

Álgebra Linear e Aplicações

- *Matrizes positivas.*
- *Decomposição SVD.*



MATRIZES POSITIVAS

DEFINIÇÃO: DIZEMOS QUE $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ É POSITIVA (OU POSITIVA DEFINIDA) SE

1) A É SIMÉTRICA.

2) $\underbrace{x^T A x}_{= \langle x, Ax \rangle} > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

SEJA $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. DEFINIMOS $A_j \in M_{j,j}(\mathbb{R})$ POR

$$A_1 = [A_{11}] \in M_{1,1}(\mathbb{R})$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

$$A_j = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{j1} & \dots & A_{jj} \end{bmatrix} \in M_{j,j}(\mathbb{R})$$

$$A_n = A$$

EXEMPLO: $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

$$A_1 = [a]$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}$$

$$A_3 = A.$$

CARACTERIZAÇÃO DE MATRIZES POSITIVAS:

TEOREMA: SEJA $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ SIMÉTRICA. LOGO EQUIVALEM AS AFIRMAÇÕES ABAIXO:

a) A É POSITIVA. ($x^T A x > 0$ SE $x \neq 0$)

b) TODOS OS AUTOVALORES DE A SÃO POSITIVOS: $\lambda_i > 0, \forall i$.

c) $\det A_k > 0, \forall k \in \{1, \dots, n\}$

OS PIVÔS SÃO
POSITIVOS.

d) A É INVERSÍVEL, $A = LU$, L TRIANGULAR INFERIOR COM $L_{ii} = 1$ E U TRIANGULAR SUPERIOR COM $U_{ii} > 0, \forall i$.

e) $A = B^T B, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ COM COLUNAS L.I.

DEMO: COMO A É SIMÉTRICA, SABEMOS QUE $\exists$ UMA BASE ORTONORMAL $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ DE $\mathbb{R}^n$ TAL QUE $Av_j = \lambda_j v_j, \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

a) $\Rightarrow$ b). BASTA OBSERVAR QUE $0 < v_i^T A v_i = \lambda_i v_i^T v_i = \lambda_i$.

b) $\Rightarrow$ a) SEJA $x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. LOGO $x^T A x = \langle x, Ax \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, A \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j v_j \rangle$
 $= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \lambda_i \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i > 0$ SE $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$
 $\Leftrightarrow x \neq 0$.

a) $\Rightarrow$ c) SEJA $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) := \tilde{x} \oplus 0_{n-k}$, EM QUE $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$
 $0_{n-k} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-k}$

LOGO $x^T A x = \underbrace{[\tilde{x}^T \ 0]}_{=A} \begin{bmatrix} A_k & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ 0 \end{bmatrix} = [\tilde{x}^T \ 0] \begin{bmatrix} A_k \tilde{x} \\ C \tilde{x} \end{bmatrix} = \tilde{x}^T A_k \tilde{x}$

PORTANTO, SE $\tilde{x} \neq 0$, ENTÃO $x \neq 0$. LOGO $\tilde{x}^T A_k \tilde{x} = x^T A x > 0$. CONCLUÍMOS QUE A_k É POSITIVA. LOGO TODOS OS AUTOVALORES DE A_k SÃO > 0 . PORTANTO $\det(A_k) > 0$, $\forall k$.

c) $\Rightarrow$ d) PELA HIPÓTESE, $\det A = \det A_n > 0 \Rightarrow A$ É INVERTÍVEL.

$\det A_k \neq 0, \forall k \Rightarrow A = LU$ (NÃO PRECISA DE PERMUTAÇÕES).

LEMBRAMOS QUE SE $A = LU$, ENTÃO $\underbrace{\begin{bmatrix} A_k & B \\ C & D \end{bmatrix}}_{:=A} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_k & 0 \\ E & F \end{bmatrix}}_{:=L} \underbrace{\begin{bmatrix} U_k & G \\ 0 & H \end{bmatrix}}_{:=U} \Rightarrow A_k = L_k U_k$

ASSIM, $\det(A_k) = \underbrace{\det(L_k)}_{:=1} \underbrace{\det(U_k)}_{:=d_1 \dots d_k} = d_1 \dots d_k$, EM QUE $d_i = U_{ii}$ SÃO OS PIVÔS DE A .

LOGO, $d_1 = \det(A_1) > 0$ E $d_{k+1} = \frac{d_1 \dots d_{k+1}}{d_1 \dots d_k} = \frac{\det(A_{k+1})}{\det(A_k)} > 0$, $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$.

d) $\Rightarrow$ a) COMO A É SIMÉTRICA E $A = LU$, ENTÃO $A = L D L^T$. ASSIM,

$x^T A x = x^T L D L^T x = (L^T x)^T D (L^T x) \underset{y=L^T x}{=} y^T D y = d_1 y_1^2 + \dots + d_n y_n^2 > 0$ SE $y \neq 0$. MAS $y \neq 0 \Leftrightarrow L^T x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

e) $\Rightarrow$ a) NOTE QUE $x^T A x = x^T R^T R x = (R x)^T (R x) = \|R x\|^2 \geq 0$ E $R x = 0 \Leftrightarrow c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 LOGO $x^T A x > 0$ SE $x \neq 0$.
AS COLUMNS $\uparrow$ SÃO LI
 c_j É j-ÉSIMA COLUMNA DE R

a) $\Rightarrow$ e) DEMO 1:

COMO A É SIMÉTRICO E POSITIVO, SABEMOS QUE $\exists$ UMA MATRIZ ORTOGONAL $Q \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ E UMA MATRIZ DIAGONAL $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$, SENDO $\lambda_i > 0$ OS AUTOVALORES, TAL QUE $Q^{-1} A Q = \Lambda \Leftrightarrow A = Q \Lambda Q^{-1}$.

SEJA $\Pi = \begin{bmatrix} \mathbb{R} & 0 \\ 0 & \mathbb{R} \end{bmatrix}$. LOGO $A = Q \Lambda Q^{-1} = Q \Pi \Pi Q^{-1} = \underbrace{(Q \Pi Q^{-1})}_{R^T} \underbrace{(Q \Pi Q^{-1})}_R = R^T R$.

NOTE QUE R TEM COLUNAS L.I., POIS É INVERTÍVEL. NOTE TAMBÉM QUE $(Q \Pi Q^T)^T = (Q^T)^T \Pi^T Q^T = Q \Pi Q^T$
ASSIM, $R^T = R$.
POIS $Q^T = Q^T$
 $\Pi^T = \Pi$

DEMO 2: VIMOS QUE $A = LDL^T$. LOGO $A = L \sqrt{D} \sqrt{D} L^T = (\sqrt{D} L^T)^T (\sqrt{D} L^T) = R^T R$

NOVAMENTE $\sqrt{D} L^T$ TEM COLUNAS L.I., POIS É INVERTÍVEL

A DECOMPOSIÇÃO $A = R^T R$, $R = \sqrt{D} L^T$ É CHAMADA DE CHOLESKY.

NOTE QUE R É TRIANGULAR SUPERIOR E $R_{ii} = R_{ii}$.

R^T É TRIANGULAR INFERIOR

(É COMO UMA DECOMPOSIÇÃO LU EM QUE $L = U^T$ E, PORTANTO, $L_{ii} = U_{ii}$)

EXEMPLO: A MATRIZ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ É POSITIVA.

DEMO: A É SIMÉTRICA. PODEMOS USAR OS CRITÉRIOS ANTERIORES.

i) USANDO AUTOVALORES

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)^3 - (2-\lambda) - (2-\lambda) = (2-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 2] \Rightarrow p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 2 \pm \sqrt{2}.$$

COMO $2, 2 \pm \sqrt{2} > 0$, VEMOS QUE A É POSITIVA.

ii) USANDO DETERMINANTES

$$\left. \begin{array}{l} \text{VEMOS QUE } \det(A_1) = \det([2]) = 2 > 0 \\ \det(A_2) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 3 > 0 \\ \det(A_3) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 4 > 0 \end{array} \right\} A \text{ É POSITIVA.}$$

iii) USANDO PIVÔS

VEMOS QUE

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$L_2 = L_2 + \frac{1}{2}L_1$$

$$L_3 = L_3 + \frac{2}{3}L_2$$

Assim, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$. Como $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3} > 0$, vemos que A é positiva.

iv) $x^T A x > 0, x \neq 0$

Vemos que $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L^T} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$= 2\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{2}{3}z\right)^2 + \frac{4}{3}z^2 \geq 0$$

$$\text{e } \epsilon = 0 \Leftrightarrow z=0, y-\frac{2}{3}z=0 (\Leftrightarrow y=0), x-\frac{y}{2}=0 (\Leftrightarrow x=0)$$

A DECOMPOSIÇÃO DE CHOLSKY É DADA POR $A = R^T R$, EM QUE

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{bmatrix}. \text{ Logo}$$

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{bmatrix} = R^T R$$

PODERÍAMOS TAMBÉM DEFINIR MATRIZES POSITIVAS SEMIDEFINIDAS. NESTE CASO, TERÍAMOS
 A É POSITIVA SEMIDEFINIDA $(x^T A x \geq 0, \forall x) \Leftrightarrow A$ É SIMÉTRICA E AUTOVALORES SÃO ≥ 0 .

OUTRAS CARACTERIZAÇÕES TAMBÉM PODERIAM SER ENCONTRADAS

DECOMPOSIÇÃO SVD

SEJA $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. A DECOMPOSIÇÃO SVD NOS DIZ QUE

$$A = U \Sigma V^T \text{ COM } U \in M_{m,m}(\mathbb{R}) \text{ ORTOGONAL}$$

$$V \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \text{ ORTOGONAL}$$

$$\Sigma \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \text{ DIAGONAL } (\Sigma_{ij} = 0, \text{ SE } i \neq j)$$

$$\text{NESTE CASO, TERÍAMOS } A^T A = (U \Sigma V^T)^T (U \Sigma V^T) = V \Sigma^T \Sigma V^T$$

$$A A^T = U \Sigma V^T (U \Sigma V^T)^T = U \Sigma \Sigma^T U^T$$

LOGO VEMOS QUE

1) COLUNAS DE V SÃO AUTOVECTORES DE $A^T A$ (BASE ORTONORMAL)

2) COLUNAS DE U SÃO AUTOVECTORES DE $A A^T$ (BASE ORTONORMAL)

3) SE $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ 0 & \sigma_n & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}$, ENTÃO $\Sigma^T \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \sigma_n^2 & 0 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$. LOGO σ_j^2 SÃO AUTOVALORES DE $A^T A$ E $A A^T$.
 $\Sigma \Sigma^T = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \sigma_n^2 & 0 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$

NOTE QUE SE $U = \begin{bmatrix} | & \dots & | \\ u_1 & \dots & u_m \\ | & \dots & | \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} | & \dots & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & \dots & | \end{bmatrix}$ E $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ 0 & \sigma_n & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}$, ENTÃO

$$U \Sigma V^T = \begin{bmatrix} | & \dots & | \\ u_1 & \dots & u_m \\ | & \dots & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \sigma_n & 0 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -v_1^T \\ \vdots \\ -v_n^T \end{bmatrix} = \sigma_1 u_1 v_1^T + \dots + \sigma_n u_n v_n^T. \text{ (SOMA DE MATRIZES DE POSTO ZERO)}$$

TEOREMA: TODA MATRIZ $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ADMITE UMA DECOMPOSIÇÃO SVD.

DEMO: A MATRIZ $A^T A$ É SIMÉTRICA, POIS $(A^T A)^T = A^T A^{TT} = A^T A$, E SEMI DEFINIDA, POIS
 $x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0$.

LOGO $\exists$ UMA BASE ORTONORMAL $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ DE $\mathbb{R}^n$ TAL QUE $A^T A v_j = \lambda_j v_j$, COM $\lambda_j \geq 0$.

SUPONHA QUE $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0 = \lambda_{n+1} = \dots = \lambda_n$. SEJA $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$.

DEFINIMOS $\{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathbb{R}^n$ POR $u_j = \frac{1}{\sigma_j} A v_j$. LOGO

$$\langle u_i, u_j \rangle = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \langle A v_i, A v_j \rangle = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \langle v_i, A^T A v_j \rangle = \frac{\sigma_j^2}{\sigma_i \sigma_j} \langle v_i, v_j \rangle = \frac{\sigma_j^2}{\sigma_i \sigma_j} \delta_{ij} = \delta_{ij}.$$

POIS $\frac{\sigma_j^2}{\sigma_i \sigma_j} = 1$ SE $i = j$.

VEMOS QUE $\{u_1, \dots, u_n\}$ SÃO ORTONORMAIS. PORTANTO, PODEMOS COMPLETAR PARA UMA BASE ORTONORMAL $\{u_1, \dots, u_m\}$ DE $\mathbb{R}^m$. NOTAMOS QUE

$$A \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n & v_{n+1} & \dots & v_m \end{bmatrix}}_{:=V} = \begin{bmatrix} A v_1 & \dots & A v_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 u_1 & \dots & \sigma_n u_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n & u_{n+1} & \dots & u_m \end{bmatrix}}_{:=U} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_n & & 0 \\ & & & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{:=\Sigma}$$

CONCLUÍMOS QUE $U^T A V = \Sigma$ ■

EXEMPLO: $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

NESTE CASO $A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

NOTE QUE $p_{A^T A}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda)$

$$= (1-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda) - 2]$$

$$= (1-\lambda)[2 - 3\lambda + \lambda^2 - 2]$$

$$= \lambda(1-\lambda)(\lambda-3) \quad \therefore \lambda = 0, 1 \text{ ou } 3.$$

AUTOVETORES $\lambda = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (1, 1, 1) \text{ É AUTOVETOR}$$

$$\underline{\lambda=1} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (1, 0, -1) \text{ É AUTOVETOR}$$

$$\underline{\lambda=3} \quad \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (-1, 2, -1) \text{ É AUTOVETOR}$$

PORTANTO, PODEMOS ESCOLHER $V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

PARA U , VEMOS QUE $A v_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

$$A v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Logo $A = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{:=U} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{:=\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}}_{:=V^T}$