Antes de apresentar um algoritmo que dá conta das tarefas acima mencionadas, é necessário mostrar a forma em que o problema deve ser escrito para que o algoritmo possa ser utilizado. Tal forma foi utilizada para a representação geométrica do problema introdutório e é chamado de forma canônica.

5. Forma Canônica

Diz-se que um problema de programação linear na forma padrão, com m equações independentes e n variáveis, $n > m$, está escrito numa forma canônica se:

a) o sistema de equações estiver resolvido para m variáveis, denominadas básicas, em função das outras $(n-m)$ variáveis, denominadas variáveis não básicas; e

b) a função objetivo estiver escrita apenas em termos dessas $(n-m)$ variáveis não básicas (e de uma constante).

Assim, a forma canônica, para um caso genérico, tem a seguinte representação:

Forma Canônica

minimizar z

$$z = z_0 + \sum_j \bar{c}_j^N x_j^N$$

sujeito a restrições:

$$x_1^B + \sum_j \bar{a}_{1j}^N x_j^N = \bar{b}_1$$

$$x_2^B + \sum_j \bar{a}_{2j}^N x_j^N = \bar{b}_2$$

$$x_m^B + \sum_j \bar{a}_{mj}^N x_j^N = \bar{b}_m$$

$$x_i^B \geq 0 \quad , \quad x_j^N \geq 0$$

Nesta notação, x_i^B designa a variável básica da equação i e x_j^N é a variável não básica associada à coluna j do sistema de equações. Para a forma canônica do problema introdutório, mostrada na página 15, x_3 é a variável básica da equação 1, x_4 é a variável básica da equação 2 e x_5 é a variável básica da equação 3; x_1 e x_2 são as variáveis não básicas.

Se $\bar{b}_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, diz-se que a forma canônica é viável. A toda forma canônica está associada uma solução básica, que se obtém, impondo-se $x_j^N = 0$ para todas as variáveis não básicas, com valores resultantes $x_i^B = \bar{b}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, para as variáveis básicas.

Proposição (a ser examinada oportunamente)

Se um problema de programação linear tem solução ótima, ele tem uma solução básica viável ótima.

Esta proposição dá fundamento às inferências informalmente estabelecidas a partir da representação geométrica do exemplo introdutório (candidatos à solução ótima são os vértices da região viável) e posterior associação entre vértices da região viável e soluções básicas viáveis.

6_ O Algoritmo Simplex

O algoritmo simplex determina uma solução básica viável ótima, caso ela exista, a partir de uma forma canônica viável. Sem formalização prévia, o algoritmo será aplicado à resolução do problema introdutório a partir da forma canônica viável da página 15, utilizada para a representação geométrica do problema na página 17. A forma canônica da página 15 é reproduzida a seguir e a representação geométrica é reapresentada na página 28, dado que ela será utilizada para acompanhar as iterações do algoritmo simplex.

Forma Canônica Viável Inicial

minimizar z

$$z = 15 - 7/8\, x_1 - 1/2\, x_2$$

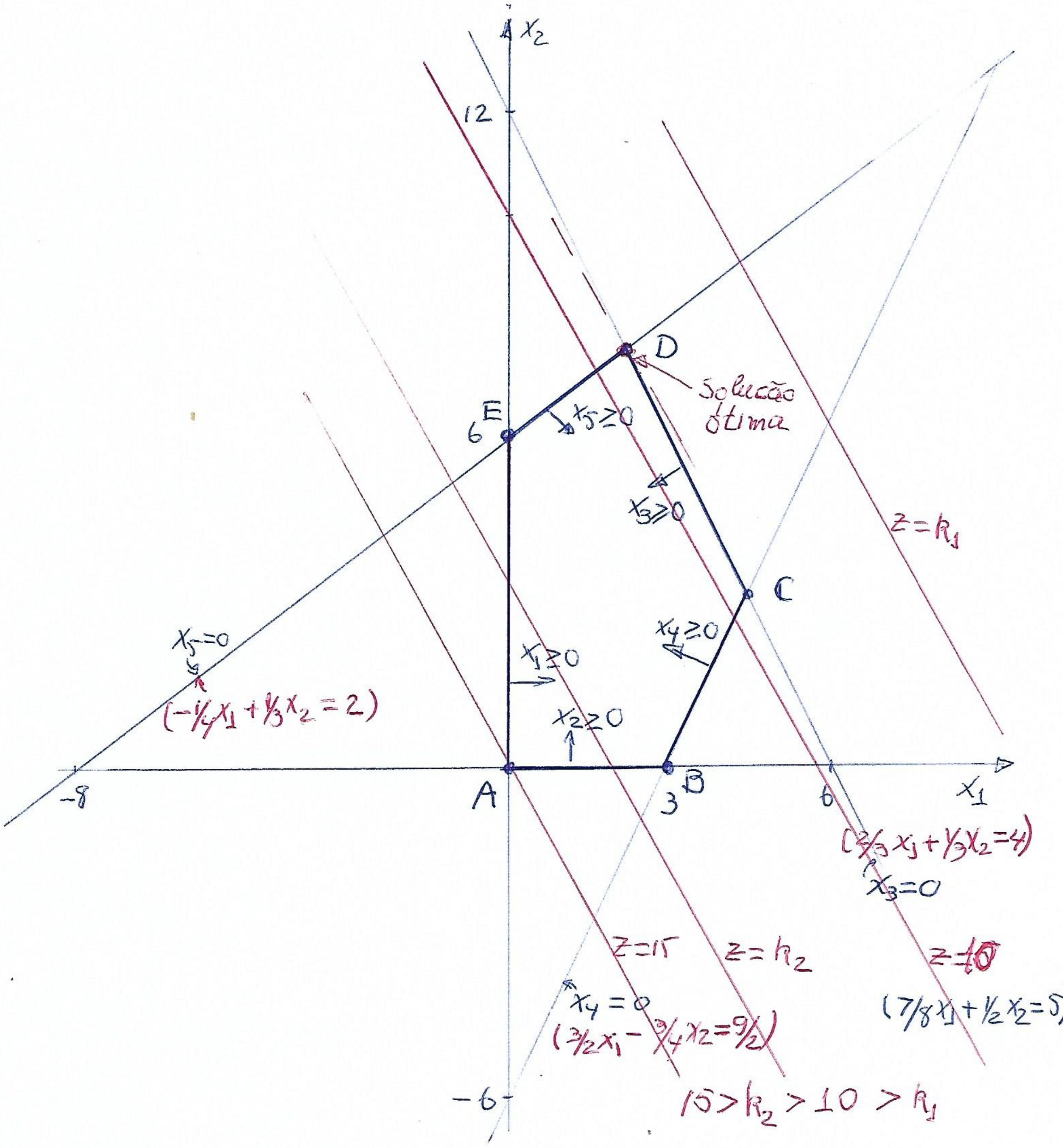
sujeito a restrições

$$\begin{aligned} 2/3\, x_1 + 1/3\, x_2 + x_3 \quad\quad &= 4 \\ 3/2\, x_1 - 3/4\, x_2 \quad\quad + x_4 &= 9/2 \\ -1/4\, x_1 + 1/3\, x_2 \quad\quad + x_5 &= 2 \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, 5$$

Impondo-se valores nulos às variáveis não básicas x_1 e x_2, resultam para as variáveis básicas os valores: $x_3 = 4$, $x_4 = 9/2$ e $x_5 = 2$; e para a função z o valor 15. Convém assinalar que x_3 é a variável básica da primeira equação ($x_1^B = x_3$), x_4 é a variável básica da segunda equação ($x_2^B = x_4$) e x_5 da terceira equação ($x_3^B = x_5$).

Esta solução básica viável corresponde ao vértice A da figura da página 28. Sem recorrer à representação geométrica, é possível afirmar que essa solução básica viável inicial não é ótima, a partir do exame



Representação geométrica do problema no espaço das variáveis independentes x_1 e x_2

da expressão da função objetivo em termos das variáveis não básicas x_1 e x_2. Como os coeficientes de x_1 e x_2 na função z, respectivamente $\bar{c}_1^N$ e $\bar{c}_2^N$, são negativos, qualquer deslocamento do vértice A para outro ponto da região viável, com o aumento dos valores de x_1 e/ou de x_2, provoca a redução do valor de z.

Depois de constatar que a solução básica viável atual não é ótima, cabe buscar uma solução básica viável melhor, correspondente a algum dos outros vértices da região viável. A definição do caminho do vértice A para um vértice adjacente, B ou E, é bem mais simples do que para um vértice não adjacente. Por exemplo, para ir do vértice A para o vértice B, aumenta-se, a partir de zero, o valor da variável não básica atual x_1 e mantém-se com valor nulo a outra variável não básica x_2. (Para ir do vértice A para o vértice E, aumenta-se, a partir de zero, o valor da variável não básica atual x_2 e mantém-se com valor zero a outra variável não básica x_1)

Assim, a primeira escolha está feita: caminhar do vértice viável atual para um vértice viável adjacente melhor (caminhar de uma solução básica viável para uma outra solução básica viável adjacente melhor). Em um problema genérico, com $(n-m)$ variáveis não básicas, aumenta-se, a partir de zero, o valor de uma das variáveis não básicas atuais, com $\bar{c}_j^N < 0$, e as demais $(n-m-1)$ variáveis não básicas atuais continuam com valor nulo.

Como $\bar{c}_1^N = -7/8 < 0$ e $\bar{c}_2^N = -1/2 < 0$, tanto o vértice B ($x_1 > 0$ e $x_2 = 0$) quanto o vértice E ($x_1 = 0$, $x_2 > 0$) corresponde à solução básica viável melhor que aquela associada ao vértice A. Mas qual é o critério para a escolha: aumentar x_1 e manter $x_2 = 0$ ou manter $x_1 = 0$ e aumentar o valor de x_2 ?

Para um aumento unitário no valor de x_1, há uma redução de 7/8 no valor da função z enquanto que, para um aumento unitário no valor de x_2, a redução no valor de z é menor, 1/2. É possível, porém, contra-argumentar que é possível aumentar o valor de x_2 até 6 enquanto que o valor de x_1 pode chegar apenas até 3. E, assim, a combinação dos dois fatores, faz com que o vértice E seja melhor do que o vértice B.

Tendo em vista o conhecimento prévio de que a solução ótima é o vértice D, haveria outra justificativa, neste caso, para a escolha do vértice E: número menor de iterações para se chegar à solução ótima.

No entanto, a decisão que se toma no algoritmo simplex fica restrita à comparação entre os valores dos $\bar{c}_j^N < 0$, escolhendo-se o mínimo entre eles, no caso $\bar{c}_1^N = -7/8$.

Este critério se justifica, para um problema genérico, com $(n-m)$ variáveis não básicas, pelos seguintes motivos. Em primeiro lugar, é simples, depende apenas dos coeficientes $\bar{c}_j^N$ da forma canônica da função objetivo z, sem requerer cálculos adicionais. Por sua vez, determinar qual é o aumento possível, a partir de zero, de uma variável não básica, com $\bar{c}_j^N < 0$, mantidas as demais variáveis não básicas com valor nulo, pode exigir até m divisões. Assim, em uma instância de grande porte, em que o número de variáveis não básicas com $\bar{c}_j^N < 0$ seja elevado, determinar qual é o melhor vértice adjacente viável (qual é a melhor solução básica viável) pode exigir um esforço computacional relevante. Além disto, experimentos computacionais comprovam que a adoção do critério $\min\{\bar{c}_j^N < 0\}$ conduz a bom desempenho computacional.

Estabelecido o critério de escolha e voltando ao problema introdutório, representado na forma canônica associada ao vértice viável A,

$$\min\{\bar{c}_j^N < 0\} = \min\{\bar{c}_1^N, \bar{c}_2^N\} =$$

$$= \min\{-7/8, -1/2\} = -7/8$$

Assim, escolhe-se aumentar o valor de x_1, mantendo-se x_2 com valor nulo. Quanto mais crescer x_1, maior vai ser a redução do valor da função objetivo z. O limite deste crescimento está definido pela viabilidade da nova solução; quando x_1 aumenta (e $x_2 = 0$) os valores das variáveis básicas atuais são alterados de acordo com as seguintes expressões:

$$x_3 = 4 - 2/3\, x_1$$

$$x_4 = 9/2 - 3/2\, x_1 \qquad (*)$$

$$x_5 = 2 + 1/4\, x_1.$$

Para que a nova solução seja viável, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$ e $x_5 \geq 0$, com as seguintes implicações:

$x_3 \geq 0 \Rightarrow 4 - 2/3\, x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \frac{4}{2/3} = 6$

$x_4 \geq 0 \Rightarrow 9/2 - 3/2\, x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \frac{9/2}{3/2} = 3$

$x_5 \geq 0 \Rightarrow 2 + 1/4\, x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \geq 0$

Constata-se, portanto, que o limite para o crescimento de x_1 é o valor 3, acima do qual a variável x_4 teria valor negativo. Observa-se também que a não negatividade de x_5 não impôs restrição ao crescimento de x_1 pois o coeficiente de x_1 na terceira equação da forma canônica, da qual x_5 é a variável básica, é negativo.

Examinando-se a forma canônica genérica da página 25, conclui-se que as 3 equações (*) da página 32 têm a expressão genérica

$$x_i^B = \bar{b}_i - \bar{a}_{i1}^N\, x_1$$

e que o limite para o crescimento pode ser expresso por:

$$\min_{\bar{a}_{i1}^N > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}^N} \right\}$$

Nesta primeira iteração para o exemplo introdutório, escolhe-se, primeira, x_1 para se tornar variável básica pois

$$\min\{\bar{c}_j^N < 0\} = \bar{c}_1^N = -7/8$$

e, depois, para garantir a viabilidade da nova solução, o limite para o crescimento de x_1 é dado por

$$\min_{\bar{a}_{i1}^N > 0}\{\bar{b}_i / \bar{a}_{i1}^N\} = \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{21}^N} = \frac{9/2}{3/2} = 3$$

o que implica que a variável básica da equação 2, ou seja x_4, atinge o valor zero quando x_1 assume o valor 3. Desta forma, na próxima solução básica viável deixa de ser básica, cedendo o lugar de variável básica da equação 2 para x_1.

O passo seguinte, para que a otimalidade da nova solução possa ser examinada, é obter a forma canônica referente às variáveis básicas, x_3, x_1 e x_5, nesta ordem. Para tanto basta aplicar o método Gauss-Jordan de forma que x_1 passe a ter coeficiente 1 na equação 2 e coeficiente zero nas demais equações, inclusive na equação da função objetivo z. Para tanto, é conveniente reescrever a forma canônica atual (vide página 27) como segue:

minimizar z

$$
\begin{aligned}
-z \; - \tfrac{7}{8}x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 \qquad\qquad\qquad &= -15 \\
\tfrac{2}{3}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 4 \\
\tfrac{3}{2}x_1 - \tfrac{3}{4}x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 9/2 \\
-\tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 2
\end{aligned}
$$

$$x_j \geq 0$$

Sendo $\bar{a}''_{21} = \frac{3}{2}$, coeficiente de x_1 na equação 2, o pivô do método Gauss Jordan de eliminação e aplicando as expressões da página 12, obtém-se a seguinte forma canônica para as variáveis básicas x_3, x_1 e x_5:

minimizar z

$$
\begin{aligned}
-z \qquad - \tfrac{15}{16}x_2 \qquad + \tfrac{7}{12}x_4 \qquad &= -99/8 \\
\tfrac{2}{3}x_2 + x_3 - \tfrac{4}{9}x_4 \qquad &= 2 \\
x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 \qquad + \tfrac{2}{3}x_4 \qquad &= 3 \\
\tfrac{5}{24}x_2 \qquad + \tfrac{1}{6}x_4 + x_5 &= 11/4
\end{aligned}
$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, \dots, 5$$

A essa forma canônica, impondo-se valor nulo para as variáveis não básicas x_2 e x_4, são obtidos para as variáveis basicas os valores: $x_3 = 2$; $x_1 = 3$; e $x_5 = 11/4$ e para a função objetivo o valor $z = 99/8$.

Esta solução básica viável também não é ótima pois o coeficiente da variável não básica x_2 na função objetivo, $\bar{c}_2^N$, é negativo - $\bar{c}_2^N = -15/16$; como o coeficiente da outra variável não básica é positivo, $\bar{c}_4^N = 7/12$, é a variável x_2 que deve se tornar básica. Quando x_2 cresce a partir de zero, enquanto x_4 permanece com valor nulo, os valores das variáveis básicas atuais são alterados de acordo com as expressões:

$$x_3 = 2 - 2/3\, x_2$$
$$x_1 = 3 + 1/2\, x_2$$
$$x_5 = 11/4 - 5/24\, x_2$$

Para a viabilidade da nova solução, é necessário impor limite para o crescimento de x_2 de modo que nenhuma das variáveis básicas atuais assuma valor negativo. Como o coeficiente de x_2 na equação z da forma canônica, na qual x_1 é variável básica, tem valor negativo, a restrição $x_1 \geq 0$ não impõe limite ao crescimento de x_2. Para a não negatividade da variável básica da primeira equação, $x_1^B = x_3$, o limite é $x_2 \leq \frac{2}{2/3} = 3$, enquanto que, para a não negatividade de x_5, o limite é

$$x_2 \leq \frac{11/4}{5/24} = 66/5$$

Desta forma, é a variável x_3 que se anula primeiro quando x_2 cresce sobre a reta $x_4 = 0$. Logo, x_3 vai ceder a x_2 o lugar de variável básica da primeira equação, x_1^B, na próxima forma canônica. A exemplo da primeira iteração, é necessário aplicar o método Gauss-Jordan tendo como pivô o coeficiente de x_2 na primeira equação do sistema, ou seja $\bar{a}_{12}^N = 2/3$, a fim de se obter a nova forma canônica.

A esta altura cabe introduzir a tabela utilizada para o algoritmo simplex (sem deixar de mencionar que há variantes em relação a que será adotada nesta disciplina). Na tabela são apresentados os coeficientes das variáveis e os termos independentes da forma canônica. Há uma coluna inicial que informa o nome da variável que somente aparece naquela equação. Na primeira linha aparece sempre $-z$; a seguir aparece o nome de quem é a variável básica da primeira equação do sistema, depois o nome da variável básica da segunda equação do sistema e, assim sucessivamente.

As Tabelas 1, 2, 3 e 4, apresentadas a seguir, ilustram a aplicação do algoritmo simplex para a determinação da solução básica viável ótima do problema introdutório, partindo da forma canônica viável referente às variáveis básicas x_3, x_4 e x_5.

Tabela 1 - Primeira Solução Básica Viável (Vértice A)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
$-z$	$-7/8$	$-1/2$				-15	
x_3	$2/3$	$1/3$	1			4	$\frac{4}{2/3} = 6$
x_4	$3/2$	$-3/4$		1		$9/2$	$\frac{9/2}{3/2} = 3$
x_5	$-1/4$	$1/3$			1	2	

Solução básica viável correspondente à Tabela 1:

Variáveis não básicas: $x_1 = x_2 = 0$

Variáveis básicas: $x_3 = 4$, $x_4 = 9/2$, $x_5 = 2$

Função objetivo: $z = 15$

Tabela 2 - Segunda Solução Básica Viável (Vértice B)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
$-z$		$-15/16$		$7/12$		$-99/8$	
x_3		$2/3$	1	$-4/9$		2	$\frac{2}{2/3} = 3$
x_1	1	$-1/2$		$2/3$		3	
x_5		$5/24$		$1/6$	1	$11/4$	$\frac{11/4}{5/24} = \frac{66}{5}$

Variáveis não básicas: $x_2 = x_4 = 0$

Variáveis básicas: $x_2 = 2$, $x_1 = 3$, $x_5 = 11/4$ $\quad z = 99/8$

Tabela 3 - Terceira Solução Básica Viável (Vértice C)

-z			45/32	- 1/24		-153/16
X_2		1	3/2	-2/3		3
X_1	1		3/4	1/3		9/2
x_5			-5/16	11/36	1	51/24
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	

$\frac{9/2}{1/3} = \frac{27}{2}$

$\frac{51/24}{11/36} = \frac{153}{22}$

Solução básica viável correspondente à Tabela 3

Variáveis não básicas: $x_3 = x_4 = 0$

Variáveis básicas: $x_2 = 3$, $x_1 = 9/2$, $x_5 = 51/24$

Função objetivo: $z = 153/16$

Tabela 4 - Quarta Solução Básica Viável (Vértice D)
Solução Ótima (não há $\bar{c}_j < 0$)

-z			30/22		3/22	-102/11
X_2		1	9/11		24/11	84/11
X_1	1		12/11		-12/11	24/11
x_4			-45/44	1	36/11	153/22
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	

Solução básica viável ótima correspondente à Tabela 4

Variáveis não básicas: $x_3 = x_5 = 0$

Variáveis básicas: $x_2 = 84/11$, $x_1 = 24/11$, $x_4 = 153/22$

Função objetivo: $z = 102/11$

Uma vez resolvido o problema introdutório utilizando o algoritmo simplex, cabe agora formalizar o algoritmo.

Ponto de Partida

Seja dada uma forma canônica viável para o problema a ser resolvido:

minimizar z

$$z = z_0 + \sum_j \bar{c}_j^N x_j^N$$

ou

$$\left(-z + \sum_j \bar{c}_j^N x_j^N = -z_0 \right)$$

sujeito a restrições

$$\begin{aligned} x_1^B \quad + \sum_j \bar{a}_{1j}^N x_j^N &= \bar{b}_1 \\ x_2^B \quad + \sum_j \bar{a}_{2j}^N x_j^N &= \bar{b}_2 \\ \ddots \quad &\ \vdots \\ x_m^B + \sum_j \bar{a}_{mj}^N x_j^N &= \bar{b}_m \end{aligned}$$

$$x_i^B \geq 0, \quad x_j^N \geq 0$$

com $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m \geq 0$, caracterizando a viabilidade da forma canônica

<u>Passo 1</u> Exame da otimalidade da solução básica viável atual

Para a solução básica viável atual, impõe-se na forma canônica acima $x_j^N = 0$ para toda variável não básica, resultando: $z = z_0$ e $x_i^B = \bar{b}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Tendo em vista que:

i) na forma canônica, z é função somente das variáveis não básicas;

ii) todas as variáveis não básicas têm valor nulo na solução básica viável atual; e

iii) não podem assumir valores negativos,

conclui-se que qualquer movimento viável implica o aumento do valor de pelo menos uma variável não básica e que, se não houver nenhum $\bar{c}_j^N < 0$, não será possível encontrar para a função objetivo valor menor que o valor atual z_0. Isto é, a solução básica viável atual é ótima se não houver nenhum $\bar{c}_j^N < 0$. Fim da busca. Em caso contrário, vá para o Passo 2

<u>Passo 2</u> Busca de uma solução básica viável melhor que a atual

Quando há diversas variáveis não básicas com coeficiente $\bar{c}_j^N < 0$, haveria um apelo para aumentar simultaneamente os valores de algumas variáveis não básicas com a finalidade de obter uma grande redução da função objetivo em uma única iteração. No entanto, a dificuldade de estabelecer, em tal caso, o caminho que leva a um novo vértice viável (nova solução básica viável) desestimula esta opção. Prevalece a decisão de caminhar ao longo de uma aresta (de um lado), que sai do vértice atual, em busca do vértice adjacente. Em tal movimento, há o aumento do valor de uma única variável não básica; as demais variáveis continuam com valor nulo.

Definido, a priori, o tipo de movimento em busca de uma nova solução básica viável, cabe agora decidir, primeiro, qual é a variável não básica cujo valor se pretende aumentar, a partir de zero, de modo que se torne variável básica na próxima solução básica viável, e, depois, qual das variáveis básicas atuais deixará de ser básica. A primeira escolha está associada à melhoria da solução viável atual e a segunda à garantir a viabilidade da nova solução.

2.1 Escolha da variável não básica atual que se tornará básica.

A escolha é simples, levando em conta apenas a contribuição que o aumento unitário do valor desta variável tem na redução do valor da função objetivo. Não há a preocupação em examinar qual seria o melhor vértice adjacente ao atual, procedimento que exigiria um trabalho computacional relevante para instâncias de grande porte.

Portanto, o critério de escolha é:

$$\text{determine} \quad \min \{\bar{c}^N_j < 0\} = \bar{c}^N_k$$

A variável não básica atual x^N_k é escolhida para se tornar básica.

2.2 Definição da variável básica atual que deixará de ser básica

Quando o valor da variável x_k cresce a partir de zero e mantidos nulos os valores das demais variáveis não básicas, os valores das variáveis básicas atuais são alterados de acordo com a expressão:

$$x^B_i = \bar{b}_i - \bar{a}^N_{ik} x_k$$

Como é necessário manter cada $x^B_i \geq 0$, o crescimento da variável x_k fica sujeito a restrições em que $\bar{a}^N_{ik} > 0$. Há dois casos a serem examinados quanto à existência de coeficientes $\bar{a}^N_{ik} > 0$

<u>Caso a</u>

Há pelo menos um $\bar{a}^N_{ik} > 0$. Neste caso, o limite superior θ para o crescimento de x_k é calculado da seguinte forma:

$$\theta = \min_{\bar{a}^V_{ik}>0} \left\{ \bar{b}_i / \bar{a}^V_{ik} \right\} = \bar{b}_r / \bar{a}^V_{rk} \quad (*)$$

A variável da equação r, x^B_r, assume valor zero, quando x_k assume valor θ, e deixa de ser básica. Na próxima solução básica viável, a variável básica da equação r será x_k.

Admita-se que haja um empate na expressão (*) acima; isto é

$$\theta = \min_{\bar{a}^V_{ik}>0} \left\{ \bar{b}_i / \bar{a}^V_{ik} \right\} = \bar{b}_r / \bar{a}^V_{rk} = \bar{b}_s / \bar{a}^V_{sk}$$

Em tal situação, as variáveis básicas das equações r e s assumem valor nulo quando x_k assume valor θ. Uma delas deixará de ser básica e a outra continuará sendo básica, agora com valor zero; a escolha de qual deixará de ser básica é arbitrária. Por ter uma variável básica com valor zero, a nova solução básica é chamada de degenerada. Vá para o Passo 3

Caso b

Não há na coluna da variável x^N_k nenhum $\bar{a}^V_{ik} > 0$, $i = 1, \dots, m$; todos $\bar{a}^V_{ik} \le 0$. Nesta situação, examinando-se a equação

$$x^B_i = \bar{b}_i - \bar{a}^V_{ik} x_k$$

conclui-se que não há limite superior para o crescimento de x_k. Assim, a viabilidade $x_i^B \geq 0$ é mantida quando $x_k \to \infty$, situação em que a função objetivo tende a $-\infty$. Diz-se, em tal caso, que a função objetivo é ilimitada inferiormente na região viável e que o problema de programação linear <u>não tem solução ótima</u>. <u>Fim da busca</u>

<u>Passo 3</u> Obtenção da forma canônica correspondente à nova solução básica viável.

Aplica-se o método de Gauss-Jordan para a forma canônica atual, de modo que x_k passe a ser variável básica da equação r, tendo coeficiente 1 nesta equação e coeficiente zero nas demais, inclusive na equação da função objetivo. O pivô do método Gauss-Jordan é o coeficiente $\bar{a}_{rk}^N$ situado na intersecção da coluna da variável que vai se tornar básica com a linha em que houve mudança de variável básica.

<u>Passo 4</u>

Volte ao Passo 1

7- Soluções Básicas Degeneradas e Ótimos Alternativos

Com a finalidade de examinar o efeito da ocorrência de soluções básicas degeradas e a existência de mais de uma solução ótima, considere-se o seguinte problema:

maximizar L

$$L = 5x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4$$

sujeito a restrições

$$5x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 10x_4 \leq 80.000$$

$$1x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 5x_4 \leq 100.000$$

$$5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 60.000$$

$$x_j \geq 0 \, , \; j = 1, \ldots, 4$$

Colocando o problema numa forma padrão correspondente:

minimizar z

$$z = -5x_1 - 4x_2 - 8x_3 - 6x_4$$

$$5x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 10x_4 + x_5 = 80.000$$

$$1x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 5x_4 + x_6 = 100.000$$

$$5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 + x_7 = 60.000$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, 7$$

Observe-se que a forma padrão obtida é uma forma canônica viável para as variáveis básicas x_5, x_6 e x_7. A solução básica viável correspondente é obtida, impondo-se valor zero para as variáveis não básicas x_1, x_2, x_3 e x_4, do que resulta para as variáveis básicas os valores $x_5 = 80.000$, $x_6 = 100.000$ e $x_7 = 60.000$, e para a função objetivo z o valor zero.

A partir desta forma canônica viável, é possível aplicar o algoritmo simplex a fim de obter a solução ótima do problema. As tabelas I, II, III e IV mostram as iterações do algoritmo. Na primeira iteração, a variável x_3 é selecionada para se tornar básica, pois $\bar{c}_3^N = \min\{\bar{c}_j^N < 0\} = -8$, e há um empate na escolha da variável que deixará de ser básica pois

$$\min_{\bar{a}_{i3}^N > 0} \{ \bar{b}_i / \bar{a}_{i3}^N \} = \bar{b}_2 / \bar{a}_{23}^N = \bar{b}_3 / \bar{a}_{33}^N =$$

$$= 10.000$$

Assim, é possível escolher tanto a variável básica da equação 2, x_6, quanto a variável básica da equação 3, x_7, para deixar de ser básica. Optou-se, arbitrariamente, por manter x_7 como variável básica, que terá na próxima tabela valor nulo igual ao ~~d~~ x_6.

TABELA I

$-z$	-5	-4	-8	-6				0	
x_5	5	1	5	10	1			80.000	$80.000/5 = 16.000$
x_6	1	4	10	5		1		100.000	$100000/10 = 10.000$
x_7	5	3	6	5			1	60.000	$60.000/6 = 10.000$
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		

Solução básica viável

VNB: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

VB: $x_5 = 80.000$, $x_6 = 100.000$, $x_7 = 60.000$

$z = 0$

TABELA II

$-z$	$-42/10$	$-8/10$		-2		$4/5$		80.000	
x_5	$45/10$	-1		$75/10$	1	$-5/10$		30.000	$\frac{30.000}{45/10}$
x_3	$1/10$	$4/10$	1	$5/10$		$1/10$		10.000	$\frac{10.000}{1/10}$
x_7	$44/10$	$6/10$		2		$-6/10$	1	0	$0/(44/10) = 0$
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		

Solução básica viável

VNB: $x_1 = x_2 = x_4 = x_6 = 0$

VB: $x_5 = 30.000$, $x_6 = 10.000$, $x_7 = 0$

$z = -80.000$

TABELA III

$-z$		$-5/22$		$-2/22$		$5/22$	$21/22$	80.000
x_5		$-71/44$		$120/22$	1	$5/44$	$-45/44$	30.000
x_3		$17/44$	1	$10/22$		$5/44$	$-1/44$	10.000
x_1	1	$3/22$		$10/22$		$-3/22$		0
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	

$0/(3/22) = = 0$

Solução básica viável

VNB $x_2 = x_4 = x_6 = x_7 = 0$

VB $\begin{cases} x_5 = 30000 \\ x_3 = 10000 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ $z = -80000$

TABELA IV

$-z$	$5/3$			$2/3$		0	$4/3$	80000
x_5	$71/6$			$65/6$	1	$-3/2$	$5/3$	30.000
x_3	$-17/6$		1	$-5/6$		$1/2$	$-2/3$	10.000
x_2	$22/3$	1		$10/3$		-1	$5/3$	0
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	

Solução básica viável <u>ótima</u>

VNB: $x_1 = x_4 = x_6 = x_7 = 0$

VB $\begin{cases} x_5 = 30.000 \\ x_3 = 10.000 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $z = -80.000$

Na segunda iteração, escolhe-se x_1 para se tornar variável básica por $\min\{\bar{c}_j^N < 0\} = \bar{c}_1^N = -42/10$. Ocorre, porém, que o limite para o crescimento de x_1 a partir de zero é igual a

$$\min_{\bar{a}_{i1}^N > 0}\{\bar{b}_i/\bar{a}_{i1}^N\} = \bar{b}_3/\bar{a}_{31}^N = 0/(24/3) = 0$$

Isto e, x_1 se torna variável básica com valor zero; por sua vez, x_7 que era variável básica, com valor zero, deixa de ser variável básica.

Observe-se que as duas tabelas II e III correspondem a um mesmo vértice x; de fato:

$$(x^{II})^T = (x^{III})^T = [0, 0, 10.000, 0, 30.000, 0, 0]$$

Por isto, na segunda iteração do algoritmo simplex não houve redução da função objetivo. A explicação para esses fatos está no critério para garantia da viabilidade da nova solução básica:

$$x_k \le \min_{\bar{a}_{ik}^N > 0}\{\bar{b}_i/\bar{a}_{ik}^N\}$$

Assim, quando há uma variável básica com valor igual a zero, por exemplo $x_r^B = \bar{b}_r = 0$, e na equação r $\bar{a}_{rk}^N > 0$, então x_k se tornará básica com valor zero. O pretendido crescimento de x_k, em busca de um novo vértice viável, fica frustrado e se permanece no mesmo vértice. Tal fenômeno somen ocorre quando há solução básica para a qual uma ou mais variáveis básicas assumem valor nulo - são as assim chamadas soluções básicas degeneradas. Em uma solução básica, todas as variáveis não básicas têm valor zero, enquanto que os valores das variáveis básicas são calculados por:

$$x^B = B^{-1}b = \bar{b}$$

em que B é a matriz formada pelas colunas das variáveis básicas e b é o vetor dos termos independentes no sistema de equações $Ax = b$.

Generalizando o que foi observado nesse problema, se, em um sistema de m equações independentes, o número de variáveis positivas em um vértice for menor que m, então a este vértice estarão associadas duas ou mais soluções básicas (duas ou mais formas canônicas).

Na terceira iteração, escolhe-se x_2 para se tornar variável básica, pois $\bar{c}_2^N = \min\{\bar{c}_j^N < 0\} = -5/22$. Mas, a exemplo do que ocorreu com x_j na iteração anterior, x_2 torna-se variável básica com valor zero. Assim, também na tabela IV, o vértice X é o mesmo da tabela II mas agora se constata que a solução básica viável é ótima, pois não há $\bar{c}_j^N < 0$.

Há ainda um outro ensinamento a ser apropriado com este exemplo. Observe-se que, na tabela IV corres pondente a uma solução básica viável ótima, a variável não básica x_6 tem coeficiente $\bar{c}^N_6 = 0$. Isto significa que, se a variável x_6 crescer a partir de zero, enquanto as demais variáveis não básicas (x_1, x_4 e x_7) continuam com valor nulo, não há mudança no valor da função objetivo z, pois

$$z = -80.000 + \bar{c}^N_6 x_6 = -80.000$$

Como na coluna de x_6, na Tabela IV, $\bar{a}^N_{16} = -3/2 < 0$ e $\bar{a}^N_{33} = -1 < 0$, o limite do crescimento de x_6 é igual a

$$\frac{\bar{b}_2}{\bar{a}^N_{26}} = \frac{10.000}{1/2} = 20.000$$

e a variável básica atual da segunda equação, x_3, cederá seu lugar a x_6 na solução básica viável mostrada na Tabela V. Observe-se que, além das duas soluções básicas viáveis ótimas correspondentes às tabelas IV e V, há infinitas soluções não básicas ótimas, para valores $x_6 = \theta$ no intervalo $(0, 20.000)$, para os quais:

$$x_5 = 30.000 + 3/2\,\theta$$
$$x_3 = 10.000 - 1/2\,\theta$$
$$x_2 = 0 + \theta$$

É importante deixar claro que as iterações do simplex terminaram com a obtenção da solução básica viável ótima mostrada na Tabela IV. Por isto, a Tabela IV é reproduzida aqui para ilustrar a busca da solução básica alternativa ótima apresentada na Tabela V.

TABELA IV

$-z$	$5/3$			$2/3$		0	$4/3$	80.000
x_5	$71/6$			$65/6$	1	$-3/2$	$5/3$	30.000
x_3	$-17/6$		1	$-5/6$		$1/2$	$-2/3$	10.000
x_2	$22/3$	1		$10/3$		-1	$5/3$	0

TABELA V

$-z$	$5/3$		0	$2/3$			$4/3$	80.000
x_5	$10/3$		3	$25/3$	1		$-1/3$	60.000
x_6	$-17/3$		2	$-5/3$		1	$-4/3$	20.000
x_2	$5/3$	1	2	$5/3$			$1/3$	20.000
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	

Solução básica viável ótima alternativa

VNB: $x_1 = x_3 = x_4 = x_7 = 0$

VB $\begin{cases} x_5 = 60.000 \\ x_6 = 20.000 \\ x_2 = 20000 \end{cases}$ $z = -80.000$