Revisão (Integrais impróprias)
Aula 39

Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

Primeiro Semestre de 2023

Exercício

a) Calcule $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1+t}{1+t^2}\,dt$ *e* $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{-R}^{2R}\frac{1+t}{1+t^2}\,dt.$

b) A integral imprópria $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+t}{1+t^2}\,dt$ *é convergente? Justifique sua resposta.*

Critérios de Cauchy e Dirichlet

Exercício (Critério de Cauchy para Convergência)

Dada uma função contínua $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *, a integral*

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

é convergente se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ *existe* $K = K(\epsilon) \geq a$ *tal que*

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \right| < \epsilon$$

sempre que $\beta, \alpha \geq K$*.*

Resolução: **($\Leftarrow$)** Dado $\epsilon > 0$, seja $K = K(\epsilon) > 0$ tal que, se $r \geq K$,

$$0 \leq g(r) := \sup_{\beta\in[r,\infty)} \int_a^\beta f(x)dx - \inf_{\alpha\in[r,\infty)} \int_a^\alpha f(x)dx := h(r) \leq \epsilon$$

Como $g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ é decrescente e $h : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ é crescente, ambas são limitadas e $\epsilon > 0$ é arbitrário,

$$\lim_{r\to\infty} g(r) = \lim_{r\to\infty} h(r), \quad \text{e} \quad h(r) \leq \int_a^r f(x)dx \leq g(r).$$

Do Teorema do Confronto obtemos que

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

é convergente. A outra implicação segue da definição de limite.

Lembrar: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Prova: Basta observar que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Exercício (Convergência Absoluta)

Seja $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $\int_a^\infty |f(x)|dx$ é convergente, então $\int_a^\infty f(x)dx$ é convergente.

Resolução: Basta notar que, dado $\epsilon > 0$ existe $K = K(\epsilon)$ tal que

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|dx < \epsilon, \quad \forall\ \beta \geq \alpha \geq K.$$

e aplicar o Critério de Cauchy.

Exemplo

Mostre que $\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2} dx$ é convergente.

Basta observar que $\left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ para todo $x \geq 1$.

Exercício (Critério de Dirichlet)

Dada uma função contínua $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ *tal que* $F:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ *definida por*

$$F(x)=\int_a^x f(s)ds, \quad x\geq a,$$

seja limitada e $g:[a,\infty)\to(0,\infty)$ *uma função com derivada contínua, com* $g'(x)\leq 0$ *para todo* x *e tal que* $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$*. Então*

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx$$

é convergente.

Resolução: Para quaisquer $\beta \geq \alpha \geq a$, por integração por partes:

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = F(\beta)g(\beta) - F(\alpha)g(\alpha) - \int_\alpha^\beta F(x)g'(x)dx$$

Agora estimamos cada um dos termos à direita:

$$|F(\beta)g(\beta) - F(\alpha)g(\alpha)| \leq M(g(\beta) + g(\alpha)) \leq 2M\, g(\alpha)$$

$$\left|\int_\alpha^\beta F(x)g'(x)dx\right| \leq M \int_\alpha^\beta -g'(x)dx = M(g(\alpha)-g(\beta)) \leq M\, g(\alpha)$$

Como $\lim_{\alpha\to\infty} g(\alpha) = 0$, podemos usar então o Critério de Cauchy para obter o resultado.

Exercício

Mostre, usando o Critério de Dirichlet, que a integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx$$

é convergente.

Exercício

Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, limitada, com derivada contínua e limitada em* $[0, \infty)$. *Considere* $L(f) : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$L(f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

denominada **transformada de Laplace** *associada a função* f.
a) Mostre que a função $L(f)$ *está bem definida (isto é, a integral imprópria é convergente para cada* $s > 0$*);*
b) Mostre que $L(f')(s) = s\, L(f)(s) - f(0), \quad s > 0$. *Sugestão: use integração por partes.*
c) Encontre a transformada de Laplace das seguintes funções:

$$i)\ f(t) = 1 \qquad ii)\ f(t) = t \qquad iii)\ f(t) = \operatorname{sen}(t), \qquad t \geq 0.$$

Respostas: $1/s$, $1/s^2$, $1/(s^2+1)$

Exercícios Interessantes

Exercício

Estude a convergência das integrais abaixo e o calcule o seu valor quando forem convergentes.

$$a)\ \int_e^{\infty} \frac{1}{x\,(\ln(x))^p}\,dx,\ \ p>0, \qquad b)\ \int_1^{e} \frac{1}{x\,(\ln(x))^p}\,dx,\ \ p>0$$

Exercício

Se $p \geq q \geq 0$, determine os valores de p e q para os quais a integral abaixo converge e aqueles para os quais a integral diverge.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^p + x^q}\,dx.$$

Exercício

A função Gamma $\Gamma : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *é definida por*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}\, e^{-t}\, dt.$$

Mostre que (Sugestão: Integre por partes):

- *A integral imprópria acima é convergente, para cada* $\alpha > 0$.
- $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha),\ \forall\ \alpha > 0$.
- $\Gamma(n+1) = n!\,,\ n \geq 1.$