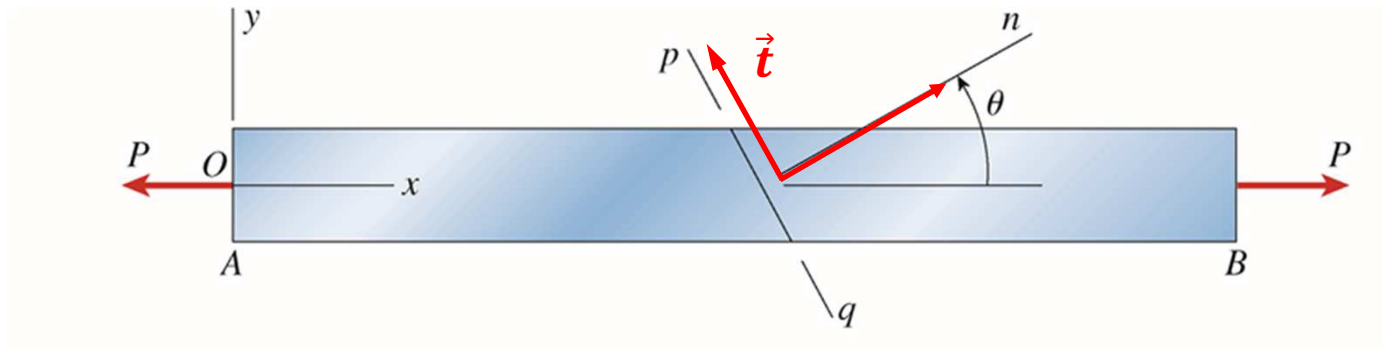
Observando que o vetor tensão, neste caso, tem a direção do eixo x (ver slide 16), e que os planos inclinados, aqui considerados, são paralelos ao eixo z (para qualquer valor de θ), podemos projetar o vetor tensão segundo um versor tangente ao plano, e que “desce” ou “sobe” o plano. A escolha pode ser qualquer, pois a função $\tau = \tau(\theta)$ encontrada nos dirá, para cada valor de θ , se a tensão resultante terá o mesmo sentido do versor escolhido, ou o sentido contrário ao versor escolhido.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Escolhendo o versor que “sobe” o plano, seguindo a mesma convenção utilizada no cap.2 de Gere & Goodno [3], teremos:



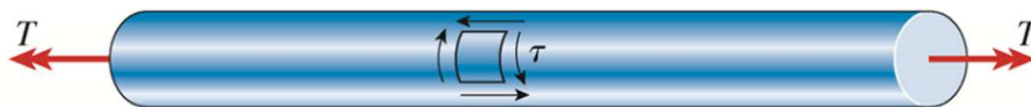
$$\vec{t} = \left(\cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right), \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right), 0 \right) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

$$\tau = \vec{\rho} \cdot \vec{t} = -\sigma_x \cos \theta \sin \theta$$

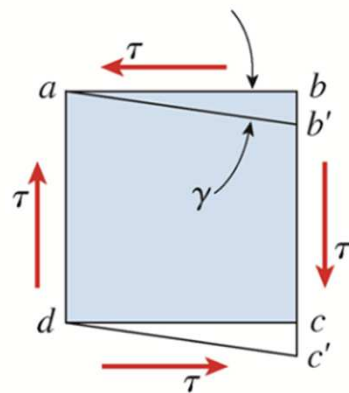
...obtendo-se exatamente a mesma equação que a indicada no cap.2 de Gere & Goodno [3] (ver, alternativamente, a aula #07 de PME-3210).



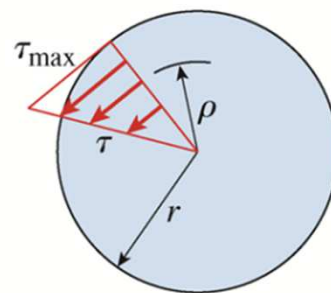
5.2. Barra sob torção pura



(a)



(b)

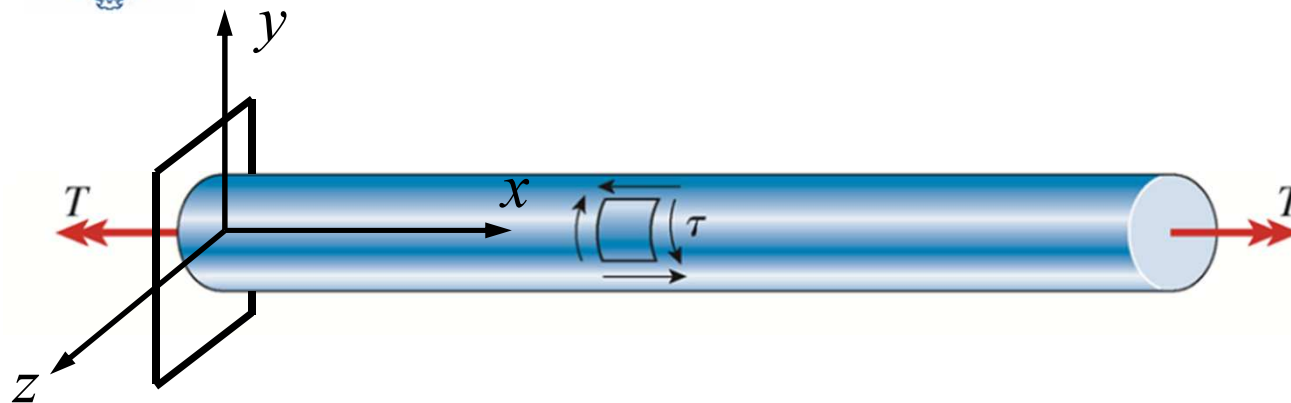


(c)

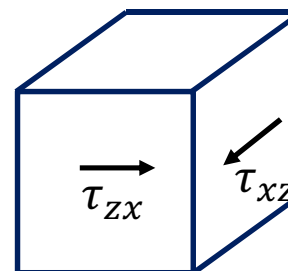
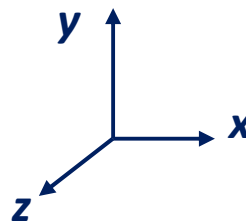
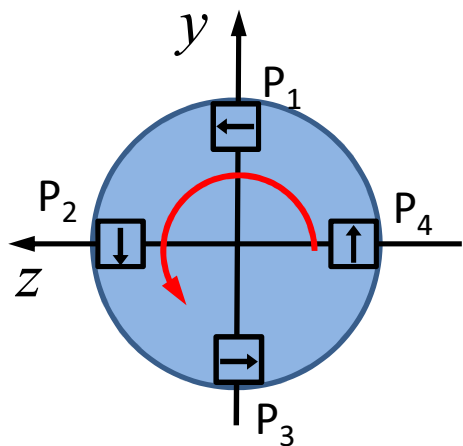
$$\tau_{\text{máx}} = \tau_0 = \frac{T}{I_p} r > 0$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



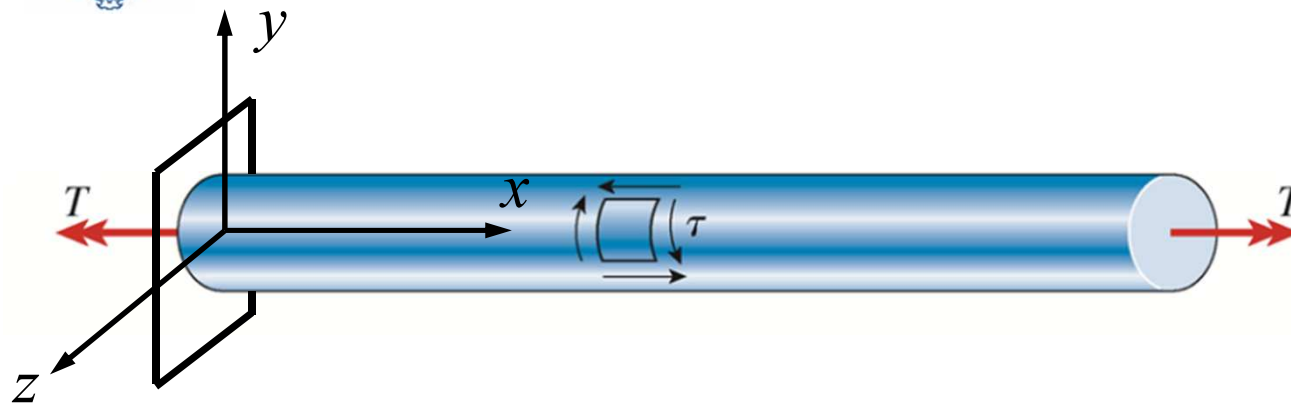
Estado de tensões e tensor das tensões em P_1 :



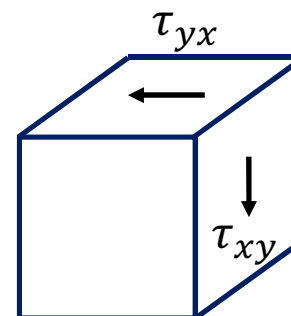
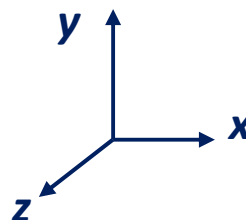
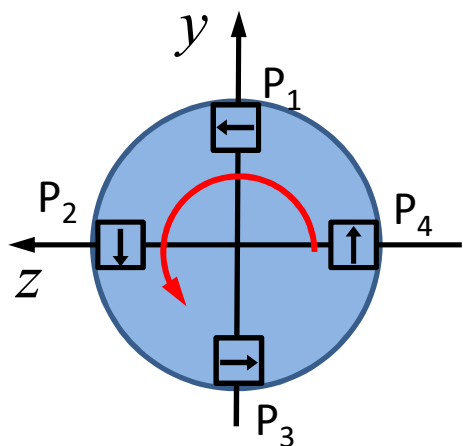
$$[T(P_1)]_b = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



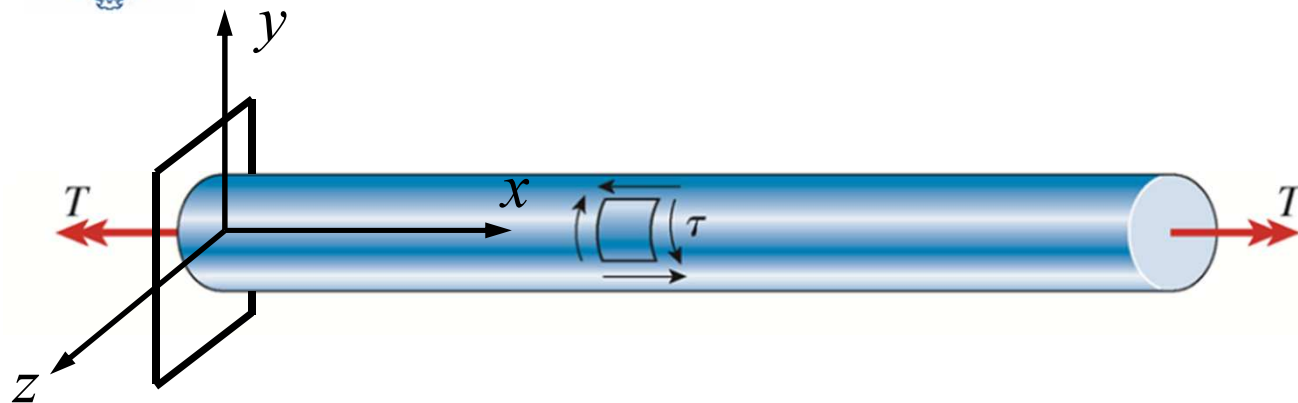
Estado de tensões e tensor das tensões em P_2 :



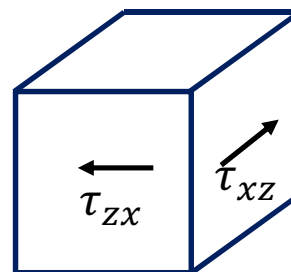
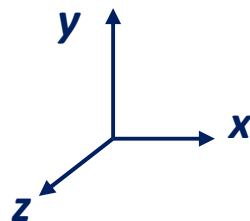
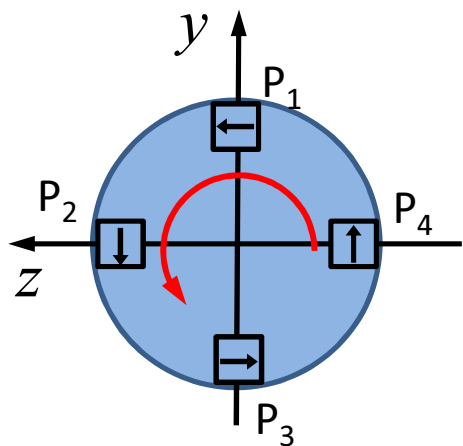
$$[T(P_2)]_b = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\tau_0 & 0 \\ -\tau_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



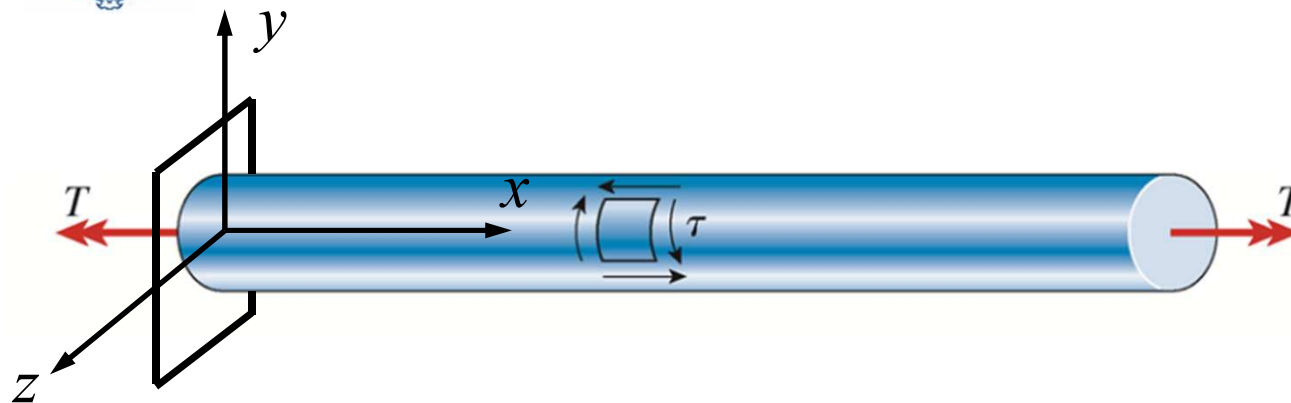
Estado de tensões e tensor das tensões em P_3 :



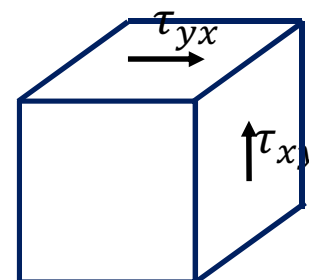
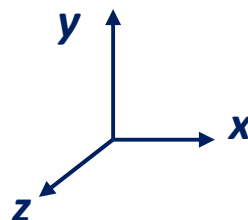
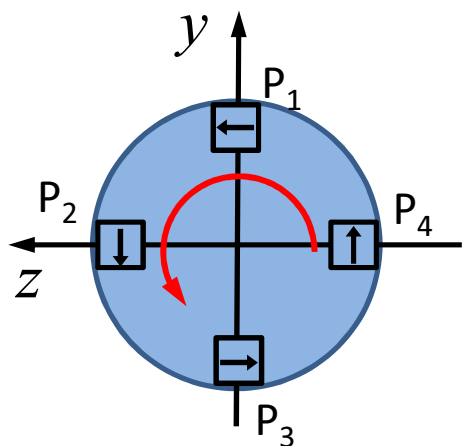
$$[T(P_3)]_b = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\tau_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\tau_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Estado de tensões e tensor das tensões em P_4 :

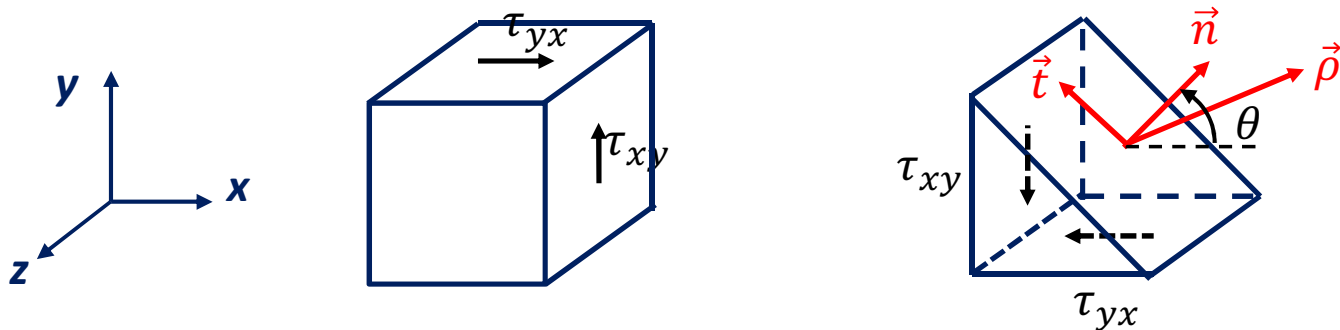


$$[T(P_4)]_b = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_0 & 0 \\ \tau_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Tomando o estado de tensões em P_4 , em particular, determinaremos o vetor tensão e suas componentes em determinados planos inclinados:



Considerando os planos inclinados paralelos ao eixo z , teremos:

$$\vec{n} = \left(\cos\theta, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)_b = (\cos\theta, \sin\theta, 0)_b$$

Logo:

$$\{\vec{\rho}\} = \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_0 & 0 \\ \tau_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_0 \sin\theta \\ \tau_0 \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para obtermos a componente normal (escalar σ) do vetor tensão basta fazer o produto escalar de $\vec{\rho}$ por $\vec{n}$:

$$\sigma = \vec{\rho} \cdot \vec{n} = 2\tau_0 \sin\theta \cos\theta = \tau_0 \sin(2\theta)$$

Para a componente cisalhante (escalar τ), observando que o vetor tensão tem componentes apenas no plano xy e escolhendo como versor tangente ao plano o versor dado por (veja figura no slide anterior):

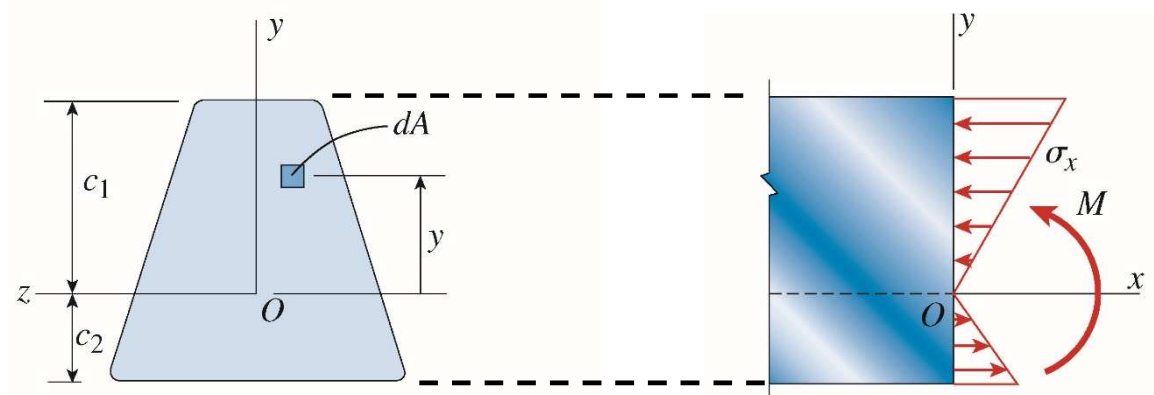
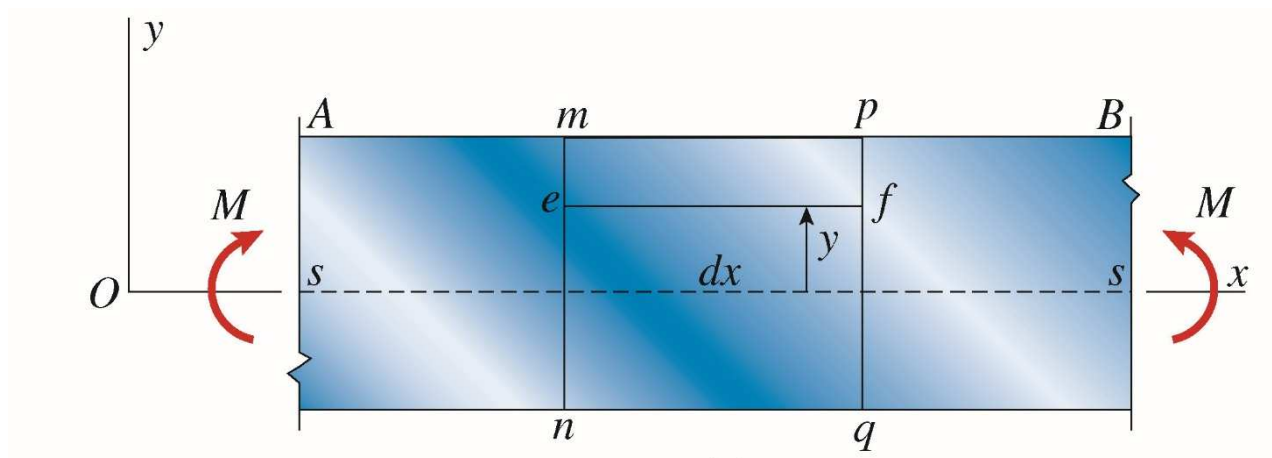
$$\vec{t} = \left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \cos\theta, \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

Teremos:
$$\tau = \vec{\rho} \cdot \vec{t} = -\tau_0 \sin^2\theta + \tau_0 \cos^2\theta = \tau_0 \cos(2\theta)$$

Verifiquem que estes resultados são os mesmos obtidos na aula #11 de PME3210.



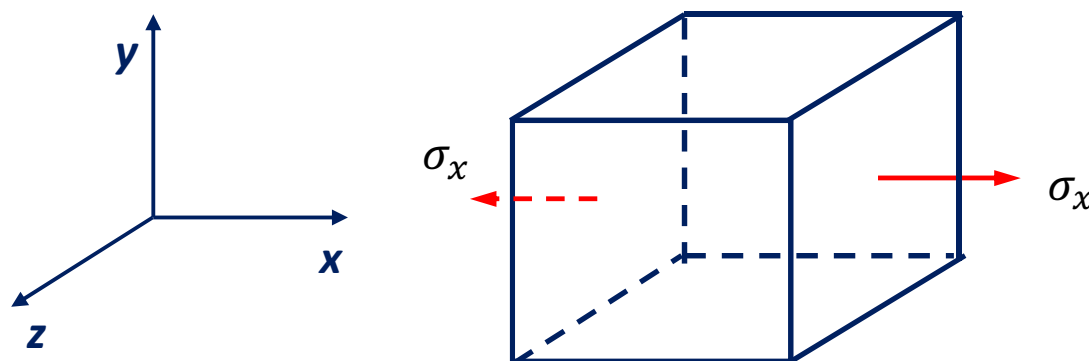
5.3. Barra prismática sob flexão pura





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

O estado de tensão em um ponto da viga sob flexão pura é dado por:



Onde:

$$\sigma_x = -\frac{M}{I_z}y$$

$$[T]_b = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Pontos Importantes:

- O estado de tensões em um dado ponto fica perfeitamente definido conhecendo-se as componentes de tensão em três planos ortogonais, o que permite determinar o tensor das tensões no ponto estudado;
- Dado o tensor das tensões em um dado ponto, é possível determinar facilmente o vetor tensão (e suas componentes) em qualquer plano que passa pelo ponto;
- Como, em geral, o estado de tensões varia de ponto para ponto, temos, para cada ponto, um tensor das tensões próprio (cujas componentes dependem do carregamento aplicado à estrutura e da geometria da estrutura);
- É fundamental saber com qual base de versores, $b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, estamos trabalhando, já que não é possível escrever o tensor das tensões em uma base, e o versor normal em outra base distinta, para obter o vetor tensão.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Tensões, (2020), 66p.
- [2] Popov, E.P. Engineering Mechanics of Solids, 2nd ed., Prentice-Hall, Inc., 1998, 864p.
- [3] Gere, J.M.; Goodno, B.J.; Mecânica dos Materiais, Tradução da 7^a edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p.