Terceira Prova de MAP 3210 - 2023 - PARTE II
BMA & BMAC - IME USP, aos 13 de julho de 2023

Entrega até 23:30 horas de 16 de julho de 2023, em arquivo formato pdf (não compactado e não protegido por senha) a ser depositado na página da disciplina no e-disciplinas.

Questão 1 Considere o problema de Cauchy $\dot{x} = \frac{x^2+1}{2(t^2+1)},\ x(0) = 0$ e denote por $x(t)$ a sua solução não prolongável.

Tome $h = \frac{1}{10}$ e seja $t_j = hj,\ j \in \{0, 1, \ldots, 10\}$.

(i) (1 ponto) Use o método de Runge-Kutta de segunda ordem com $b = \frac{1}{2}$ e encontre aproximações para $x(t_j)$ $j \in \{0, 1, \ldots, 10\}$.

(ii) (1 ponto) Refaça s item anterior agora com o método de Runge-Kutta de quarta ordem $1/6$.

(iii) (0.5 ponto) Através de um gráfico compare os resultados obtidos nos itens anteriores com a sulução exata do problema de Cauchy dado.

Questão 2 (3.0 pontos) Considere Ω um aberto de $\mathbb{R}^2$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^p$.

Suponha que o

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

tem uma única solução não prolongável, $x(t)$, definida em um intervalo aberto I e suponha que, para um certo $T > 0$, tem–se $[t_0, t_0 + T] \subset I$.

Para $n \in \mathbb{N}$, faça $h = \frac{T}{n}$ e, para $i \in \{1, \ldots, n\}$, tome $t_i = t_{i-1}+h = t_0+ih$.

Prove que, se $n \in \mathbb{N}$, então

$$x_i(t_i) = x(t_{i-1}) + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) + O(h^4)$$

em que os k_j são:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_{i-1}, x_{i-1}) \\ k_2 &= f(t_{i-1} + \tfrac{h}{2}, x_{i-1} + \tfrac{h}{2}k_1) \\ k_3 &= f(t_{i-1} + h, x_{i-1} - hk_1 + 2hk_2). \end{aligned} \tag{2}$$

Obs. A solução desta questão apenas no caso em que a e.d.o. considerada é autônoma, i.e. $f = f(x)$, (não depende da variável t) valerá 2.0 pontos.