ZAB0161 - Álgebra linear com aplicações em geometria analítica

Nome do aluno:	NOTA:
Número USP:	**Prova P3 (X1). Data: 15/07/2023**

Justifique as respostas. Colocar na prova toda conta necessária para chegar na solução.

1. Dois dos vértices de um polígono regular de quatro lados coincidem com os focos da elipse $9x^2 + 5y^2 = 1$ e os outros dois com os vértices do eixo menor da elipse. Calcular a área do polígono.
   Resposta: O polígono é um quadrilátero formado por dois triângulos.
   A base (ou altura) é a distância focal, e a altura (ou base) é o semi-eixo menor da elipse.
   Sabemos que $b^2 = \frac{1}{9}$, então $b = \frac{1}{3}$.
   Observar que $a^2 = \frac{1}{5}$, então $a = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
   A distância focal é $c^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}$, então $c = \frac{2\sqrt{5}}{45}$.
   Assim: $Area = \frac{4\sqrt{5}}{45}$ unidades quadradas.

2. Determine os autovalores e os autovetores (se existem) da matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + 4I$$

   I é a matriz identidade de ordem 2×2.
   Resolução:
   $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$. Equação característica $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$
   Então $(4-\lambda)^2 - 16 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda = 0$. Logo $\lambda = 0$ e $\lambda = 8$.
   Para os autovetores se resolve
   $\begin{bmatrix} 4 & 4 & | & 0 \\ 4 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$, então $x + y = 0$, autovetor $v_1 = (1, -1)$.
   $\begin{bmatrix} -4 & 4 & | & 0 \\ 4 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$, então $x - y = 0$, autovetor $v_2 = (1, 1)$.

3. Identifique a quádrica diagonalizando a seguinte equação quadrática

$$8zx + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8$$

   Escreva a matriz P de autovetores ortogonais e unitários.
   Solução:
   Autovalores: $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = 2$. Observar que é um hiperbolóide de uma folha.
   Autovetores: $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (-1, 0, 1)$ e $v_3 = (0, 1, 0)$. Todos são ortogonais, basta multiplicar pela inversa de sua medida e montar a matriz P com esses vetores como coluna na ordem dada.

4. Considere a elipse com vértices em $(-4,-3)$ e $(4,3)$ e com semi-eixo menor igual a 2. Determine o centro, os vértices e a equação da elipse.
Resolução: Por dado $b=2$. Observar que os vértices dados são os vértices maiores, pois
$d(V_1,V_2)=\sqrt{(4-(-4))^2+(3-(-3))^2}=\sqrt{100}=10$, que não é igual a $2b=4$. Então $a=5$.
O centro é o ponto médio entre os vértices $C=(0,0)$ que é a origem. Logo não é necessária translação.
Como $c^2=a^2-b^2$, então $c=\sqrt{21}$.
O eixo focal passa pelos vértices com vetor direção $v=\frac{1}{5}(4,3)$, daqui temos que existe uma rotação de um ângulo $-\alpha$ (pois o eixo focal deve rotar de forma horária para ser horizontal).
O cálculo dos vértices menores não precisa da equação:
$B_1=C-bv^{\perp}=(5,7)-2\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{31}{5},\frac{27}{5}\right)$ e $B_2=(\frac{19}{5},\frac{43}{5})$.
Os vértices maiores foram dados.
Para obter a equação precisamos da equação canônica como partida. Chamando $\bar{X}$ o eixo focal e $\bar{Y}$ o eixos ortogonal passando pelo centro. Nesses eixos é válida a equação canônica

$$\frac{\overline{x}^2}{25}+\frac{\overline{y}^2}{4}=1$$

Como não tem translação podemos passar com as fórmulas de rotação para XY.
Pelo vetor direção unitário temos o coseno e seno da rotação entre $\bar{X}\bar{Y}$ e XY: $cos(\alpha)=\frac{4}{5}$, $seno(\alpha)=\frac{3}{5}$.
Como mudança de variável se escreve: $\left\{\begin{array}{c}\bar{x}=cos(\alpha)x+sen(\alpha)y\\ \bar{y}=-sen(\alpha)x+cos(\alpha)y\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}\bar{x}=\frac{1}{5}(4x+3y)\\ \bar{y}=\frac{1}{5}(-3x+4y)\end{array}\right.$
Substituindo na equação canônica:

$$4\overline{x}^2+25\overline{y}^2=100\rightarrow\frac{4}{5}(4x+3y)^2+5(-3x+4y)^2=500.$$

$$64x^2+36y^2+96xy+225x^2+400y^2-600xy=500.$$

$$289x^2+436y^2-504xy=500.$$