Integral Definida Aplicações

sexta-feira, 7 de julho de 2023 14:53

Vimos na semana passada que:

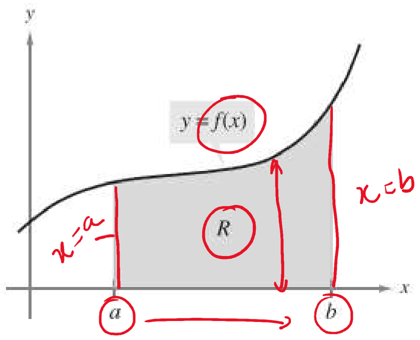


FIGURA 5.5 $\int_a^b f(x)\,dx = \text{Área} = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$

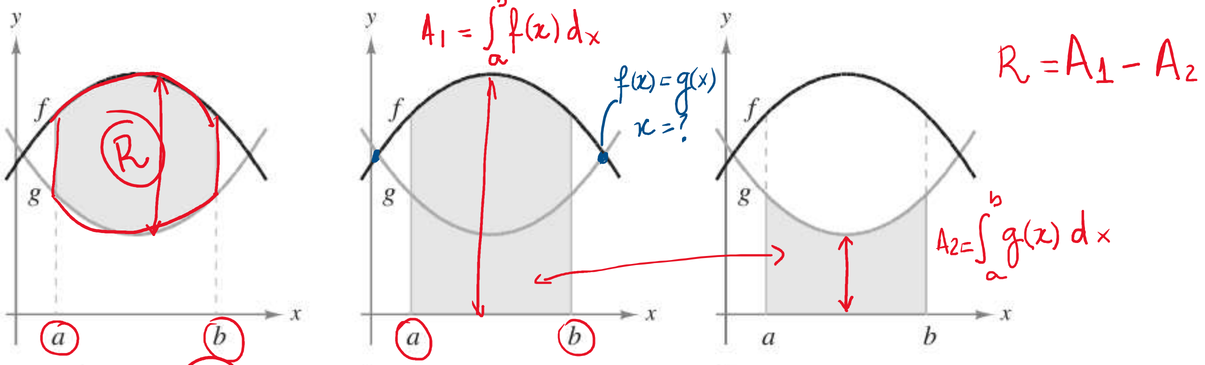
Definição de uma integral definida

Seja f não negativa e contínua no intervalo fechado $[a, b]$. A área da região limitada pelo gráfico de f, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é denotada por

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

A expressão $\int_a^b f(x)\,dx$ é chamada de **integral definida** de a até b, em que a é o **limite inferior de integração** e b é o **limite superior de integração**.

Hoje veremos como calcular a **Área de uma região limitada por dois gráficos**. Vejamos,

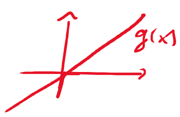


(Área entre f e g) = (Área da região abaixo de f) − (Área da região abaixo de g)

$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

A_1 — A_2

↳ função que passa por cima da área ↳ função que passa por baixo da área



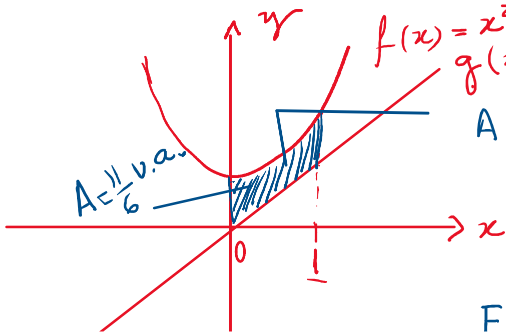
Exercício

1) Determine a área da região limitada pelos gráficos das funções $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = x$, para $0 \le x \le 1$.

$f(x) = x^2 + 2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

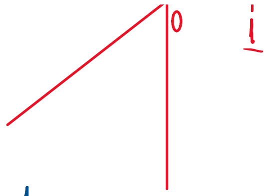
$= -4(1)(2) = -8$



$A = \int_0^1 (x^2 + 2) - (x)\,dx$

$= \int_0^1 x^2 + 2 - x^1\,dx$

$F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}$ ↗ $F(1)$



$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2} \nearrow F(1) \searrow F(0)$$

$$A = \int_0^1 f(x) - g(x)\,dx = \left[\frac{1^3}{3} + 2(1) - \frac{1^2}{2}\right] - \left[\cancel{\frac{0^3}{3} + 2(0) - \frac{0^2}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{1} - \frac{1}{2} = \frac{2+12-3}{6} = \boxed{\frac{11}{6}}$$

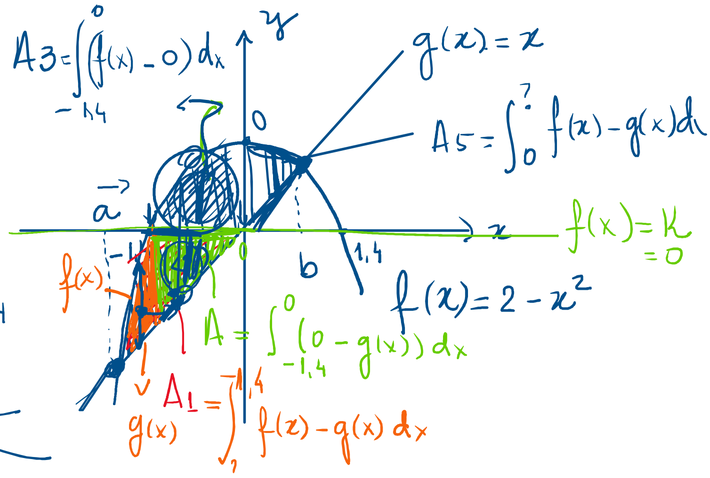
2) Determine a área da região limitada pelos gráficos das funções $f(x) = 2 - x^2$ e $g(x) = x$.

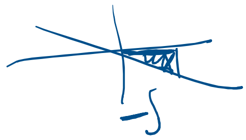
$f(x) = 2 - x^2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= -4(-1)(2) = 8$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\pm\sqrt{8}}{2(-1)} = \begin{cases} x_2 = \dfrac{\sqrt{8}}{-2} = -1,4 \\ x_1 = \dfrac{-\sqrt{8}}{-2} = +1,4 \end{cases}$$





A quantidade produzida e vendida de um produto pode ser descrita por curvas de **oferta** e **demanda**.

A **curva de oferta** mostra a quantidade, q, do produto que os fabricantes oferecem a vários preços, p. Observe o comportamento da curva em vermelho...uma maior quantidade de produtos (eixo x) é oferecida quando os preços estão mais altos (eixo y)

A **curva de demanda** reflete o comportamento do consumidor e mostra a quantidade adquirida do produto a vários preços diferentes, p, ou seja, a preços mais baixos (eixo y) a demanda pelo produto (eixo x) é maior.

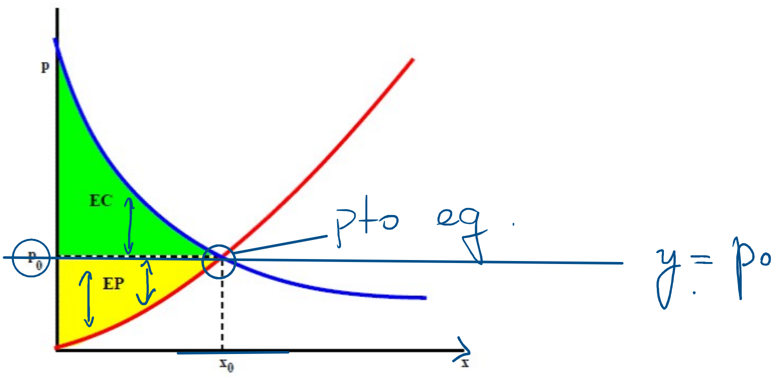


Figura 13.12: Excedente total

.

O ponto de intersecção das duas curvas (vermelho e azul) é denominado ponto de equilíbrio (x_0, p_0).

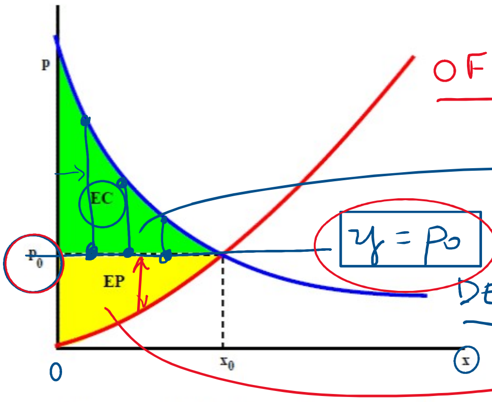


Figura 13.12: Excedente total

$$EC = \int_0^{x_0} (\text{DEMANDA} - p_0)\,dx$$

$$EP = \int_0^{x_0} (p_0 - \text{OFERTA})\,dx$$

O **Excedente de Consumo** (EC: área em verde) mede o quanto o consumidor ganha ao negociar. É a quantidade total de ganho dos consumidores ao comprar um produto pelo preço de equilíbrio (p_0) ao invés do preço que estariam dispostos a pagar.

Excedente de Consumo ao preço p_0 = Área entre a **curva de demanda** e a reta horizontal $y = p_0$

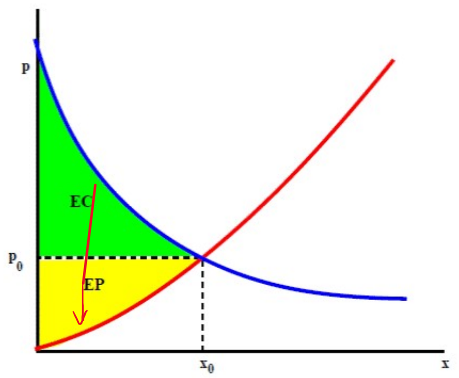


Figura 13.12: Excedente total

$$ET = \int_0^{x_0} (\text{DEMANDA} - \text{OFERTA})\,dx$$

O **Excedente de Produção** (EP: área em amarelo) mede o quanto o produtor ganha ao negociar. É a quantidade total de ganho pelos produtores ao venderem um produto pelo preço de equilíbrio (p_0) ao invés do preço que gostariam de cobrar.

Excedente de Produção ao preço p_0 = Área entre a **curva de oferta** e a reta horizontal $y = p_0$

Excedente Total (ET) = EC+EP

O Excedente Total de uma economia, onde o preço de mercado é o preço de equilíbrio, é a área compreendida entre o gráfico da função demanda e da função oferta.

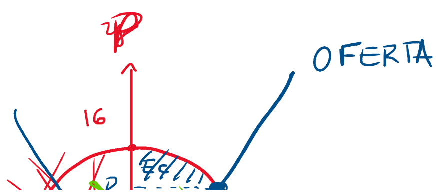
Exemplo: Se a demanda de um certo produto é $100p = 1600 - x^2$ e a oferta é $\boxed{400p = x^2 + 2400}$, em que p é o preço e x é a quantidade. Pede-se:

a) Esboce o gráfico das funções demanda e oferta, em um mesmo sistema de coordenadas xy;

DEMANDA $100p = 1600 - x^2$

$p = \frac{1600}{100} - \frac{x^2}{100} = \boxed{16 - \frac{x^2}{100}}$ — $a = -\frac{1}{100} \times 2 = -2/100 = -0{,}02$

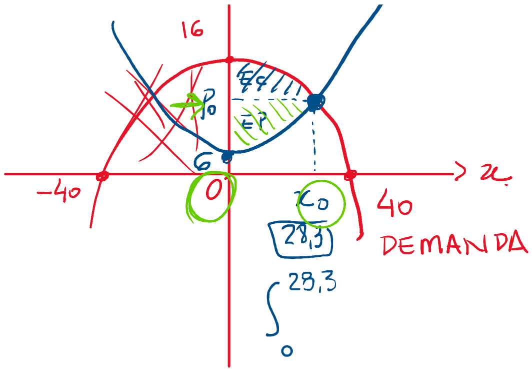
$\sqrt{A}$



$$p = \frac{1600}{100} - \frac{x^2}{100} = \boxed{16 - \frac{x^2}{100}}$$

$$\Delta = -4\left(-\frac{1}{100}\right)(16) = +\frac{64}{100} \rightarrow \sqrt{\frac{64}{100}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{100}} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \begin{cases} x = 0{,}8/0{,}02 = -40 \\ x = -0{,}8/-0{,}02 = +40 \end{cases}$$



OFERTA: $400p = x^2 + 2400$

$$p = \frac{x^2}{400} + \frac{2400}{400} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{400} \\ b = 0 \\ c = 6 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = -4\left(\frac{1}{400}\right)(6) = \frac{-24}{400} < 0$$

b) Encontre o preço e quantidade de equilíbrio; p_0 e $\boxed{x_0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{DEM} = \text{OFERT}}$

DEM: $p = 16 - \frac{x^2}{100}$

OFERT: $p = \frac{x^2}{400} + 6$

$$16 - \frac{x^2}{100} = \frac{x^2}{400} + 6$$

$$-\frac{x^2}{100} - \frac{x^2}{400} = 6 - 16$$

$$\frac{-4x^2 - x^2}{400} = 6 - 16$$

$$-\frac{5x^2}{400} = -10$$

$$-5x^2 = -4000$$

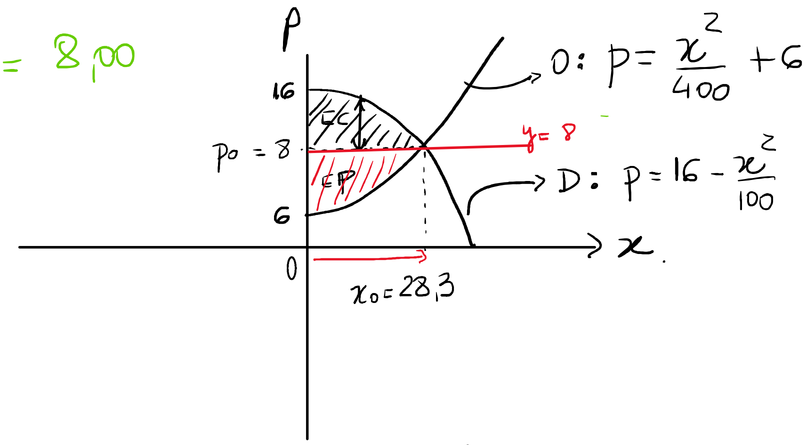
$$x^2 = \frac{-4000}{-5} = 800$$

$$x = \pm\sqrt{800} \approx 28{,}3 \quad \text{CALC.}$$

$$x_0 = 28{,}3$$

OFERTA: $p_0 = \frac{x_0^2}{400} + 6$, Sendo $x_0 = 28{,}3$ para descobrir p_0?

$$p_0 = \frac{(28{,}3)^2}{400} + 6 = 8{,}00$$



c) Encontre o excedente de consumo;

$$EC = \int_0^{28,3} \left(16 - \frac{x^2}{100}\right) - (8)\, dx = \int_0^{28,3} 16 - \frac{x^2}{100} - 8\, dx = \int_0^{28,3} 8 - \frac{x^2}{100}\, dx =$$

$$F(x) = ? \quad \int 8 - \frac{x^2}{100}\, dx = \int 8\,dx - \int \frac{x^2}{100}\,dx = 8\int dx - \frac{1}{100}\int x^2\,dx = 8x - \frac{1}{100}\cdot\frac{x^3}{3} = \boxed{8x - \frac{x^3}{300}}$$

$$F(28{,}3) = 8(28{,}3) - \frac{(28{,}3)^3}{300} = 150{,}85$$

$$F(0) = 8(0) - \frac{(0)^3}{300} = 0$$

$$EC = \int_0^{28,3} 8 - \frac{x^2}{100}\, dx = F(28{,}3) - F(0) = 150{,}85 - 0 =$$

$$F(0) = 8(0) - \frac{(0)^3}{300} = 0$$

$$EC = \int_0^{28,3} 8 - \frac{x^2}{100}\,dx = F(28,3) - F(0) = 150,85 - 0 = 150,85$$

d) Encontre o excedente de produção;

$$EP = \int_0^{28,3} (8) - \left(\frac{x^2}{400} + 6\right) dx = \int_0^{28,3} 8 - \frac{x^2}{400} - 6\,dx = \int_0^{28,3} \boxed{2 - \frac{x^2}{400}}\,dx$$

$F(x) = ?$

$$\int 2 - \frac{x^2}{400}\,dx = \int 2\,dx - \int \frac{x^2}{400}\,dx = 2\int dx - \frac{1}{400}\int x^2\,dx$$

$$= 2x - \frac{1}{400}\cdot\frac{x^3}{3} = \boxed{2x - \frac{x^3}{1200}} = F(x)$$

F(28,3)

F(0)

$$EP = \int_0^{28,3} \underbrace{2 - \frac{x^2}{400}}_{(P_0 - of)}\,dx = F(28,3) - F(0) = 2(28,3) - \frac{(28,3)^3}{1200} = 37,71$$

$$F(x) = 2x - \frac{x^3}{1200} \rightarrow F(28,3)$$

e) Encontre o excedente total da economia;

$$ET = EC + EP = 150,85 + 37,71 = 188,56$$

$$\int_0^{28,3} \left(16 - \frac{x^2}{100}\right) - \left(\frac{x^2}{400} + 6\right) dx$$

DEM - of

$$ET = \int_0^{28,3} 16 - \frac{x^2}{100} - \frac{x^2}{400} - 6\,dx = \int_0^{28,3} 10 - \frac{(4x^2 + x^2)}{400}\,dx = \int_0^{28,3} 10 - \frac{5x^2}{400}\,dx$$

$$F(x) \Rightarrow \int 10 - \frac{5x^2}{400}\,dx = \int 10\,dx - \int \frac{5x^2}{400}\,dx = 10\int dx - \frac{5}{400}\int x^2\,dx = 10x - \frac{5}{400}\cdot\frac{x^3}{3}$$

$$F(x) = 10x - \frac{5x^3}{1200}$$

$$F(28,3) = 10(28,3) - \frac{5(28,3)^3}{1200} = 188,56$$

$$F(0) = 0$$

$$ET = \int_0^{28,3} 10 - \frac{5x^2}{400}\,dx = F(28,3) - F(0) = 188,56 - 0 = 188,56 = EC + EP$$

f) Suponha que essas funções representem as curvas de oferta e demanda do produto leite. Suponha também que o governo artificialmente aumentou o preço do leite para R$ 10,00. Que efeito tem o aumento do preço sobre o excedente de consumo, excedente de produção e excedente total da economia?