PROVA DE RECUPERAÇÃO - TÓPICOS DE MATEMÁTICA APLICADA - MAP 2313

A prova é individual. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Boa Prova!

Exercício 1

Consideremos a equação da onda com condições de Dirichlet abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x),\ (t,x) \in]0,\infty[\times]0,l[\\ u(t,0) = u(t,l) = 0,\ t > \infty \\ u(0,x) = sen\left(\frac{\pi x}{l}\right) + sen\left(\frac{3\pi x}{l}\right),\ \forall x \in]0,l[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0,\ \forall x \in]0,l[\end{cases}.$$

(2,0 Ponto) a) Ache as soluções da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$ da equação $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$ com a condição de contorno $u(t,0) = u(t,l) = 0$.

(1,0 ponto) b) Utilizando as condições iniciais $u(0,x) = sen\left(\frac{\pi x}{l}\right) + sen\left(\frac{3\pi x}{l}\right)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0$, ache a solução completa do problema.

Exercício 2

Neste problema, o objetivo é achar uma série que aproxime π^2.

(1,0 ponto) a) Calcule a série de Fourier da função $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $f(\theta) = |\theta|$.

(1,0 ponto) b) Utilize a série acima para mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. (Dica: Veja o que ocorre para $\theta = 0$).

Exercício 3

Consideremos a seguinte equação no semiplano: $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x),\ t > 0 \text{ e } x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x),\ x \in \mathbb{R} \end{cases}.$

(1,0 ponto) a) Calcule a transformada de Fourier inversa de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ou seja, $\mathcal{F}^{-1}(g)$, em que $g(\xi) = e^{-a\xi^2 + ib\xi}$, a e b são reais e $a > 0$. (Dica: Vimos em sala de aula que $\mathcal{F}\left(e^{-\frac{a}{2}x^2}\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{2a}}$. Pode usar este resultado.)

(1,0 ponto) b) Aplicando a transformada de Fourier na coordenada x, podemos achar a solução da equação acima na forma $\hat{u}(t,x) = \hat{g}(t,\xi)\hat{f}(\xi)$, em que $\hat{u}$ indica a transformada de Fourier de u na variável x. Determine a função $\hat{g}$.

(0,5 ponto) c) Ache a solução explícita $u(t,x)$ do problema acima para $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Exercício 4

(2,5 pontos) Ache a função de Green do problema **de contorno** abaixo:

$$\begin{cases} u''(x) = f(x) \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases}.$$

Formulário

Proposição 1. *Seja $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ uma função de classe C^1. Logo para todo ponto $\theta \in]-\pi, \pi[$, temos*

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n sen(n\theta),$$

em que $c_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta$, $a_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) cos(n\theta) d\theta$ *e* $b_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) sen(n\theta) d\theta$.

Proposição 2. *Seja $f : [0, l] \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Logo para todo ponto $\theta \in]0, l[$, a expansão em Série de Fourier Seno é dada por*

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(\frac{n\pi}{l}\theta\right), \quad \text{em que } b_n := \frac{2}{l}\int_0^l f(\theta) sen\left(\frac{n\pi}{l}\theta\right) d\theta.$$

Abaixo todas as funções são bem comportadas, no sentido em que as operações abaixo estão bem definidas. (Por exemplo, as funções podem pertencer a $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$...)

Definição 3. A Transformada de Fourier $\mathcal{F}$ e a Transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}$ são definidas como

$$\begin{array}{c} \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)\, dx \\ \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}\right)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi \end{array}.$$

Também denotamos a Transformada de Fourier por $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$.

Definição 4. A convolução de duas funções é definida como

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy.$$

Proposição 5. *As seguintes propriedades da transformada de Fourier e da convolução são válidas:*

a) $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}(f)\right) = f$

b) $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g)$.

c) $\mathcal{F}^{-1}(fg) = \mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g)$.

d) $\mathcal{F}\left(\frac{df}{dx}\right)(\xi) = i\xi\mathcal{F}(f)(\xi)$.

e) $f * g = g * f$.

f) $\mathcal{F}(f(x-b))(\xi) = e^{-ib\xi}\mathcal{F}(f)(\xi)$, $b \in \mathbb{R}$.

g) $\mathcal{F}\left(e^{-icx} f(x)\right)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi + c)$, $c \in \mathbb{R}$.

Proposição 6. *(Funções de Green para Problemas de Valor Inicial)*

Considere o problema

$$\left\{ \begin{array}{c} p_k(x)\frac{d^k u}{dx^k}(x) + p_{k-1}(x)\frac{d^{k-1}u}{dx^{k-1}}(x) + ... + p_0(x)\, u(x) = f(x) \\ u(0) = 0 \\ \vdots \\ u^{(k-1)}(0) = 0 \end{array} \right.,$$

em que $p_k(x) \neq 0$ para todo x e as funções p_j são contínuas.

Logo a função de Green do problema é dada por $G(x,y) = v_y(x)(H(x-y) - H(-y))$, em que v_y é solução de

$$\left\{ \begin{array}{c} p_k(x)\frac{d^k v_y}{dx^k}(x) + p_{k-1}(x)\frac{d^{k-1}v_y}{dx^{k-1}}(x) + ... + p_0(x)\, v_y(x) = 0 \\ v_y(y) = 0 \\ \vdots \\ v_y^{(k-2)}(y) = 0 \\ v_y^{(k-1)}(y) = \frac{1}{p_k(y)} \end{array} \right..$$

Proposição 7. *(Funções de Green para Problemas de Valor de Contorno)*

Considere o problema

$$\left\{ \begin{array}{c} p_2(x)\frac{d^2u}{dx^2}(x) + p_1(x)\frac{du}{dx}(x) + p_0(x)\, u(x) = f(x) \\ \alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0 \\ \beta u(b) + \beta' u'(b) = 0 \end{array} \right.,$$

em que $(\alpha, \alpha') \neq (0,0)$, $(\beta, \beta') \neq (0,0)$ e $p_2(y) \neq 0$ para todo y e as funções p_j são contínuas

Suponha que o problema satisfaça a condição (H) definida abaixo:

Condição (H): O problema $\left\{ \begin{array}{c} p_2(x)\frac{d^2u}{dx^2}(x) + p_1(x)\frac{du}{dx}(x) + p_0(x)\, u(x) = 0 \\ \alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0 \\ \beta u(b) + \beta' u'(b) = 0 \end{array} \right.$ *não tem soluções não nulas.*

Logo a função de Green do problema é dada por $G(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{v_1(x)v_2(y)}{p_2(y)W(y)},\ x < y \\ \frac{v_1(y)v_2(x)}{p_2(y)W(y)},\ x > y \end{array} \right.$ *, em que* $W(y) = v_1(y)\, v_2'(y) - v_1'(y)\, v_2(y)$, *$v_1$ e v_2 são soluções não nulas das equações abaixo:*

$$\left\{ \begin{array}{c} p_2(x)\frac{d^2v_1}{dx^2}(x) + p_1(x)\frac{dv_1}{dx}(x) + p_0(x)\, v_1(x) = 0 \\ \alpha v_1(a) + \alpha' v_1'(a) = 0 \end{array} \right. \quad e \quad \left\{ \begin{array}{c} p_2(x)\frac{d^2v_2}{dx^2}(x) + p_1(x)\frac{dv_2}{dx}(x) + p_0(x)\, v_2(x) = 0 \\ \beta v_2(b) + \beta' v_2'(b) = 0 \end{array} \right..$$