

Álgebra Linear e Aplicações

- *Método das Potências.*
- *Algoritmo QR.*



MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ACHAR AUTOVALORES E AUTOVETORES

MÉTODO DAS POTÊNCIAS

SEJA $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ DIAGONALIZÁVEL. SUPONHA QUE $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ SEJA UMA BASE DE AUTOVETORES COM $Ae_j = \lambda_j e_j$ E $\lambda_1 > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \dots > |\lambda_n|$. LOGO SE $x \in \mathbb{C}^n$, ENTÃO $x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$.

ASSIM, $Ax = a_1 \lambda_1 e_1 + \dots + a_n \lambda_n e_n$

$$A^k x = a_1 \lambda_1^k e_1 + \dots + a_n \lambda_n^k e_n, \quad k \geq 1.$$

LOGO $A^k x = \lambda_1^k \left(a_1 e_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k e_2 + \dots + a_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k e_n \right) \approx a_1 \lambda_1^k e_1$ PODEMOS DETERMINAR λ_1 E e_1 .

VAMOS USAR ISTO PARA ACHAR UM ALGORITMO PARA DETERMINAR O MAIOR AUTOVALOR E O AUTOVETOR ASSOCIADO

ALGORITMO (MÉTODO DAS POTÊNCIAS)

1) ESCOLHA $x_0 = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$, COM $a_1 \neq 0$

2) PARA $j \geq 0$:

$$y_{j+1} = Ax_j$$

$$x_{j+1} = \frac{y_{j+1}}{\|y_{j+1}\|_p}$$

RECORDAÇÃO: $\|x\|_p = \max |x_j|$

TEOREMA: SEJA $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ DIAGONALIZÁVEL, $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ UMA BASE DE $\mathbb{R}^n$ COM $Ae_j = \lambda_j e_j$, $\lambda_1 > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \dots > |\lambda_n|$ OU $\mathbb{C}^n$
E $x_0 = \sum_{j=1}^n a_j e_j$, $a_1 \neq 0$. LOGO $\lim_{j \rightarrow \infty} \|y_j\|_p = \lambda_1$ E $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = x_\infty$ COM $\|x_\infty\|_p = 1$ E $Ax_\infty = \lambda_1 x_\infty$.

DEMO: PELA CONSTRUÇÃO DO ALGORITMO, VEMOS QUE $x_j = CA^j x_0$, EM QUE C É DADO POR $C := (\|Ax_0\|_p, \|Ax_1\|_p, \|Ax_2\|_p, \dots)$. COMO $\|x_j\|_p = 1$ E $A^j x = \lambda_1^j \left(a_1 e_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^j e_2 + \dots + a_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^j e_n \right)$, CONCLUÍMOS QUE

$$x_j = \frac{a_1 e_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^j e_2 + \dots + a_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^j e_n}{\|a_1 e_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^j e_2 + \dots + a_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^j e_n\|_p}$$

ASSIM, VEMOS QUE $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = \frac{a_1 e_1}{\|a_1 e_1\|_p} =: x_\infty$, POIS $\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$, SE $\lambda_n < \lambda_1$.

Por outro lado, temos

$$y_j = Ax_{j-1} = A \left(\frac{a_1 e_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{j-1} e_2 + \dots + a_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{j-1} e_n}{\left\| a_1 e_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{j-1} e_2 + \dots + a_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{j-1} e_n \right\|_p} \right) = \frac{a_1 \lambda_1 e_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{j-1} \lambda_2 e_2 + \dots + a_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{j-1} \lambda_n e_n}{\left\| a_1 e_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{j-1} e_2 + \dots + a_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{j-1} e_n \right\|_p}$$
$$= \lambda_1 \left(\frac{a_1 e_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^j e_2 + \dots + a_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^j e_n}{\left\| a_1 e_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{j-1} e_2 + \dots + a_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{j-1} e_n \right\|_p} \right)$$

Assim, $\|y_j\|_p = \lambda_1 \frac{\|a_1 e_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^j e_2 + \dots + a_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^j e_n\|_p}{\left\| a_1 e_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{j-1} e_2 + \dots + a_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{j-1} e_n \right\|_p}$, pois $\lambda_1 > 0$.

Portanto, $\lim_{j \rightarrow \infty} \|y_j\|_p = \frac{\|a_1 e_1\|_p}{\|a_1 e_1\|_p} \lambda_1 = \lambda_1$. ■

OBSERVAÇÃO 1) Com um pouco mais de cuidado, podemos mostrar que $|\lambda_1 - \|y_j\|_p| \leq C \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^j$ e $\|x_j - x_\infty\|_p \leq C \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^j$. Se λ_2 é próximo a λ_1 , o método é lento.

OBSERVAÇÃO 2) É possível modificar o método para o caso em que $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$, ou seja, para o caso em que λ_1 não é necessariamente positivo. (Ver, por exemplo, Burden e Faires).

OBSERVAÇÃO 3) A condição $a_i \neq 0$ não é muito restritiva na prática, pois

- 1) Se tomarmos um x_0 aleatório, é muito difícil que a componente e_1 , ou seja, a_1 , seja igual a zero.
- 2) Mesmo que a_1 seja igual a zero, devidos aos erros de arredondamento, é esperado que x_j tenha alguma componente e_1 para algum $j > 0$.

EXEMPLO 1) SEJA $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ E $x_0 = (1, 1)$.

LOGO $y_1 = Ax_0 = (1, 2)$ E $x_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|_\infty} = (\frac{1}{2}, 1)$

$y_2 = Ax_1 = (\frac{1}{2}, 2)$ E $x_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|_\infty} = (\frac{1}{4}, 1)$

SEGUINDO, VEMOS QUE $x_j = (\frac{1}{2^j}, 1)$ E $y_{j+1} = (\frac{1}{2^j}, 2)$

LOGO $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = \lim_{j \rightarrow \infty} (\frac{1}{2^j}, 1) = \underbrace{(0, 1)}_{\text{AUTOVETOR COM AUTOVALOR } 2}$ E $\lim_{j \rightarrow \infty} \|y_{j+1}\| = \lim_{j \rightarrow \infty} 2 = \underbrace{2}_{\text{AUTOVALOR}}$

EXEMPLO 2) SEJA $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ E $x_0 = (1, 0)$.

LOGO $p_\lambda(\lambda) = (2-\lambda)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda = 3 \\ \lambda = 1 \end{matrix}$

$\lambda = 1$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. LOGO $e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ É AUTOVETOR

$\lambda = 3$ $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. LOGO $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ É AUTOVETOR

NOTE QUE $(1, 0) = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$. ASSIM, $\lim x_j = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ E $\lim \|y_j\|_\infty = 3$

$y_1 = Ax_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$y_2 = Ax_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$ JÁ PRÓXIMO DE $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
 $\|y_2\|_\infty = \frac{5}{2}$ (PRÓXIMO A 3)

MÉTODO DAS POTÊNCIAS INVERSAS

SEJA $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ INVERTÍVEL E DIAGONALIZÁVEL. SEJA $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ UMA BASE TAL QUE $Ae_j = \lambda_j e_j$. LOGO $e_j = A^{-1}Ae_j = A^{-1}\lambda_j e_j$. PORTANTO, $A^{-1}e_j = \frac{1}{\lambda_j}e_j$. SUPONHA QUE $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. LOGO $\frac{1}{\lambda_1} > \frac{1}{\lambda_2} \geq \dots \geq \frac{1}{\lambda_n}$. PELO TEOREMA ANTERIOR, PODEMOS PROPOR O SEGUINTE MÉTODO PARA DETERMINAR O MENOR AUTOVALOR E O AUTOVETOR ASSOCIADO

ALGORITMO (MÉTODO DAS POTÊNCIAS INVERSAS)

1) ESCOLHA $x_0 = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$, COM $a_i \neq 0$

2) PARA $j \geq 0$:

$$y_{j+1} \text{ RESOLVE } Ay_{j+1} = x_j$$

$$x_{j+1} = \frac{y_{j+1}}{\|y_{j+1}\|_\infty}$$

$$\text{EQUIVALE A } y_{j+1} = A^{-1}x_j$$

PELO TEOREMA ANTERIOR, VEMOS QUE $\lim_{j \rightarrow \infty} x_0 = \frac{a_1 e_1}{\|a_1 e_1\|}$ E $\lim_{j \rightarrow \infty} \|y_j\|_\infty = \frac{1}{\lambda_1}$. ASSIM, DESCOBRIMOS O MENOR AUTOVALOR DE A E O AUTOVETOR ASSOCIADO.

OBSERVAÇÃO 1: PODEMOS MODIFICAR O MÉTODO PARA PERMITIR $|\lambda_1| < |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n|$.

OBSERVAÇÃO 2: PARA IMPLEMENTAR, PODEMOS RESOLVER $Ay_{j+1} = x_j$ POR ELIMINAÇÃO DE GAUSS OU FAZER $y_{j+1} = A^{-1}x_j$, O QUE COSTUMA SER PIOR.

A FORMA MAIS EFICIENTE, NO ENTANTO, É

i) FAZER A DECOMPOSIÇÃO $PA = LU$ DE A ($\frac{n^3}{3}$ OPERAÇÕES)

ii) RESOLVER $Ay_{j+1} = x_j$ USANDO P, L E U (n^2 OPERAÇÕES)

EXEMPLO 3) SEJA $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ E $x_0 = (1, 0)$. NESTE CASO,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = (1, 1) \text{ E } \lim_{j \rightarrow \infty} \|y_j\|_\infty = 1.$$

VAMOS VER ALGUMAS ITERAÇÕES. NOTE QUE $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

$$i) \quad y_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e } \|y_1\|_\infty = \frac{2}{3}$$

$$ii) \quad y_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \quad \text{e } \|y_2\|_\infty = \frac{5}{6}$$

↳ PRÓXIMO A 1

↳ PRÓXIMO A (1, 1)

MÉTODO DAS POTÊNCIAS COM DESLOCAMENTO.

PODERÁAMOS PROCURAR OUTROS AUTOVALORES USANDO DESLOCAMENTO.

SABEMOS QUE SE $Ae_j = \lambda_j e_j$, ENTÃO $(A - \mu I)e_j = (\lambda_j - \mu)e_j$. LOGO $(A - \mu I)^{-1}e_j = (\lambda_j - \mu)^{-1}e_j$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$

ALGORITMO (MÉTODO DAS POTÊNCIAS COM DESLOCAMENTO)

1) ESCOLHA $x_0 = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$, COM $a_k \neq 0$.

2) PARA $j \geq 0$:

$$y_{j+1} \text{ RESOLVE } (A - \mu I)y_{j+1} = x_j. \quad \text{EQUIVALE A } y_{j+1} = (A - \mu I)^{-1}x_j$$

$$x_{j+1} = \frac{y_{j+1}}{\|y_{j+1}\|_\infty}$$

NESTE CASO, SE $(\lambda_k - \mu)^{-1} > |(\lambda_l - \mu)^{-1}|$, $\forall l \neq k$, ENTÃO $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = \frac{a_k e_k}{\|a_k e_k\|}$ E $\lim_{j \rightarrow \infty} \|y_j\|_\infty = \frac{1}{(\lambda_k - \mu)^{-1}}$.

($(\lambda_k - \mu)^{-1} \in \mathbb{R}$ E É POSITIVO)

PODEMOS, ASSIM, DETERMINAR λ_k E UM AUTOVETOR ASSOCIADO.

ALGORITMO QR

O ALGORITMO QR É MAIS EFICIENTE E PERMITE DETERMINAR TODOS OS AUTOVALORES AO MESMO TEMPO.

ALGORITMO QR

SEJA $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$.

i) DEFINIMOS $A_0 = A$ E $V_0 = I$

ii) PARA $j \geq 0$:

1) FAZEMOS A DECOMPOSIÇÃO QR DE A_j ($A_j = Q_j R_j$)

2) DEFINIMOS $A_{j+1} = R_j Q_j$ E $V_{j+1} = V_j Q_j$

OBSERVAÇÃO: NUMERICAMENTE, PODEMOS GUARDAR TODOS A_j NUMA MESMA MATRIZ.
TODOS V_j NUMA MESMA MATRIZ.

TEOREMA: SEJA $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ DIAGONALIZÁVEL COM AUTOVALORES $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ TAIS QUE $0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_n|$. SUPONHA QUE $P^{-1}AP = D$, D DIAGONAL E P^{-1} TENHA DECOMPOSIÇÃO LU (OU SEJA, NÃO PRECISA TROCAR LINHAS). LOGO $\lim_{j \rightarrow \infty} A_j = T$, EM QUE T É MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR CUJA DIAGONAL CONSISTE DOS AUTOVALORES DE A .

SE A É SIMÉTRICA E $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$, ENTÃO T É DIAGONAL. SE $\lim_{j \rightarrow \infty} V_j = V$, ENTÃO V É UMA MATRIZ CUJAS COLUMAS SÃO AUTOVECTORES DE A .

NÃO PROVAREMOS O TEOREMA, MAS OBSERVAMOS QUE SE $A_j = Q_j R_j$, ENTÃO $A_{j+1} = R_j Q_j = Q_j^{-1} A_j Q_j$. LOGO A_{j+1} E A_j TÊM OS MESMOS AUTOVALORES, POIS

$$\det(A_{j+1} - \lambda I) = \det(Q_j^{-1} A_j Q_j - \lambda I) = \det(Q_j^{-1} (A_j - \lambda I) Q_j) = \det(Q_j^{-1}) \det(A_j - \lambda I) \det(Q_j) = \det(A_j - \lambda I)$$

$p_{A_{j+1}}(\lambda)$

MESMOS POLINÔMIOS CARACTERÍSTICO $\Rightarrow$ MESMAS RAÍZES $\Rightarrow$ MESMOS AUTOVALORES

$p_{A_j}(\lambda)$

ALÉM DISSO, TEMOS $A_{j+1} = Q_j^{-1} A_j Q_j = Q_j^{-1} Q_{j-1}^{-1} A_{j-1} Q_{j-1} Q_j = \dots$

$$= (Q_0 Q_1 \dots Q_j)^{-1} A_0 (Q_0 Q_1 \dots Q_j) = V_j^{-1} A V_j$$

ASSIM, SE $\lim_{j \rightarrow \infty} A_j = T$ E $\lim_{j \rightarrow \infty} V_j = \lim_{j \rightarrow \infty} Q_0 Q_1 \dots Q_j = V$, ENTÃO $T = V^{-1} A V$.

PORTANTO, SE T É DIAGONAL, ENTÃO A DIAGONAL DE T TEM OS AUTOVALORES DE A E AS COLUNAS DE V SÃO AUTOVETORES DE A .

EXEMPLO 4) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.894\ldots & 0.447\ldots \\ 0.447\ldots & 0.894\ldots \end{bmatrix}}_{Q_0} \underbrace{\begin{bmatrix} -2.236\ldots & 1.788\ldots \\ 0 & 1.3416\ldots \end{bmatrix}}_{R_0}$$

$$A_1 = R_0 Q_0 = \begin{bmatrix} 2.8 & 0.6 \\ 0.6 & 1.2 \end{bmatrix}, \quad V_1 = I Q_0 = Q_0 = \begin{bmatrix} -0.894\ldots & 0.447\ldots \\ 0.447\ldots & 0.894\ldots \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.9778\ldots & -0.2095\ldots \\ -0.2095\ldots & 0.9778\ldots \end{bmatrix}}_{Q_1} \underbrace{\begin{bmatrix} -2.8635\ldots & -0.8381\ldots \\ 0 & 1.0476\ldots \end{bmatrix}}_{R_1}$$

$$A_2 = R_1 Q_1 = \begin{bmatrix} 2.9756\ldots & -0.2195\ldots \\ -0.2195\ldots & 1.02439\ldots \end{bmatrix}, \quad V_2 = Q_0 Q_1 = \begin{bmatrix} 0.7808\ldots & 0.6246\ldots \\ -0.6246\ldots & 0.7808\ldots \end{bmatrix}$$

SEGUINDO...

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 3.0 & -3.38 \times 10^{-5} \\ -3.38 \times 10^{-5} & 1.0 \end{bmatrix}, \quad V_{10} = \begin{bmatrix} 0.7071\ldots & 0.7070\ldots \\ -0.7070\ldots & 0.7071\ldots \end{bmatrix}$$

↳ PRÓXIMO A $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

↳ PRÓXIMO A $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

EXEMPLO 5) SEJA $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Logo $A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{Q_0} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_0}$. Assim, $A_1 = R_0 Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A_0$

Portanto, $A_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \forall j$. O MÉTODO NÃO CONVERGE PARA UMA MATRIZ TRIANGULAR.

O PROBLEMA É QUE ± 1 SÃO OS AUTOVALORES DE A E $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ SÃO TAIS QUE $|\lambda_1| = |\lambda_2|$.

○ MÉTODO DAS POTÊNCIAS TAMBÉM NÃO CONVERGE SE $x_0 = (1, \frac{1}{2})$, ENTÃO

$y_1 = Ax_0 = (\frac{1}{2}, 1)$ E $x_1 = (\frac{1}{2}, 1)$. ASSIM $\left. \begin{array}{l} x_j = (1, \frac{1}{2}), j \text{ PAR} \\ x_j = (\frac{1}{2}, 1), j \text{ ÍMPAR} \end{array} \right\} x_j \text{ NÃO CONVERGE}$