Física 3 IFUSP
14 de Junho de 2023

Prof. José Roberto B. Oliveira

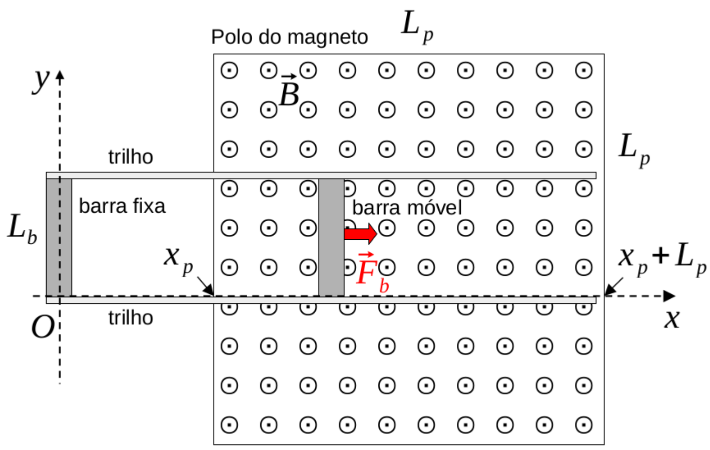
Prova 4

Nome: ____

Número USP/Assinatura: ____________________ / ____________________

1) A figura mostra um sistema constituído de duas barras verticais em contato elétrico com dois trilhos horizontais. Uma das barras está fixa na extremidade dos trilhos enquanto que a outra é móvel, e pode deslizar sem atrito ao longo dos trilhos. As barras são idênticas, de comprimento L_b e seção quadrada de lado $L_q \ll L_b$ (o desenho não está em escala). O material de que são feitas as barras tem baixa condutividade σ_b, enquanto que os trilhos são formados de um material de condutividade várias ordens de grandeza maior. No instante mostrado na figura, a barra móvel encontra-se imersa no campo magnético produzido pelo polo quadrado de um magneto de lado $L_p \gg L_b$. Este campo é aproximadamente uniforme em toda a região quadrada do polo: $\vec{B}(x,y)=B\hat{k}$, $(B>0)$, e é praticamente nulo fora dela. Uma força externa constante age sobre a barra, dada por $\vec{F}_b=F_b\hat{i}$. No instante representado, a barra já atingiu a velocidade limite.

A resposta de cada item deve ser fornecida em termos dos parâmetros mencionados acima, ou de resultados dos itens anteriores da questão.



a) [0,5] Determine a resistência de cada barra R_b e a resistência total R_C do circuito fechado formado pelas barras e trilhos.
b) [0,5] Determine a corrente I_C que flui pelo circuito formado pelas barras e trilhos e indique seu sentido.
c) [0,5] Determine a magnitude da velocidade limite da barra v_b.
d) [1,0] Determine o campo elétrico $\vec{E}_E$ presente no interior da barra da esquerda (fixa), determine o campo elétrico $\vec{E}_D$ presente no interior da barra da direita (móvel) e faça um desenho de cada barra, ilustrando as linhas de campo elétrico e as distribuições de carga elétrica que geram esses campos elétricos. Explique

e) [1,0] Neste problema, é possível afirmar que parte da potência externa fornecida ao sistema é convertida em energia do campo eletromagnético? Explique.

Resps.:

a) $R_b = \frac{1}{\sigma_b}\frac{L_b}{L_q^2}$, $R_C = 2R_b$

b) $F_b = I_C L_b B$ (força magnética sobre condutor portando corrente), $I_C = \frac{F_b}{L_b B}$. Para baixo, na barra da direita (sentido horário, no circuito).

c) Força eletromotriz: $\varepsilon = \int_{L_b}^{0} (\vec{v}_b \times \vec{B}).\hat{i}\, dx = v_b B L_b$

Corrente (Lei de Ohm): $I_C = \frac{\varepsilon}{R_C}$, portanto: $v_b = \frac{R_C I_C}{B L_b} = \frac{R_C F_b}{L_b^2 B^2}$

d)Para que a corrente I_C flua na barra da esquerda, é necessário que o potencial eletrostático seja $L_b E_E = R_b I_C$, portanto $E_E = \frac{R_b I_c}{L_b} = \frac{1}{2}\frac{R_C I_C}{L_b} = \frac{1}{2} v_b B$, e $\vec{E}_E = \frac{1}{2} v_b B \hat{j}$.

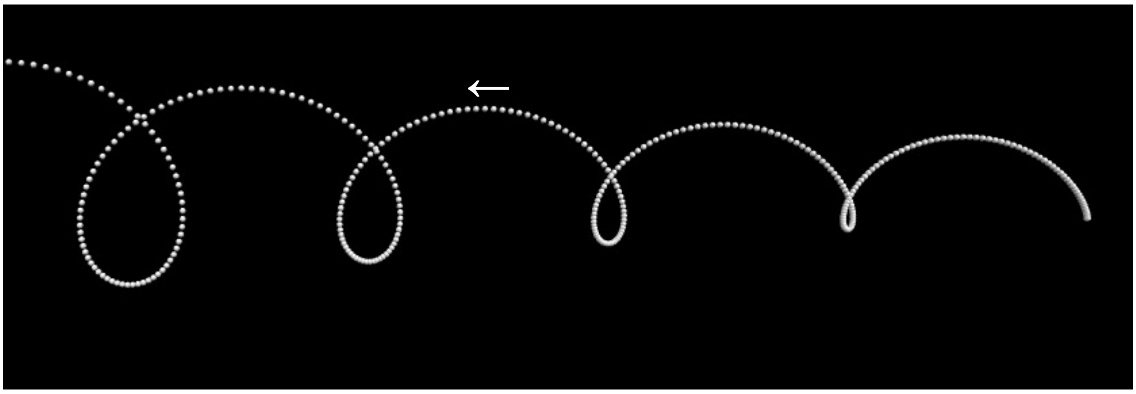
O mesmo campo elétrico será gerado na barra da direita para que a resultante (no caso, com a contribuição da força magnética) seja de mesma magnitude. Portanto $\vec{E}_D = \vec{E}_E$.

e) Essencialmente não, porque o campo magnético do magneto continua constante (no referencial em que está em repouso) em uma região de volume constante, e a densidade de energia eletromagnética, proporcional ao quadrado do campo magnético, também. Se a condutividade das barras é baixa, a corrente e portanto o campo e a energia magnética também serão pequenas, ou desprezíveis. A rigor, uma pequena quantidade de campo magnético será gerada pela corrente I_C induzida no circuito, mas no sentido de diminuir o campo magnético no interior do circuito. De qualquer modo, na aproximação utilizada a resposta é não. Toda a energia é dissipada por efeito Joule nos resistores.

2) Vamos analisar o problema anterior no referencial (inercial) em que a barra da direita (nomeada como móvel na figura) está em repouso, e portanto o magneto, os trilhos e a barra da esquerda (nomeada como fixa) movem-se para a esquerda com velocidade (determinada anteriormente) de magnitude v_b.

a) [0,5] Qual é a explicação, nesse referencial, para a existência de uma força eletromotriz que origine a corrente I_C no circuito?
b) [0,5] Identifique as regiões espaciais em que o campo magnético varia no tempo, e o sentido dessa variação.
c) [1,0] Determine o campo elétrico induzido na região quadrada do magneto (longe das bordas), onde está imersa a barra da direita, e faça um esboço das linhas de campo.
d) [0,5] Existe campo elétrico induzido pela variação de campo magnético na região da barra da esquerda? Qual é o campo elétrico total no interior dessa barra? Explique.
e) [0,5] Existe uma componente horizontal do campo elétrico no interior da barra da direita? Explique. Se houver, como seria possível obtê-lo?
f) [0,5] Se um elétron for abandonado em repouso na região central do polo do magneto (sempre no referencial da barra da direita), supondo que está em vácuo, como seria seu movimento? Faça um esboço da sua trajetória.

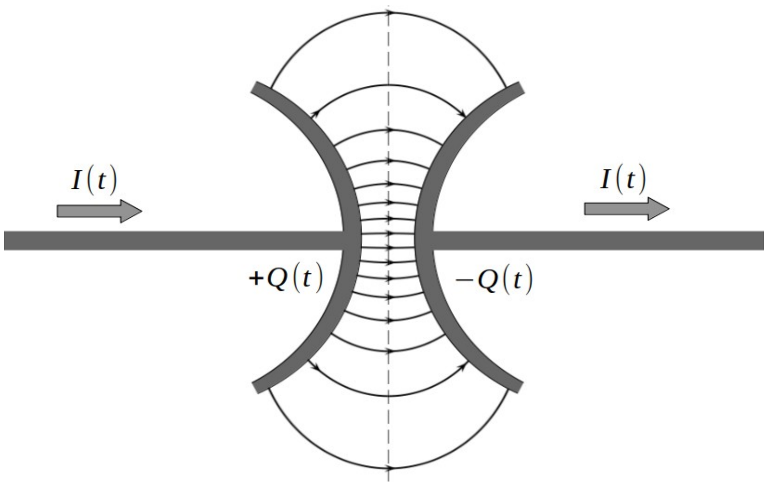
Resps.:
a) Neste referencial há variação do campo magnético no tempo em determinadas regiões do espaço que resultam em um campo elétrico induzido. Essa variação do campo resulta em um aumento do fluxo de campo magnético que atravessa a superfície do circuito, gerando a mesma força eletromotriz que a do problema anterior.
b) Na borda esquerda do polo do magneto (x_p) há um súbito aumento do campo de 0 para B no sentido y, enquanto que na borda direita (x_p+L_p) há uma diminuição súbita. Do lado esquerdo a derivada do campo é grande e positiva, e do lado direito, negativa.
c) A magnitude e o sentido serão os mesmos que os da força magnética do problema anterior: $\vec{E}_{ind}=-v_b B\hat{j}$, uma vez que a variação do campo provoca o mesmo aumento de fluxo de campo magnético através do circuito.
d) Não porque há um cancelamento dos efeitos das duas bordas (de crescimento e decrescimento do campo) nessa região, enquanto que no meio, eles se reforçam, semelhantemente ao campo elétrico de um capacitor de placas paralelas.
e) Sim, devido ao efeito Hall. Haverá uma concentração de cargas tal que o campo elétrico anula a componente horizontal da força magnética. Sua magnitude depende da densidade de carga dos portadores, e o sentido, do sinal da carga dos portadores.
f) Seria acelerado para cima, mas com uma força centrípeta devido à força magnética, com raio de curvatura proporcional ao momento, podendo fazer laços (a seta indica o sentido do movimento):



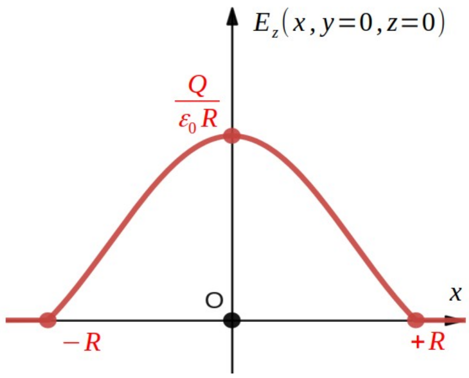
4) A figura abaixo ilustra um capacitor cujas placas tem um formato especial tal que, quando carregado com uma carga Q, apresenta um campo elétrico dado, no plano médio entre as placas (linha tracejada), pela expressão:

$$\vec{E}(r,\theta,z=0)=\frac{Q}{\varepsilon_0 R}\frac{1}{\pi r}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi r}{R}\right)\hat{k}\text{, para } r\leq R;\ \vec{E}(r,\theta,z=0)\approx 0\text{, para } r>R.$$

em coordenadas cilíndricas. Nessa expressão, R é um parâmetro constante, com dimensão de comprimento, que representa um raio efetivo do capacitor, e o eixo z do sistema de coordenadas coincide com o eixo dos fios retilíneos que alimentam o capacitor, estando a origem O do sistema de coordenadas no ponto central entre as placas.



Capacitor com placas de formato especial e suas linhas de campo elétrico.



Componente z do campo elétrico no eixo x (linha tracejada da figura do capacitor).

a) [1,0] Determine a expressão para a derivada temporal do campo elétrico no plano central $(z=0)$ como função do raio r e do tempo, sendo a corrente que passa nos fios ligados ao capacitor dada por $I(t)=I_0\,\mathrm{sen}(\omega t)$, sendo ω uma constante positiva. Suponha que o capacitor está descarregado no instante $t=0$.

b) [1,0] Obtenha a expressão para o campo magnético $\vec{B}(r,\theta,t)$ induzido em todo o plano $z=0$.

c) [0,5] Sendo esse campo variável no tempo, indique a direção e sentido do campo elétrico induzido no instante $t=\frac{2\pi}{\omega}$.

d) [0,5] Explique por que não seria possível usar a Lei de Ampére para obter o campo magnético no item b).

Resps.:

a) $\frac{dQ}{dt}=I(t)=I_o\,\mathrm{sen}(\omega t)$, portanto:

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{I_0\,\mathrm{sen}(\omega t)}{\varepsilon_0 R}\frac{1}{\pi r}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi r}{R}\right)\hat{k}\text{, para } r\leq R;\ 0\text{, para } r>R.$$

b) Lei de Ampére-Maxwell com $\vec{J}=0 \;\rightarrow\; \oint_C \vec{B}.d\vec{l}=\mu_0\varepsilon_0\int_{S(C)}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.\hat{k}\,dS$

$$2\pi r B_\theta=\mu_0\varepsilon_0 2\pi\int_0^r\frac{\partial E}{\partial t}r\,dr=2\frac{I_0\,\mathrm{sen}(\omega t)}{\varepsilon_0 R}\int_0^r\mathrm{sen}\left(\frac{\pi r}{R}\right)dr=2\frac{I_0\,\mathrm{sen}(\omega t)}{\pi\varepsilon_0}\left(1-\cos\left(\frac{\pi r}{R}\right)\right)$$

$$B_\theta=\frac{I_0\,\mathrm{sen}(\omega t)}{\pi^2\varepsilon_0 r}\left(1-\cos\left(\frac{\pi r}{R}\right)\right),\ \vec{B}=B_\theta\hat{\theta}$$

c) Nesse instante a derivada temporal do campo magnético é máxima, portanto, o campo elétrico terá a direção de $\hat{k}$ mas com o sentido oposto.
d) A lei de Ampére não contém o termo de Maxwell, que é necessário para calcular o campo induzido pela variação do campo elétrico na região interna ao capacitor.