MAE0219 - Introdução à Probabilidade e Estatística I
Quarta Avaliação - Noturno - Resolução

Uma indústria produz componentes eletrônicos dos quais 0,1 apresentam defeitos.

a) Em 200 itens selecionados ao acaso da produção qual é a probabilidade aproximada (use a aproximação normal) de que no máximo 10 apresentem defeitos?

b) A indústria vende os componentes em lotes de 200 unidades e pretende instituir um número k de defeituosos no lote a fim de que este seja devolvido. Qual o valor de k de maneira que um lote seja devolvido com probabilidade de 0,01? Use a aproximação da distribuição binomial pela distribuição normal,

Solução:

(a)
Seja D o evento componente defeituoso. Assim $P(D) = 0,1$ e o número de defeituosos dentre os 200 itens tem ditribuição binomial, $N \sim B(200; 0,1)$, que pode ser aproximada pela variável aleatória Y com distribuição normal com média $\mu = 200.0,1 = 20$, variância $\sigma^2 = 200.0,1.0,9 = 18$ e desvio padrão $\sigma = 4,24$.
Portanto

$$P(N \leq 10 = P(Y \leq 10,5) = P(Z \leq \frac{10,5-20}{4,24}) = P(Z \leq -2,24)$$

$$= P(Z > 2,24) = 1 - P(Z \leq 2,24) = 1 - A(2,24) = 1 - 0,9875 = 0,0125.$$

(b)
Pergunta-se qual o valor de k tal que $P(N \leq k) = 0,01$, ou seja $P(Y \leq k + 0,5) = 0,01$.

$$P(Y \leq k + 0,5) = 0,01 \Leftrightarrow P(Z \leq \frac{k+0,5-20}{4,24}) = 0,01 \Leftrightarrow P(Z \leq \frac{k+-19,5}{4,24}) = 0,01.$$

Como a probabilidade fixada é menor que $0,5$ a fração $\frac{k+-19,5}{4,24}$ é negativa e temos

$$P(Z > \frac{19,5-k}{4,24}) = 0,01 \Leftrightarrow P(Z \leq \frac{19,5-k}{4,24}) = 0,99 \Leftrightarrow \frac{19,5-k}{4,24} = 2,33 \Leftrightarrow k = 9,62$$

que deve ser aproximado para 9.

Sejam X e Y variáveis aleatórias com distribuição conjunta dada por:

XY	0	1	2	3	total
1	$0,05$	$0,18$	$0,13$	$0,07$	$0,43$
2	$0,09$	$0,14$	$0,08$	$0,06$	$0,37$
3	$0,11$	$0,03$	$0,04$	$0,02$	$0,20$
total	$0,25$	$0,35$	$0,25$	$0,15$	1

a) As variáveis aleatórias X e Y são independentes?

b) Qual a função de probabilidade da variável aleatória $(X|Y = 2)$?

c) Calcule a variância de $X + Y$.

d) Calcule o coeficiente de correlação linear entre X e Y.

Solução:

(a)
Como $0,02 \neq 0,2.0,15 = 0,03$ concluimos que X e Y são dependentes.

(b)
A variável aleatória (condicional) $(X|Y=2)$ assume os valores $1,2,3$, com probabilidades

$$P(X=1|Y=2) = \frac{P(X=1,Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{0,13}{0,25} = 0,52;$$

$$P(X=1|Y=2) = \frac{P(X=1,Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{0,08}{0,25} = 0,32;$$

$$P(X=1|Y=2) = \frac{P(X=1,Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{0,04}{0,25} = 0,16.$$

(c)
Temos que $V(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2.Cov(X,Y)$.
Como

$$E[X] = 1.0,43 + 2.0,37 + 3.0,2 = 1,77;$$

$$E[X^2] = 1.0,43 + 4.0,37 + 9.0,2 = 3,71$$

temos

$$Var(X) = 3,71 - 3,1329 = 0,58.//DP(X) = 0,76.$$

Como

$$E[Y] = 0.0,25 + 1.0,35 + 2.0,25 + 3.0,15 = 1,3$$

;

$$E[Y^2] = 0.0,25 + 1.0,35 + 4.0,25 + 9.0,15 = 2,7$$

temos

$$Var(Y) = 2,7 - 1,69 = 1,01.//DP(Y) = 1.$$

Como

$$E[X.Y] = 1.0.0,05 + 1.1.0,18 + 1.2.0,13 + 1.3.0,07 + 2.0.0,09 + 2.1.0,14$$

$$+2.2.0,08 + 2.3.0,06 + 3.0.0,11 + 3.1.0,03 + 3.2.0,04 + 3.3.0,02 = 2,12.$$

Temos $cov(X,Y) = 2,12 - 1,77.1,3 = -0,18$ e

$$Var(X+Y) = 0,58 + 1,01 - 2.0,18 = 1,23.$$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{DP(X).DP(Y)} = \frac{-0,18}{0,761} = -0,24.$$

As variáveis X e Y apresentam uma relação linear negativa, quando uma das variáveis cresce, a outra decresce. (d)