Prova Substitutiva de Mecânica dos Fluidos II – PME3330   10/07/2023

Nome:____NUSP:__________

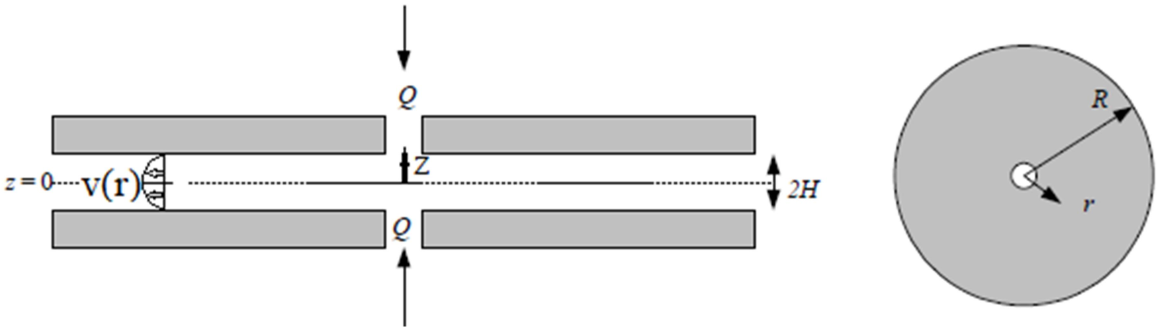
1ª Questão (4,0 pontos) – Considere o escoamento radial $v_z = v_\theta = 0, v_r = v_r(r,z)$ de um fluido de propriedades ρ e μ entre dois discos concêntricos estacionários de raio R separados por uma distância $2H$ na direção z. O escoamento é causado pela entrada de vazões volumétricas Q através de furos no centro de ambos os discos e é permanente, incompressível, com viscosidade constante e efeitos gravitacionais desprezíveis. Considere também que as acelerações são desprezíveis (escoamento de inércia desprezível).

a)Mostre que a velocidade radial $v_r(r,z)$ é da forma $v_r = f(z)/r$ usando a equação da continuidade. (0,5 ponto)

b)Usando as equações de Navier-Stokes mostre que a pressão é uma função apenas do raio, ou seja $p = p(r)$. (0,5 ponto)

c)Obtenha o perfil da função $f(z)$ e da velocidade radial v_r como função de dp/dr, z , r e dos parâmetros do problema μ e H. (2,0 pontos)

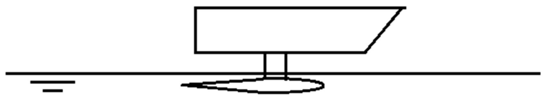
d)Obtenha a velocidade média do perfil do ítem anterior $V = V(r)$ entre $z = \pm H$ para uma posição radial r arbitrária e determine o gradiente de pressões dp/dr em função de r e dos parâmetros do problema μ, H e Q. Substituindo dp/dr, obtenha expressões finais para $f(z)$ e $v_r(r,z)$ (1,0 pontos)



2ª Questão (3,0 pontos) – O escoamento irrotacional externo a uma camada limite laminar é dado por $U = A\,x^{1/2}$. O escoamento é permanente, bidimensional e incompressível. Temos que a tensão de cisalhamento na parede é dada por $\tau_o = \beta\,\mu\,U/\delta$, onde β é uma constante. As espessuras de deslocamento e quantidade de movimento são dadas por $\delta^* = \gamma\delta$ e $\theta = \alpha\delta$, onde γ e α são constantes. A espessura da camada limite resulta $\delta = C\,x^m$. Determine o expoente m. Determine o coeficiente C como função de A, α, β, γ e das propriedades ρ e μ do fluido.

3ª Questão (3,0 pontos) – Um barco com peso *m*g é suportado por um hidrofólio simétrico (sem arqueamento) de razão de aspecto *RA* e área planiforme A_p. O coeficiente de arrasto para razão de aspecto infinita do perfil do hidrofólio é $C_{D\infty}$. Por meio de um sistema de controle, o ângulo de ataque α é ajustado para as diferentes condições de operação. Suponha que o barco navega em cruzeiro na condição ideal para a qual $C_D = 2C_{D\infty}$, através de água de massa específica ρ.

a)Supondo que as forças de arrasto e sustentação se devem só ao hidrofólio, obtenha expressões para a velocidade de cruzeiro U_{cr}, ângulo de ataque de cruzeiro α_{cr} (em radianos) e potência consumida W_{cr} em função de m, g, RA, A_p, $C_{D\infty}$ e ρ . (2,0 pontos)
b)Suponha agora que o motor é capaz de fornecer uma potência W_{max}. Obtenha uma expressão que permita o cálculo da velocidade U_{max} nessa condição, envolvendo $W_{\max}$, m, g, RA, A_p, $C_{D\infty}$ e ρ. Obs.: note que agora não teremos mais a condição ideal $C_D = 2C_{D\infty}$. (1,0 ponto)



Formulário

Continuidade e Navier-Stokes: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_r) + \frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\theta\frac{\partial v_r}{r\partial\theta} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{{v_\theta}^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right]$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_\theta\frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\partial\theta} + g_\theta + \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right]$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + v_\theta\frac{\partial v_z}{r\partial\theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]$$

$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right)dy$ $\theta = \int_0^\delta \left[\frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right)\right]dy$ $\frac{c_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{U}\frac{dU}{dx}\left(2 + \frac{\delta^*}{\theta}\right)$

$c_f = \frac{\tau_o}{\frac{1}{2}\rho\,U^2}$ onde τ_o é a tensão na parede $\tau_o = \rho u^{*2}$ $C_D = \frac{1}{L}\int_0^L c_f\ dx$ $F_x = \frac{1}{2}\rho\,U^2\,A\,C_D$

$L = \frac{1}{2}\rho\,U^2\,A_p\,C_L$ $D = \frac{1}{2}\rho\,U^2\,A_p\,C_D$ $C_L = \frac{2\pi\,(\alpha+\beta)}{1+\frac{2}{RA}}$ (α e β em radianos)

$C_D = C_{D\infty} + \frac{{C_L}^2}{\pi\,RA}$ $RA = \frac{b^2}{A_p}$ $\beta = arctan\left(\frac{2h}{c}\right)$

Gabarito

1ª Questão (4,0 pontos)

a)Da equação da continuidade, uma vez que $v_z = v_\theta = 0, v_r = v_r(r,z)$:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_r) = 0$$

Uma fez que $v_r = v_r(r,z)$, ou seja, v_r não é função de θ:

$r\, v_r = f(z)$ de onde $v_r = \frac{f(z)}{r}$.

b)Das equações de Navier-Stokes nas direções tangencial θ e axial z , uma vez que $v_z = v_\theta = 0, v_r = v_r(r,z)$ e os efeitos gravitacionais e as acelerações são desprezíveis, obtemos:

$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$ logo $p = p(r)$ e podemos escrever $\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dp}{dr}$.

c)Da equação de Navier-Stokes na direção radial r, uma vez que $v_z = v_\theta = 0, v_r = f(z)/r$ e os efeitos gravitacionais e as acelerações são desprezíveis:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{r}{\mu}\frac{dp}{dr}$$

Integrando a primeira vez:

$$\frac{df}{dz} = \frac{r}{\mu}\frac{dp}{dr}z + C_1$$

Integrando a segunda vez:

$$f = \frac{r}{\mu}\frac{dp}{dr}\frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2$$

Como $f(z) = 0$ para $z = \pm H$ pois a velocidade é nula sobre os discos:

$C_1 = 0$ e $C_2 = -\frac{r}{\mu}\frac{dp}{dr}\frac{H^2}{2}$

Assim:

$f = \frac{r}{2\mu}\frac{dp}{dr}(z^2 - H^2)$ e $v_r = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dr}(z^2 - H^2)$

e)Integrando o perfil de velocidade para achar a velocidade média em uma posição r arbitrária:

$$V = \frac{1}{2H}\int_{-H}^{+H} \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dr}(z^2 - H^2)\, dz = -\frac{H^2}{6\mu}\frac{dp}{dr}$$

Mas essa velocidade média tem ser igual à vazão total de entrada $2Q$ dividida pela área da seção de escoamento, que é uma área cilíndrica de circunferência $2\pi r$ e altura $2H$:

$$V(r) = -\frac{H^2}{6\mu}\frac{dp}{dr} = \frac{Q}{H.2\pi r}$$

Assim:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{3\mu Q}{2\pi H^3 r}$$

E a função $f(z)$ e a velocidade radial v_r resultam:

$$f(z) = \frac{3Q}{4\pi \;\;^3}(H^2 - z^2) \text{ e } v_r(r,z) = \frac{3Q}{4\pi H^3 r}(H^2 - z^2)$$

2ª Questão (3,0 pontos)

Da equação integral da camada limite:

$$\frac{c_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{U}\frac{dU}{dx}\left(2 + \frac{\delta^*}{\theta}\right)$$

Isso resulta:

$$\frac{\tau_o}{\rho U^2} = \frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{U}\frac{dU}{dx}\left(2 + \frac{\delta^*}{\theta}\right)$$

Substituindo as expressões dadas para a tensão de cisalhamento e espessuras de deslocamento e quantidade de movimento:

$$\frac{\beta\mu U/\delta}{\rho U^2} = \alpha\,\frac{d\delta}{dx} + \frac{\alpha\delta}{U}\frac{dU}{dx}\left(2 + \frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

Isso resulta:

$$\frac{\beta\mu}{\rho U\delta} = \alpha\,\frac{d\delta}{dx} + \frac{\alpha\delta}{U}\frac{dU}{dx}\left(2 + \frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

Substituindo as expressões para a velocidade externa e espessura da camada limite:

$$\frac{\beta\mu}{\rho A x^{1/2} C x^m} = \alpha\, C m x^{m-1} + \frac{\alpha C x^m}{A x^{1/2}} A \frac{1}{2} x^{-1/2}\left(2 + \frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

Isso resulta:

$$\frac{\beta}{AC}\frac{\mu}{\rho} x^{-m-1/2} = \alpha\, C m x^{m-1} + \frac{\alpha C}{2} x^{m-1}\left(2 + \frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

Ou seja:

$$\frac{\beta}{AC}\frac{\mu}{\rho} x^{-m-1/2} = C\alpha\left[m + 1 + \frac{\gamma}{2\alpha}\right] x^{m-1}$$

Do expoente de x:

$-m - \frac{1}{2} = m - 1$ que resulta $m = \frac{1}{4}$

Dos coeficientes:

$$C^2 = \frac{\beta}{A\alpha\left[m+1+\frac{\gamma}{2\alpha}\right]}\frac{\mu}{\rho}$$

Isso resulta:

$$C = \sqrt{\frac{\beta}{A\alpha\left[\frac{5}{4}+\frac{\gamma}{2\alpha}\right]}\frac{\mu}{\rho}}$$

3ª Questão (3,0 pontos)

a)Em cruzeiro, temos C_D=2$C_{D\infty}$. Da expressão do coeficiente de arrasto:

$$C_D = C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi\ RA} = 2C_{D\infty} \quad \text{logo} \quad C_L = \sqrt{\pi\, RA\, C_{D\infty}}$$ na condição de cruzeiro.

Lembrando que se não há arqueamento (β = 0) vamos ter, da expressão do coeficiente de sustentação:

$$C_L = \frac{2\pi\,\alpha_{cr}}{1+\dfrac{2}{RA}} = \sqrt{\pi\, RA\, C_{D\infty}}$$

Dessa expressão obtemos o ângulo de ataque em cruzeiro:

$$\boxed{\alpha_{cr} = \frac{1}{2}\cdot\pi^{-\frac{1}{2}}\cdot(RA+2)\cdot RA^{-\frac{1}{2}}\cdot C_{D\infty}{}^{\frac{1}{2}}}$$

Lembrando que a força de sustentação tem que equilibrar o peso:

$$mg = \frac{1}{2}\rho U^2\, C_L A_p$$

Na condição de cruzeiro, onde $C_L = \sqrt{\pi\, RA\, C_{D\infty}}$:

$$mg = \frac{1}{2}\rho U_{cr}{}^2\left(\pi\, RA\, C_{D\infty}\right)^{\frac{1}{2}} A_p$$

Dessa expressão obtemos a velocidade de cruzeiro:

$$\boxed{U_{cr} = \left(\frac{2mg}{\rho\, A_p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\pi\, RA\, C_{D\infty}\right)^{-\frac{1}{4}}}$$

A potência consumida é dada pelo produto de arrasto e velocidade:

$$W = DU$$

Ou seja:

$$W = \frac{1}{2}\rho U^3 C_D A_p$$

Mas em cruzeiro temos C_D=2$C_{D\infty}$. Assim:

$$W_{cr} = \rho U_{cr}{}^3 C_{D\infty} A_p$$

Substituindo agora a expressão da velocidade de cruzeiro:

$$W_{cr} = \rho \cdot \left(\frac{2mg}{\rho A_p}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\pi RA C_{D\infty}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot C_{D\infty} A_p$$

Resulta:

$$\boxed{W_{cr} = (2mg)^{\frac{3}{2}} \left(\rho A_p\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\pi RA\right)^{-\frac{3}{4}} C_{D\infty}{}^{\frac{1}{4}}}$$

b)A potência máxima será:

$$W_{\max} = \frac{1}{2}\rho U_{\max}{}^3 C_D A_p$$

Substituindo o coeficiente de arrasto na expressão acima:

$$W_{\max} = \frac{1}{2}\rho U_{\max}{}^3 \left(C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi RA}\right) A_p$$

Por outro lado, a sustentação tem que contrabalançar o peso:

$$C_L = \frac{2mg}{\rho U_{\max}^2 A_p}$$

Substituindo esta última expressão na anterior:

$$W_{\max} = \frac{1}{2}\rho U_{\max}{}^3 \left(C_{D\infty} + \frac{4m^2 g^2}{\rho^2 \pi RA A_p^2} \frac{1}{U_{\max}{}^4}\right) A_p$$

Assim: $$\boxed{W_{\max} = \frac{1}{2}\rho C_{D\infty} A_p U_{\max}{}^3 + \frac{2m^2 g^2}{\rho \pi RA A_p} \frac{1}{U_{\max}}}$$