PME 3100 – MECÂNICA I (Reoferecimento) – Prova PSUB – 11 de Julho de 2023

- Esta avaliação tem duração de 120 minutos e é composta por 3 questões.
- Não é permitido utilização de quaisquer dispositivos eletrônicos, tampouco consulta a qualquer material externo.
- As questões podem ser resolvidas a lápis, na ordem escolhida pelo aluno (que deve indicar onde iniciou cada questão).

Formulário

$$m\vec{a}_G = \vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \qquad m(G-O)\wedge\vec{a}_O + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{J}_O\vec{\omega}) = \vec{M}_O = \sum_i (P_i - O)\wedge\vec{F}_i \qquad T = \frac{1}{2}m|\vec{v}_O|^2 + m\vec{v}_O\cdot\vec{\omega}\wedge(G-O) + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot(\boldsymbol{J}_O\vec{\omega})$$

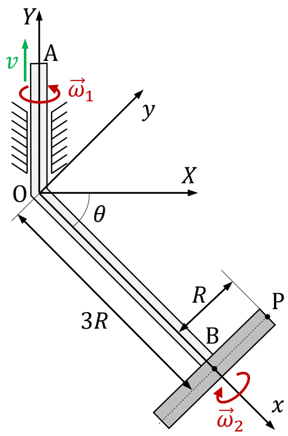
$$\boldsymbol{J}_O\vec{\omega} = (+J_{Ox}\omega_x - J_{Oxy}\omega_y - J_{Oxz}\omega_z)\vec{\imath} + (-J_{Oxy}\omega_x + J_{Oy}\omega_y - J_{Oyz}\omega_z)\vec{\jmath} + (-J_{Oxz}\omega_x - J_{Oyz}\omega_y + J_{Oz}\omega_z)\vec{k}$$

$$\Delta T = W^{ext} + W^{int} = -\Delta V + W^{nc} \qquad V_g = mgh_G \qquad V_e = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 \qquad J_{Oz} = J_{Gz} + m(x_G^2 + y_G^2) \qquad J_{Oxy} = J_{Gxy} + mx_G y_G$$

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B + (B-A)\wedge\vec{R} \qquad \vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}\wedge(A-B) \qquad \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha}\wedge(A-B) + \vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(A-B)]$$

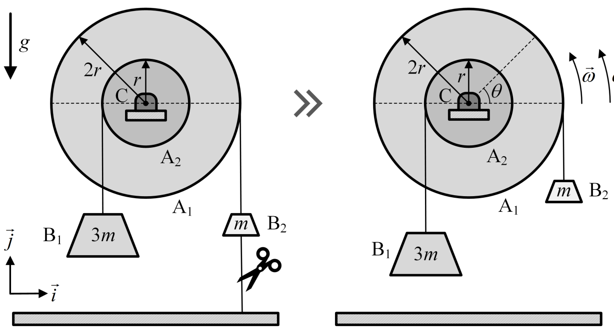
$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P,rel} + \vec{v}_{P,arr} \qquad \vec{a}_P = \vec{a}_{P,rel} + \vec{a}_{P,arr} + 2\vec{\omega}_{arr}\wedge\vec{v}_{P,rel} \qquad \vec{\omega} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \qquad \vec{\alpha} = \vec{\alpha}_{rel} + \vec{\alpha}_{arr} + \vec{\omega}_{arr}\wedge\vec{\omega}_{rel}$$

Questão 1 (3,0 pontos). A peça rígida AOB mostrada na figura desliza sobre uma guia vertical com velocidade $\vec{v} = v\vec{J}$ (v constante) e gira em torno do eixo vertical OY com velocidade angular $\vec{\omega}_1 = \omega_1\vec{J}$ (ω_1 constante). A peça também transporta em sua extremidade B um disco de raio R que gira com velocidade angular $\vec{\omega}_2 = \omega_2\vec{\imath}$ (ω_2 constante) em relação a AOB. Considerando que o ângulo θ permaneça constante durante todo o movimento da peça e utilizando o sistema de coordenadas Oxyz, cuja base são os versores $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, solidário à peça AOB (referencial móvel), pede-se para o instante ilustrado na figura:



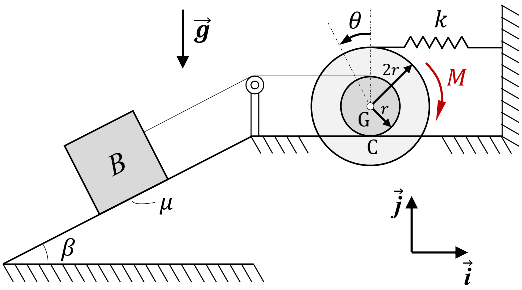
a) (0,4) expressar os vetores $\vec{v}$ e $\vec{\omega}_1$ na base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ solidária à peça AOB;
b) (1,0) a velocidade relativa $(\vec{v}_{P,rel})$, de arrastamento $(\vec{v}_{P,arr})$ e absoluta $(\vec{v}_{P,abs})$ do ponto P do disco;
c) (1,1) a aceleração relativa $(\vec{a}_{P,rel})$, de arrastamento $(\vec{a}_{P,arr})$ e absoluta $(\vec{a}_{P,abs})$ do ponto P do disco;
d) (0,2) a velocidade angular absoluta $(\vec{\omega}_{abs})$ do disco;
e) (0,3) a aceleração angular absoluta $(\vec{\alpha}_{abs})$ do disco.

Questão 2 (3,5 pontos). Um corpo rígido único, A, de massa $10m$ e momento de inércia central $J_{Cz} = 17mr^2$, é constituído por dois carretéis cilíndricos A$_1$, de raio $2r$, e A$_2$, de raio raio r. Dois blocos, B$_1$ e B$_2$, respectivamente com massas $3m$ e m, estão conectados aos carreteis por meio de fios ideais, sendo que o bloco B$_1$ está conectado ao carretel A$_2$ e o bloco B$_2$ está conectado ao carretel A$_1$, conforme apresentado na figura (a). O bloco B$_2$ também está conectado ao solo, também por um fio ideal. O sistema permanece estático até que o fio que conecta o bloco B$_2$ ao solo é subitamente cortado, fazendo com que os carreteis girem no sentido anti-horário com uma velocidade angular $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}$ e uma aceleração angular $\vec{\alpha} = \ddot{\theta}\vec{k}$, conforme apresentado na figura (b). O ângulo θ é medido a partir da reta horizontal que passa pelo ponto C, sendo, portanto, nulo quando o sistema se encontrava em repouso. Pede-se:



(a) (b)

a) (0,6) os Diagramas de Corpo Livre (DCLs) de cada bloco e do conjunto formado pelos carreteis nas condições apresentadas nas figuras (a) e (b).
b) (1,0) o valor das tensões em cada fio e da força de reação no ponto C quando o sistema se encontra na condição (a), em função da massa m e da aceleração da gravidade (g).
c) (0,4) as acelerações dos blocos B$_1$ e B$_2$, $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$, em função de $\ddot{\theta}$, na condição (b).
d) (1,5) as acelerações, $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$, dos blocos B$_1$ e B$_2$, a aceleração angular, $\vec{\alpha}$, do conjunto formado pelos carreteis e os valores das tensões em cada fio e da força de reação no ponto C quando o sistema se encontra na condição (b), em função apenas da massa m, do raio r e da aceleração da gravidade (g).



<u>Questão 3 (3,5 pontos)</u>. O sistema mostrado na figura é composto por um carretel rígido e homogêneo de centro G e um bloco B conectados por um fio ideal. O carretel possui massa $3m$ e momento de inércia $J_{Gz} = 3mr^2$ e rola sem escorregar sobre o plano horizontal. O carretel é também conectado ao plano vertical por meio de uma mola ideal linear de constante elástica k que permanece horizontal durante o movimento do sistema. Adicionalmente, o bloco B, de massa m, desce um plano de inclinação β, <u>partindo do repouso na configuração em que $\theta = 0$</u>. O coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e o plano inclinado é μ. Admitindo que no <u>instante inicial a mola não está deformada</u>, e que um momento M (constante) é aplicado ao carretel, pede-se:

a) (1,0) os diagramas de corpo livre do carretel e do bloco;
b) (0,5) a energia cinética do sistema em função da velocidade angular do disco (ω);
c) (1,0) o trabalho dos esforços externos atuantes no sistema em função de θ;
d) (0,5) a velocidade angular do disco (ω) em função de θ;
e) (0,5) a aceleração angular do disco (α) em função de θ.

Questão 1 (3,5 pontos)

Distribuição de pontos

(a) 0,2 ponto para cada uma das expressões corretas de $\vec{v}$ e $\vec{\omega}_1$;

(b) 0,4 ponto para cada uma das expressões corretas de $\vec{v}_{P,rel}$ e de $\vec{v}_{P,arr}$ e 0,2 ponto para a expressão correta de $\vec{v}_{P,abs}$;

(c) 0,2 ponto para a expressão correta de $\vec{a}_{P,rel}$ e 0,3 ponto para cada uma das expressões corretas de $\vec{a}_{P,arr}$, $\vec{a}_{P,Cor}$ e $\vec{a}_{P,abs}$;

(d) 0,2 ponto para a expressão correta de $\vec{\omega}_{abs}$;

(e) 0,3 ponto para a expressão correta de $\vec{\alpha}_{abs}$;

Resolução

(a) Considerando a relação entre as bases vetoriais $\left(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\right)$ e $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, os vetores $\vec{v}$ e $\vec{\omega}_1$ podem ser expressos como segue:

$$\vec{v} = v\vec{J} = v\left(-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}\right) \qquad \vec{\omega}_1 = \omega_1\vec{J} = \omega_1\left(-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}\right)$$

(b) Os vetores das velocidades relativa ($\vec{v}_{P,rel}$), de arrastamento ($\vec{v}_{P,arr}$) e absoluta ($\vec{v}_{P,abs}$) do ponto P:

$$\vec{v}_{P,rel} = \vec{v}_{B,rel} + \vec{\omega}_{rel} \wedge (P - B)$$

$$\vec{v}_{P,rel} = \vec{0} + (\omega_2\vec{\imath}) \wedge (R\vec{\jmath}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_{P,rel} = (\omega_2 R)\,\vec{k}}$$

$$\vec{v}_{P,arr} = \vec{v}_{O,arr} + \vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O)$$

$$\vec{v}_{P,arr} = \vec{v} + \omega_1\left(-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}\right) \wedge \left(3R\vec{\imath} - R\vec{\jmath}\right)$$

$$\boxed{\vec{v}_{P,arr} = v\left(-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}\right) - \omega_1 R\left(\sin\theta + 3\cos\theta\right)\vec{k}}$$

$$\vec{v}_{P,abs} = \vec{v}_{P,rel} + \vec{v}_{P,arr}$$

$$\boxed{\vec{v}_{P,abs} = v\left(-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}\right) + \left[\omega_2 R - \omega_1 R\left(\sin\theta + 3\cos\theta\right)\right]\vec{k}}$$

(c) Os vetores das acelerações relativa ($\vec{a}_{P,rel}$), de arrastamento ($\vec{a}_{P,arr}$) e absoluta ($\vec{a}_{P,abs}$) do ponto P:

$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{a}_{B,rel} + \vec{\alpha}_{rel} \wedge (P - B) + \vec{\omega}_{rel} \wedge \left[\vec{\omega}_{rel} \wedge (P - B)\right]$$

$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{0} + \vec{0} + (\omega_2\vec{\imath}) \wedge \left[(\omega_2\vec{\imath}) \wedge (R\vec{\jmath})\right]$$

$$\vec{a}_{P,rel} = (\omega_2\vec{\imath}) \wedge \left(\omega_2 R\vec{k}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{P,rel} = -\left(\omega_2^2 R\right)\vec{\jmath}}$$

$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{a}_{O,arr} + \vec{\alpha}_{arr} \wedge (P - O) + \vec{\omega}_{arr} \wedge \left[\vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O)\right]$$

$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{0} + \vec{0} + \omega_1\left(-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}\right) \wedge \left[\omega_1\left(-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}\right) \wedge \left(3R\vec{\imath} - R\vec{\jmath}\right)\right]$$

$$\vec{a}_{P,arr} = -\omega_1^2 R\left(-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}\right) \wedge \left(\sin\theta + 3\cos\theta\right)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{a}_{P,arr} = -\omega_1^2 R\left(\sin\theta + 3\cos\theta\right)\left(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}\right)}$$

$$\vec{a}_{P,Cor} = 2\,\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{P,rel}$$

$$\vec{a}_{P,Cor} = 2\omega_1\left(-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}\right) \wedge (\omega_2 R)\,\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{P,Cor} = 2\omega_1\omega_2 R\left(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}\right)}$$

$$\vec{a}_{P,abs} = \vec{a}_{P,rel} + \vec{a}_{P,arr} + \vec{a}_{P,Cor}$$

$$\boxed{\vec{a}_{P,abs} = -\left(\omega_2^2 R\right)\vec{\jmath} + \left[-\omega_1^2 R\left(\sin\theta + 3\cos\theta\right) + 2\omega_1\omega_2 R\right]\left(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}\right)}$$

(d) O vetor velocidade angular absoluta ($\vec{\omega}_{abs}$) do disco:

$$\vec{\omega}_{abs} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{arr}$$

$$\vec{\omega}_{abs} = \omega_2\vec{\imath} + \omega_1\left(-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\omega}_{abs} = \left(\omega_2 - \omega_1\sin\theta\right)\vec{\imath} + \left(\omega_1\cos\theta\right)\vec{\jmath}}$$

(e) O vetor aceleração angular absoluta ($\vec{\alpha}_{abs}$) do disco:

$$\vec{\alpha}_{abs} = \vec{\alpha}_{rel} + \vec{\alpha}_{arr} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel}$$

$$\vec{\alpha}_{abs} = \vec{0} + \vec{0} + \omega_1\left(-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}\right) \wedge (\omega_2\vec{\imath}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\alpha}_{abs} = -\omega_1\omega_2\cos\theta\vec{k}}$$

Questão 2 (3,5 pontos)

Distribuição de pontos

(a) 0,1 para cada DCL correto.

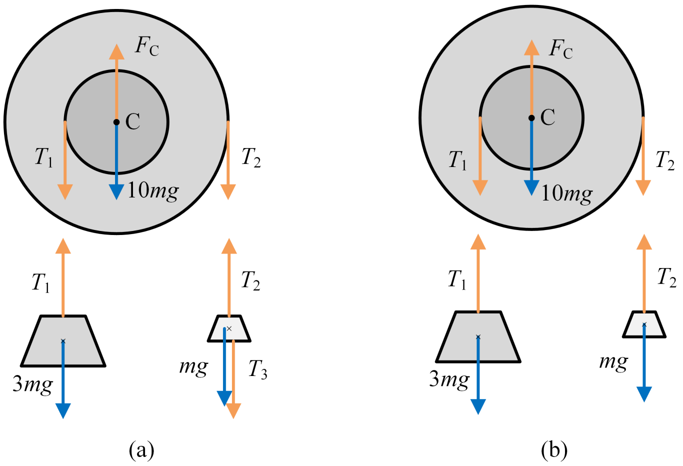
(b) 0,2 para cada força (3 tensões e 1 reação); 0,2 pelo raciocínio.

(c) 0,2 para cada expressão correta.

(d) 0,2 para cada resposta correta (2 tensões, 1 força de reação, 2 vetores de aceleração e 1 vetor de aceleração angular); 0,3 pelo raciocínio. Sugiro considerar 0,1 para a resposta de cada força caso o aluno tenha chegado na resposta correta, mas em função da aceleração angular.

Resolução

(a) Os diagramas de corpo livre para cada condição estão indicados abaixo:



(b) Considerando o equilíbrio de forças no bloco B_1:

$$T_1 - 3mg = 0 \Rightarrow \boxed{T_1 = 3mg} \quad (1)$$

Considerando o equilíbrio de forças no bloco B_2:

$$T_2 - mg - T_3 = 0 \Rightarrow T_2 = mg + T_3 \quad (2)$$

Considerando o equilíbrio de forças nos carreteis:

$$F_C - 10mg - T_1 - T_2 = 0 \Rightarrow F_C = 10mg + T_1 + T_2 \Rightarrow F_C = 14mg + T_3 \quad (3)$$

Considerando o equilíbrio de momentos em relação ao ponto C nos carreteis:

$$T_1 r - T_2(2r) = 0 \Rightarrow T_2 = \frac{1}{2}T_1 \Rightarrow \boxed{T_2 = \frac{3}{2}mg} \quad (4)$$

Substituindo a equação (4) na equação (2):

$$T_3 = T_2 - mg \Rightarrow \boxed{T_3 = \frac{1}{2}mg} \quad (5)$$

Substituindo a equação (5) na equação (3):

$$\boxed{F_C = \frac{29}{2}mg} \quad (6)$$

(c) As relações entre as acelerações dos blocos e a aceleração angular dos carreteis podem ser obtidas diretamente ao se considerar que os deslocamentos dos blocos B_1 e B_2 são, respectivamente, iguais a $-\theta r\vec{j}$ e $2\theta r\vec{j}$. Logo:

$$\boxed{\vec{a}_1 = -\ddot{\theta}r\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{a}_2 = 2\ddot{\theta}r\vec{j}}$$

(d) Considerando o Teorema da Resultante (TR) para o bloco B_1:

$$T_1 - 3mg = 3ma_1 \Rightarrow T_1 = 3m(g - \ddot{\theta}r) \tag{7}$$

Considerando o TR para o bloco B_2:

$$T_2 - mg = ma_2 \Rightarrow T_2 = m(g + 2\ddot{\theta}r) \tag{8}$$

Considerando o TR para os carreteis e considerando as equações (7) e (8):

$$F_C - 10mg - T_1 - T_2 = 0 \Rightarrow F_C = 10mg + 3m(g - \ddot{\theta}r) + m(g + 2\ddot{\theta}r) \Rightarrow F_C = m(14g - \ddot{\theta}r) \tag{9}$$

Considerando o Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA) para os carreteis e considerando as equações (7) e (8):

$$T_1 r - T_2(2r) = \ddot{\theta}J_{Cz} \Rightarrow 3m(g - \ddot{\theta}r)r - m(g + 2\ddot{\theta}r)(2r) = 17mr^2\ddot{\theta} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{g}{24r}} \tag{10}$$

Logo:

$$\boxed{\vec{\alpha} = \frac{g}{24r}\vec{k}}$$

E, substituindo a expressão (10) nas expressões obtidas no item (c) e nas expressões (7), (8) e (9):

$$\boxed{\vec{a}_1 = -\frac{g}{24}\vec{j}} \qquad \boxed{\vec{a}_2 = \frac{g}{12}\vec{j}}$$

$$\boxed{T_1 = \frac{23}{8}mg} \qquad \boxed{T_2 = \frac{13}{12}mg}$$

$$\boxed{F_C = \frac{335}{24}mg}$$

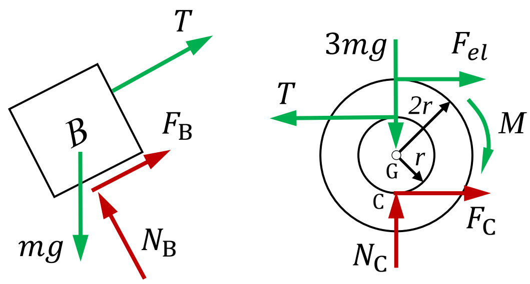
Questão 3 (3,5 pontos)

Distribuição de pontos

- **(a)** 0,5 ponto para cada DCL inteiramente correto ou 0,3 para o DCL que tiver até 2 componentes erradas.
- **(b)** 0,5 ponto para a expressão correta da energia cinética total do sistema, ou 0,3 ponto caso apenas a energia cinética do bloco ou do carretel seja calculada corretamente.
- **(c)** 0,2 ponto para cada uma das expressões corretas dos trabalhos.
- **(d)** 0,2 por escrever corretamente a expressão do TEC e 0,3 para a expressão correta da velocidade angular.
- **(e)** 0,2 por escrever corretamente a expressão para o cálculo da aceleração angular e 0,3 para o cálculo correto.

Resolução

(a) A figura ao lado indica os DCLs solicitados.



(b) A energia cinética do *sistema* em função da velocidade angular do disco (ω):

$$T = T_{\text{bloco}} + T_{\text{carretel}} = \frac{1}{2}m_b|\vec{v}_B|^2 + \left[\frac{1}{2}m_C|\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2}J_{Gz}\omega^2\right]$$

Como o fio é inextensível (ideal), e sendo A o ponto onde o fio começa a se enrolar no carretel, temos: $|\vec{v}_B| = |\vec{v}_A| = |2\omega r|$. Adicionalmente, como o carretel rola sem escorregar sobre o plano horizontal, então: $|\vec{v}_G| = |\omega r|$. Portanto, a energia cinética do *sistema* é dada por:

$$T = \frac{4mr^2\omega^2}{2} + \left(\frac{3mr^2\omega^2}{2} + \frac{3mr^2\omega^2}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{T(\omega) = 5mr^2\omega^2}$$

(c) Os únicos esforços *externos ao sistema* que realizam trabalho são: (i) a força peso do bloco, (ii) a força de atrito de escorregamento atuante no bloco, (iii) a força elástica da mola, e (iv) o momento constante aplicado. Sendo $\Delta s = 2r\theta$ o deslocamento do bloco ao longo do plano inclinado e $\Delta\delta = 3r\theta$ o deslocamento da extremidade da mola, tem-se:

$$W_{\text{ext}} = W_{P_B} + W_{F_B} + W_{F_{el}} + W_M$$

onde

$$W_{P_B} = -\Delta V_g = -m_B g \Delta h_B = mg\Delta s \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{P_B} = (2mgr\sin\alpha)\theta}$$

$$W_{F_B} = \int_0^t -F_B\vec{s}\cdot v_B\vec{s}\,dt = -\int_0^t F_B v_B\,dt = -F_B\int_0^t v_B\,dt = -F_B\Delta s = -\mu N_B \Delta s \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{F_B} = -(2\mu mgr\cos\alpha)\theta}$$

$$W_{F_{el}} = -\Delta V_e = -\frac{k}{2}\Delta\delta^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{F_{el}} = -\left(\frac{9kr^2}{2}\right)\theta^2}$$

$$W_M = \int_0^t -M\vec{k}\cdot\omega\vec{k}\,dt = -\int_0^t M\omega\,dt = -M\int_0^t \omega\,dt = -M\Delta\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_M = -M\theta}$$

Portanto, o trabalho total dos esforços externos fica:

$$\boxed{W_{\text{ext}}(\theta) = 2mgr(\sin\alpha - \mu\cos\alpha - M)\,\theta - \left(\frac{9kr^2}{2}\right)\theta^2}$$

(d) Aplicando o Teorema da Energia Cinética ao *sistema* partindo do repouso ($T_0 = 0$) na configurações em que $\theta = 0$, tem-se:

$$\Delta T = T - T_0 = W_{\text{ext}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega(\theta) = \sqrt{\frac{2mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha - M)\,\theta - \left(\frac{9kr}{2}\right)\theta^2}{5mr}}}$$

(e) Derivando em relação ao tempo a expressão da velocidade angular obtida no item anterior e sendo $\omega = \dot{\theta}$, tem-se:

$$\boxed{\dot{\omega}(\theta) = \frac{2mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha - M) - (9kr)\,\theta}{10mr}}$$