PROVA SUBSTITUTIVA - TÓPICOS DE MATEMÁTICA APLICADA - MAP 2313

A prova é individual. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Boa Prova!

Exercício 1

Consideremos a equação do calor com condições de Dirichlet abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x),\ (t,x) \in]0,\infty[\times]0,l[\\ u(t,0) = u(t,l) = 0,\ t > \infty \\ u(0,x) = 1,\ \forall x \in]0,l[\end{cases}.$$

(1 Ponto) a) Ache as soluções da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$ da equação $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$ com a condição de contorno $u(t,0) = u(t,l) = 0$.

(1 ponto) b) Calcule a expansão da função $f : [0,l] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ em série de Fourier seno.

(1 ponto) c) Ache a solução do problema acima.

Exercício 2

(1,0 ponto) a) Ache a função de Green do problema de valor inicial abaixo:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt}(t) + k(n\pi)^2 v(t) = f(t) \\ v(0) = 0 \end{cases}.$$

(1,5 ponto) a) Resolva o problema abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + e^{-t}sen(x),\ (t,x) \in]0,\infty[\times]0,\pi[\\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0,\ t > \infty \\ u(0,x) = 0,\ \forall x \in]0,\pi[\end{cases}.$$

Para tanto, procure soluções da forma $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\, sen(n\pi x)$ e determine as funções b_n.

Exercício 3

(1,5 ponto) a) Considere a equação: $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x),\ t > 0 \text{ e } x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x),\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$. Usando a transformada parcial de Fourier na variável x, mostre que existe uma função $\hat{k} :]0,\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que $\hat{u}(t,\xi) = \hat{k}(t,\xi)\hat{f}(\xi)$. Determine $\hat{k}(t,\xi)$.

(1,0 ponto) b) Seja $k_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $k_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$. Mostre que $k_t * k_s = k_{t+s}$. (Dica: Uma maneira fácil de fazer é lembrando que transformada de Fourier leva convolução em multiplicação. Pode usar também a seguinte relação $\mathcal{F}\left(e^{-\frac{a}{2}x^2}\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{2a}}$ vista em sala de aula.)

Exercício 4

(2,0 pontos) Ache a função de Green do problema de contorno abaixo:

$$\begin{cases} u'' + \mu^2 u = f \\ u'(0) = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases},$$

em que $\mu \neq 1,3,5,...$

Formulário

Proposição 1. *Seja $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ uma função de classe C^1. Logo para todo ponto $\theta\in]-\pi,\pi[$, temos*

$$f(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\theta}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n cos(n\theta)+\sum_{n=0}^{\infty}b_n sen(n\theta),$$

em que $c_n:=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)e^{-in\theta}d\theta$, $a_n:=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)cos(n\theta)d\theta$ e $b_n:=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)sen(n\theta)d\theta$.

Proposição 2. *Seja $f:[0,l]\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Logo para todo ponto $\theta\in]0,l[$, a expansão em Série de Fourier Seno é dada por*

$$f(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n sen\left(\frac{2\pi n}{l}\theta\right),\ \text{em que } b_n:=\frac{1}{l}\int_0^l f(\theta)sen\left(\frac{2\pi n}{l}\theta\right)d\theta.$$

Abaixo todas as funções são bem comportadas, no sentido em que as operações abaixo estão bem definidas. (Por exemplo, as funções podem pertencer a $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$...)

Definição 3. A Transformada de Fourier $\mathcal{F}$ e a Transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}$ são definidas como

$$\begin{array}{c}\mathcal{F}(f)(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix\xi}f(x)dx\\ \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}\right)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)d\xi\end{array}.$$

Também denotamos a Transformada de Fourier por $\mathcal{F}(f)=\hat{f}$.

Definição 4. A convolução de duas funções é definida como

$$f*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy.$$

Proposição 5. *As seguintes propriedades da transformada de Fourier e da convolução são válidas:*
a) $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))=\mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}(f)\right)=f$
b) $\mathcal{F}(f*g)=\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.
c) $\mathcal{F}^{-1}(fg)=\mathcal{F}^{-1}(f)*\mathcal{F}^{-1}(g)$.
d) $\mathcal{F}\left(\frac{df}{dx}\right)(\xi)=i\xi\mathcal{F}(f)(\xi)$.
e) $f*g=g*f$.
f) $\mathcal{F}(f(x-b))(\xi)=e^{-ib\xi}\mathcal{F}(f)(\xi)$, $b\in\mathbb{R}$.
g) $\mathcal{F}\left(e^{-icx}f(x)\right)(\xi)=\mathcal{F}(f)(\xi+c)$, $c\in\mathbb{R}$.

Proposição 6. *(Funções de Green para Problemas de Valor Inicial)*
Considere o problema

$$\left\{\begin{array}{c}p_k(x)\frac{d^ku}{dx^k}(x)+p_{k-1}(x)\frac{d^{k-1}u}{dx^{k-1}}(x)+...+p_0(x)u(x)=f(x)\\ u(0)=0\\ \vdots\\ u^{(k-1)}(0)=0\end{array}\right.,$$

em que $p_k(x)\neq0$ para todo x e as funções p_j são contínuas.
Logo a função de Green do problema é dada por $G(x,y)=v_y(x)(H(x-y)-H(-y))$, em que v_y é solução de

$$\left\{\begin{array}{c}p_k(x)\frac{d^kv_y}{dx^k}(x)+p_{k-1}(x)\frac{d^{k-1}v_y}{dx^{k-1}}(x)+...+p_0(x)v_y(x)=0\\ v_y(y)=0\\ \vdots\\ v_y^{(k-2)}(y)=0\\ v_y^{(k-1)}(y)=\frac{1}{p_k(y)}\end{array}\right..$$

Proposição 7. *(Funções de Green para Problemas de Valor de Contorno)*
Considere o problema

$$\left\{\begin{array}{c}p_2(x)\frac{d^2u}{dx^2}(x)+p_1(x)\frac{du}{dx}(x)+p_0(x)u(x)=f(x)\\ \alpha u(a)+\alpha'u'(a)=0\\ \beta u(b)+\beta'u'(b)=0\end{array}\right.,$$

em que $(\alpha,\alpha')\neq(0,0)$, $(\beta,\beta')\neq(0,0)$ e $p_2(y)\neq0$ para todo y e as funções p_j são contínuas
Suponha que o problema satisfaça a condição (H) definida abaixo:

Condição (H): O problema $\left\{\begin{array}{c}p_2(x)\frac{d^2u}{dx^2}(x)+p_1(x)\frac{du}{dx}(x)+p_0(x)u(x)=0\\ \alpha u(a)+\alpha'u'(a)=0\\ \beta u(b)+\beta'u'(b)=0\end{array}\right.$ *não tem soluções não nulas.*

Logo a função de Green do problema é dada por $G(x,y)=\left\{\begin{array}{l}\frac{v_1(x)v_2(y)}{p_2(y)W(y)},\ x<y\\ \frac{v_1(y)v_2(x)}{p_2(y)W(y)},\ x>y\end{array}\right.$ *, em que $W(y)=v_1(y)v_2'(y)-v_1'(y)v_2(y)$, v_1 e v_2 são soluções não nulas das equações abaixo:*

$$\left\{\begin{array}{c}p_2(x)\frac{d^2v_1}{dx^2}(x)+p_1(x)\frac{dv_1}{dx}(x)+p_0(x)v_1(x)=0\\ \alpha v_1(a)+\alpha'v_1'(a)=0\end{array}\right.\quad e\quad\left\{\begin{array}{c}p_2(x)\frac{d^2v_2}{dx^2}(x)+p_1(x)\frac{dv_2}{dx}(x)+p_0(x)v_2(x)=0\\ \beta v_2(b)+\beta'v_2'(b)=0\end{array}\right..$$