UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

LABORATÓRIO DE DINÂMICA

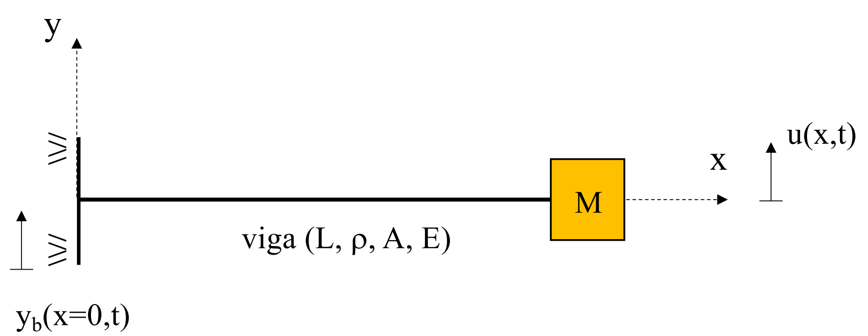
SEM 0533 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos I
SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

Modelagem de Sistemas Mecânicos
Resolução de Exercícios

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Problema # 1

1-) A figura abaixo mostra viga metálica engastada na extremidade $x = 0$ e com uma massa concentrada M presa à sua extremidade livre em $x = L$, onde x representa o eixo longitudinal paralelo à linha neutra da viga e L o comprimento da viga. Este modelo é comumente denominado *viga cantilever* na bibliografia de sistemas dinâmicos. Seu trabalho é o de formular um modelo matemático para este problema. Estabeleça as hipóteses simplificadoras que julgar necessárias.



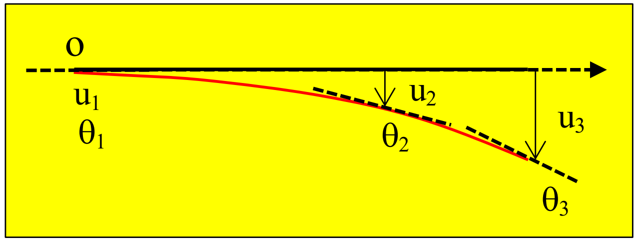
Solução: Proporemos quatro modelos matemáticos para o modelo físico

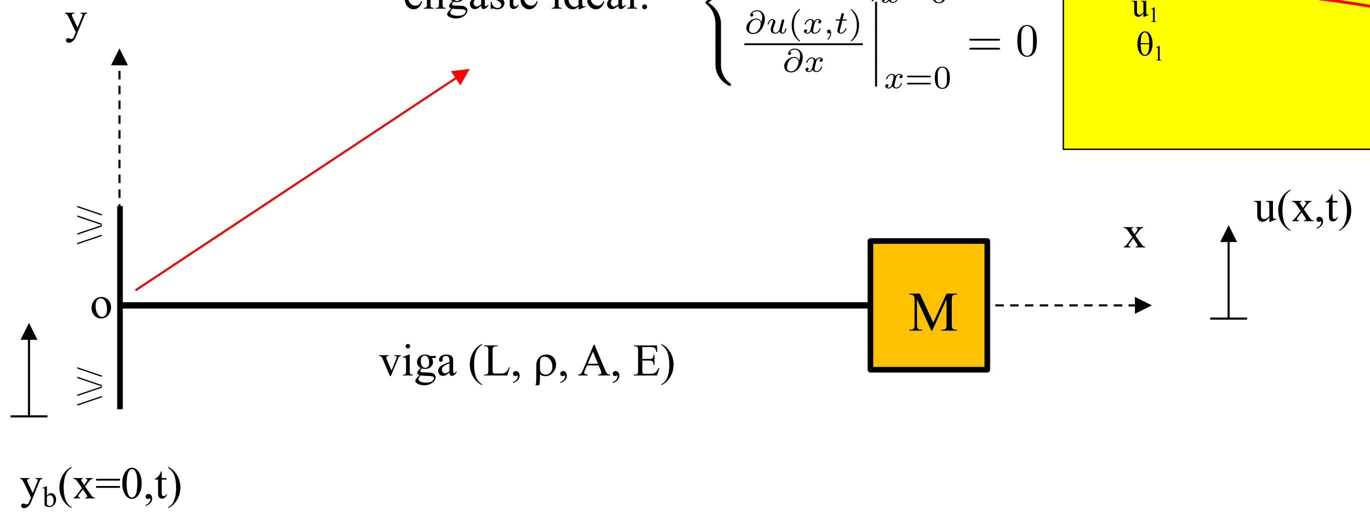
1-) Modelo de parâmetros concentrados 1
2-) Modelo de parâmetros concentrados 2
3-) Modelo de parâmetros concentrados 3
3-) Modelo de parâmetros distribuídos

Cont. ... Considerações Preliminares

Formular um modelo da viga *cantilever*

engaste ideal: $\begin{cases} u(x,t)\Big|_{x=0} = 0 \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \end{cases}$

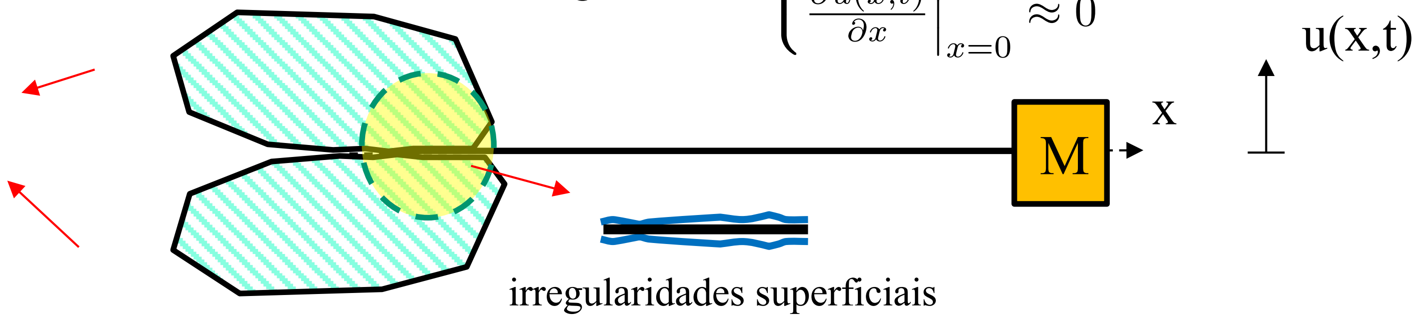




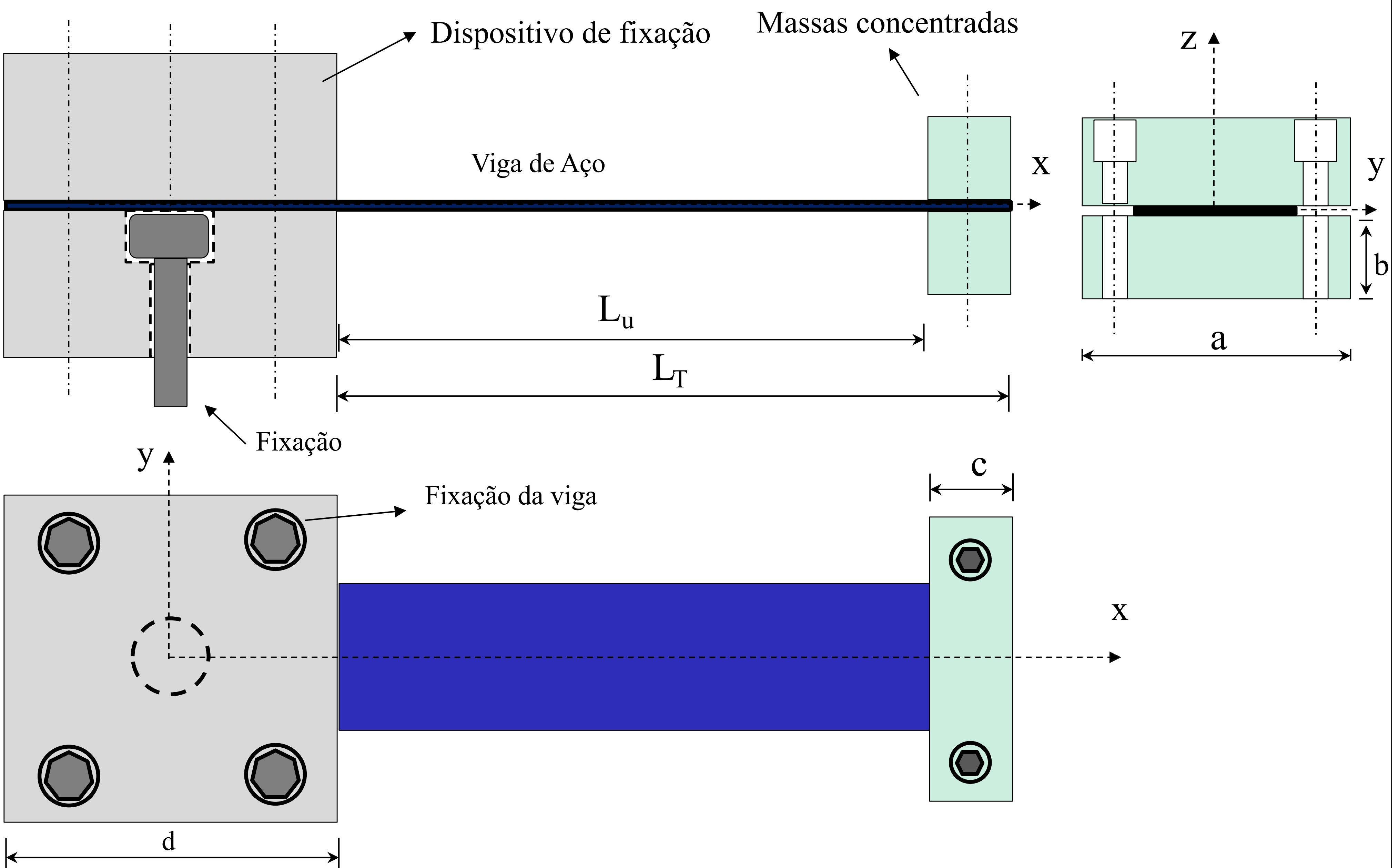
Solução: O modelo geométrico mostrado acima é uma idealização de um sistema físico que, em aplicações práticas usualmente é realizado através de um dispositivo de engaste:

engaste real: $\begin{cases} u(x,t)\Big|_{x=0} \approx 0 \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} \approx 0 \end{cases}$

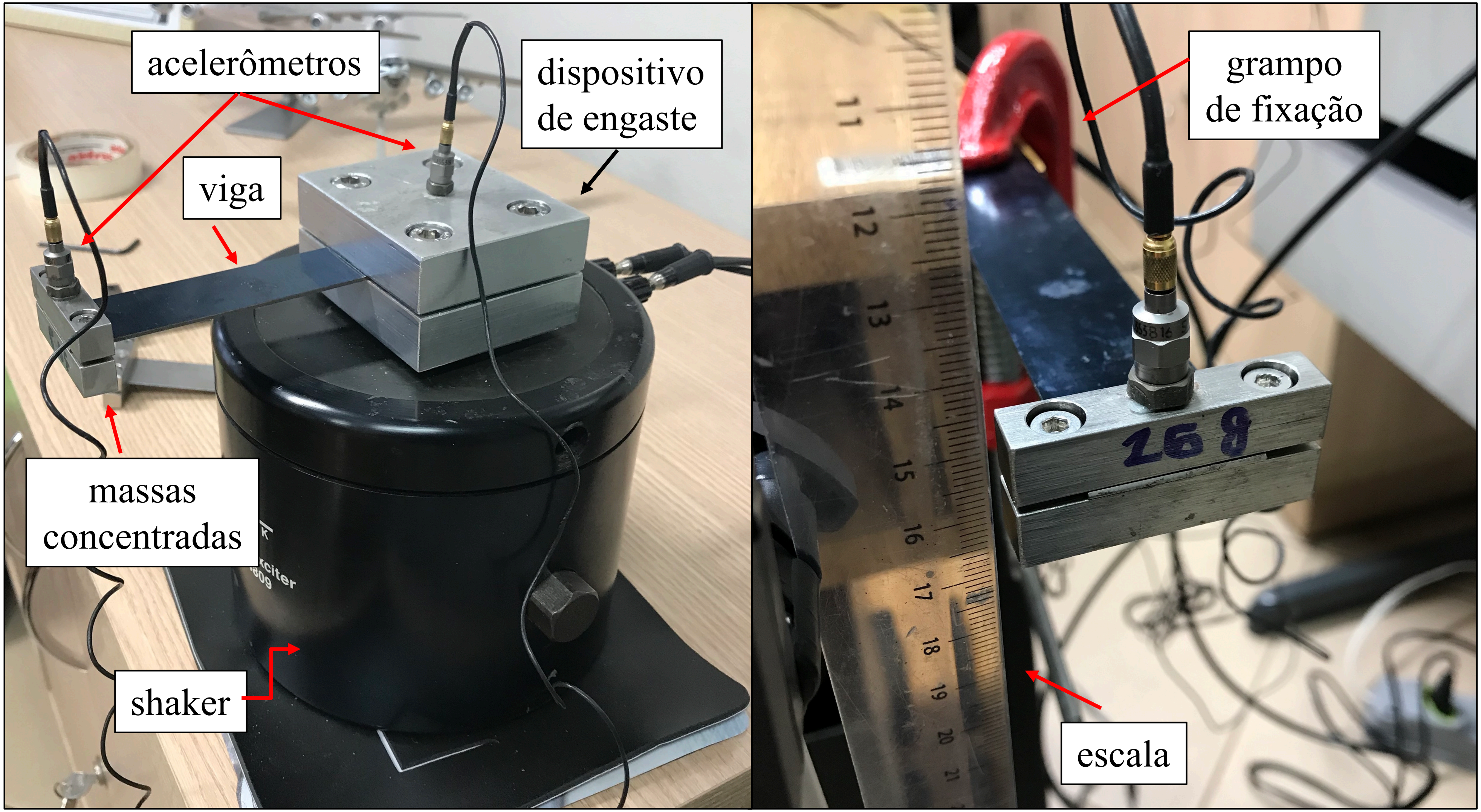
dispositivo de engaste



Cont. ... Aspectos Construtivos



Cont. ... Aspectos Construtivos



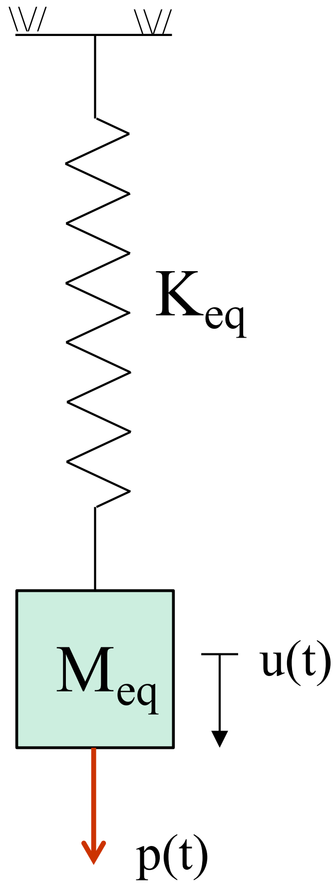
Cont. ... Modelo # 1

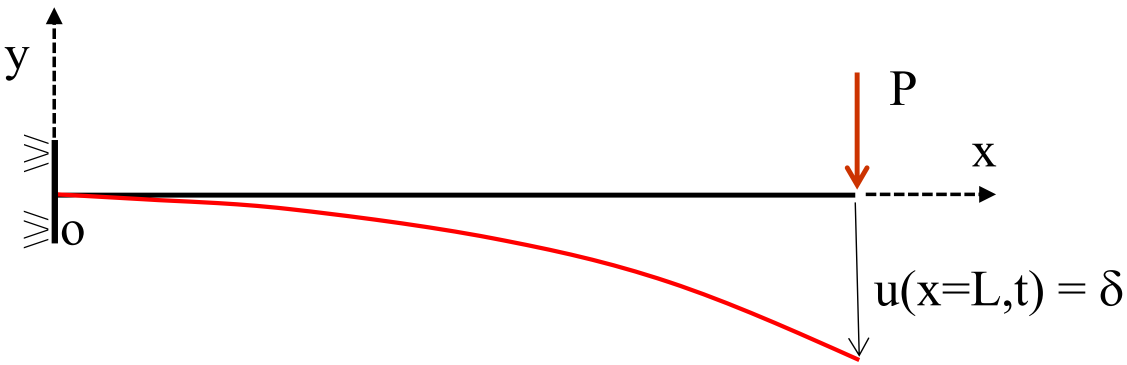
Hipóteses simplificadoras:

1- Massa da viga desprezada comparada com M

2- Massa M rígida

3- Elementos puros e ideais





Linha elástica: $y = \dfrac{Px^2}{6EI}(3L - x)$

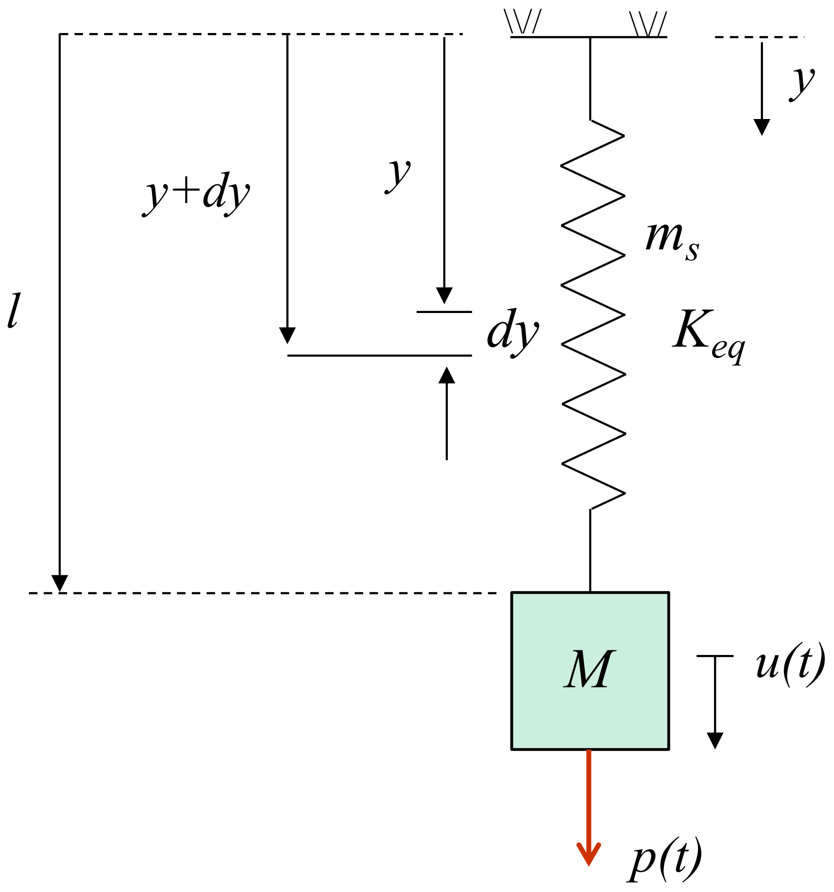
$x = L \qquad \delta = \dfrac{PL^3}{3EI} \quad \Rightarrow \quad K_{eq} = \dfrac{P}{\delta} = \dfrac{3EI}{L^3}$

$$M_{eq}\ddot{u} + K_{eq}u = p(t)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{M_{eq}}} = \sqrt{\frac{\frac{3EI}{L^3}}{M}}$$

Cont. ... Modelo # 2

A viga é representada por uma mola de massa total igual a m_s. Neste caso a massa e a velocidade do elemento dy são respectivamente dadas por



$$m_{dy} = \frac{m_s}{l} dy$$

$$v_{dy} = \frac{y}{l} \dot{u}(t)$$

E, a energia cinética da mola é então escrita:

$$T_{\text{mola}} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{m_s}{l} \left(\frac{y}{l} \dot{u} \right)^2 dy = \frac{1}{2} \left(\frac{m_s}{3} \right) \dot{u}^2$$

E, para a massa M temos

$$T_{\text{M}} = \frac{1}{2} M \dot{u}^2$$

$$M_{eq} \ddot{u} + K_{eq} u = p(t)$$

Cont. ... Modelo # 2

A energia cinética total é a soma das duas contribuições, ou seja:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_s}{3}\right)\dot{u}^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\left(M + \frac{m_s}{3}\right)}_{M_{eq}}\dot{u}^2$$

Contribuição da mola

Enquanto que a energia potencial do sistema é devida somente à mola[1]

$$V = \frac{1}{2}K_{eq}u^2 \qquad \text{sendo} \qquad K_{eq} = \frac{3EI}{l^3}$$

Como o movimento assumido deve ser do tipo harmônico simples temos

$$u(t) = U_0 \cos \omega_n t$$

E, como o sistema é conservativo, sua energia mecânica se conserva ou seja,

$$T + V = \text{constante}$$

[1] para movimentos de natureza oscilatória em torno da posição de equilíbrio estático, a variação da energia potencial gravitacional é nula !

Cont. ... Modelo # 2

O ***Princípio de Rayleigh*** estabelece, a partir da conservação da energia mecânica

$$T_{\max} = V_{\max}$$

$$T = \frac{1}{2}\left(M + \frac{m_s}{3}\right)\dot{u}^2 = \frac{1}{2}\left(M + \frac{m_s}{3}\right)U_0^2\omega_n^2\sin^2\omega_n t$$

$$V = \frac{1}{2}K_{eq}u^2 = \frac{1}{2}K_{eq}U_0^2\cos^2\omega_n t$$

$$T_{\max} = V_{\max} \quad \Rightarrow \quad \cancel{\frac{1}{2}}\left(M + \frac{m_s}{3}\right)\cancel{U_0^2}\omega_n^2 = \cancel{\frac{1}{2}}K_{eq}\cancel{U_0^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{M_{eq}}} = \sqrt{\frac{\frac{3EI}{L^3}}{\left(M + \frac{m_s}{3}\right)}}$$

A mola contribui com aproximadamente 33 % Para M_{eq}

Cont. ... Modelo # 3

Este modelo segue uma linha de raciocínio similar ao modelo # 2. Retomemos a equação da linha elástica

$$y = \frac{Px^2}{6EI}(3L - x)$$

E, conforme já exposto, a máxima deflexão ocorre na extremidade livre da viga, em x = l, sendo dada por

$$y_{\max} = \frac{PL^3}{3EI}$$

Combinando-se estas duas últimas expressões escrevemos

$$y(x) = \frac{y_{\max} x^2}{2l^3}(3l - x) = \frac{y_{\max}}{2l^3}\left(3x^2 l - x^3\right)$$

E, a expressão para a velocidade da extremidade (M) é

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\dot{y}_{\max}}{2l^3}\left(3x^2 l - x^3\right)$$

Cont. ... Modelo # 3

E, a expressão da energia cinética da viga (massa total m) é então escrita como

$$T = \int_0^l \frac{1}{2} m \dot{v}^2 \, dx = \frac{m}{2l} \left(\frac{\dot{y}_{\max}}{2l^3} \right)^2 \int_0^l \left(3x^2 l - x^3\right)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{m}{l} \frac{\dot{y}_{\max}^2}{4l^6} \left(\frac{33}{35} l^7 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{33}{140} m \right) \dot{y}_{\max}^2$$

E, seguindo procedimento idêntico ao anterior temos

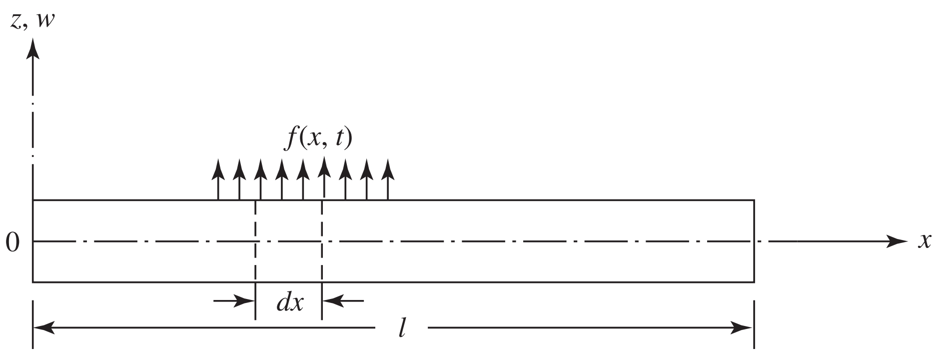
$$M_{\mathrm{eq}} = M + \left(\frac{33}{140} \right) m = M + 0{,}2357 m$$

Então, baseado neste procedimento a viga contribui com aproximadamente 23,57 % de sua massa total para a massa equivalente do modelo

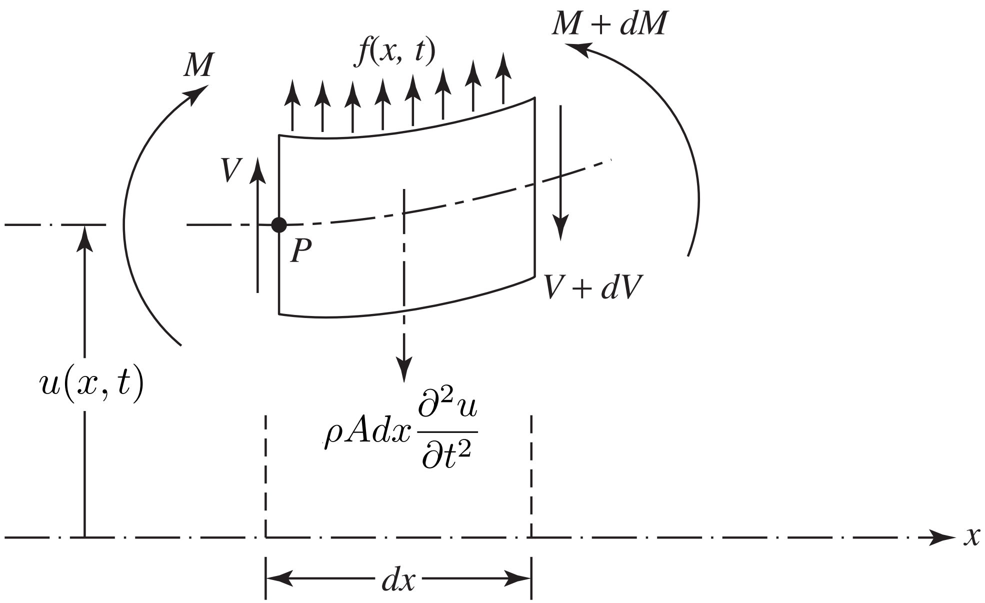
$$M_{eq} \ddot{u} + K_{eq} u = p(t) \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{M_{eq}}} = \sqrt{\frac{\frac{3EI}{L^3}}{\left(M + \frac{33}{140} m\right)}}$$

Cont. ... Modelo # 4

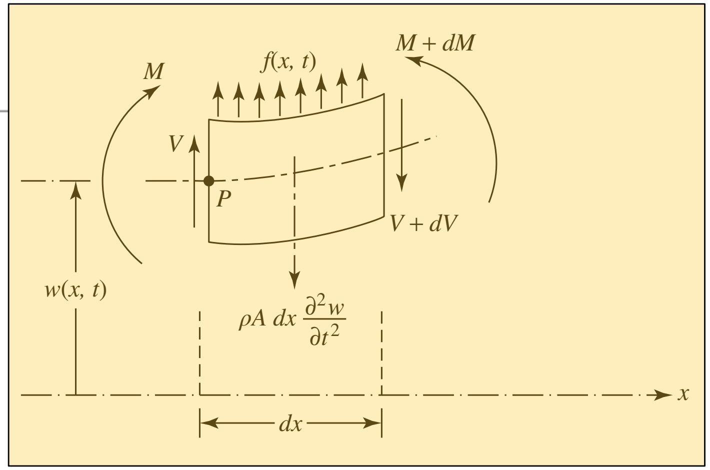
Neste caso consideraremos a viga como um meio contínuo (parâmetros distribuídos)



Abaixo é mostrado o diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal da viga



Cont. ... Modelo # 4



As equações de equilíbrio do elemento são:

$$-(V + dV) + f(x,t)dx + V = \rho A(x)dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$$

$$(M + dM) - (V + dV)dx + f(x,t)dx\frac{dx}{2} - M = 0$$

E, combinando estas duas últimas equações

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}(x,t) + f(x,t) = \rho A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$$

Da mecânica dos sólidos elementar temos

$$M(x,t) = EI(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

Cont. ... Modelo # 4

Combinando-se estas duas últimas expressões temos finalmente

$$\rho A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right] = f(x,t)$$

E, para o caso de uma viga de secção transversal uniforme

$$\boxed{\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) = f(x,t)}$$

A qual representa uma EDP de quarta ordem. Esta equação corresponde ao modelo Para o deslocamento vertical da viga somente e para adequá-la ao problema com o engaste numa extremidade e a massa concentrada na outra temos que introduzir as chamadas condições de contorno ! (veremos mais adiante no curso !)