UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

SEM 0533 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos I
SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

Estudo da Resposta de Sistemas Dinâmicos
Teoria

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves

Objetivos

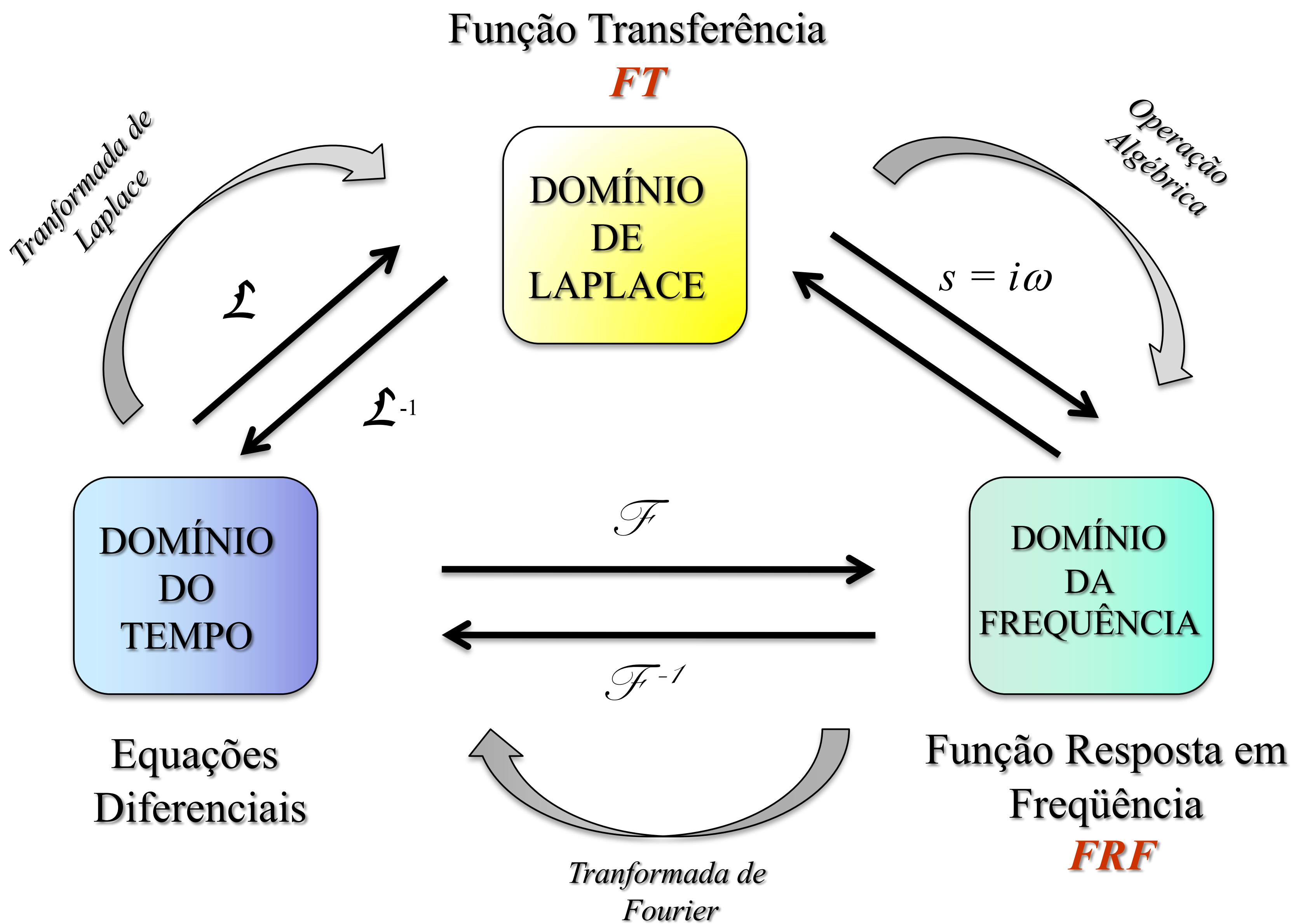
Objetivo da presente aula é discutir a resposta no domínio do tempo para sistemas dinâmicos lineares. Embora a teoria possa ser aplicada a um sistema de qualquer ordem, estaremos concentrando esforços no estudo da resposta *sistemas de primeira e segunda ordem*, no *domínio do tempo* a entradas padrão e *no domínio da frequência* para o estudo da *resposta em frequência* de sistemas dinâmicos

Bibliografia:

1 Felício, L. C., Modelagem da Dinâmica de Sistemas e Estudo da Resposta, Rima, 2010

2 Doebelin, E. O., System Dynamics, Modeling, Analysis, Simulation, Design, M. Dekker, 1998

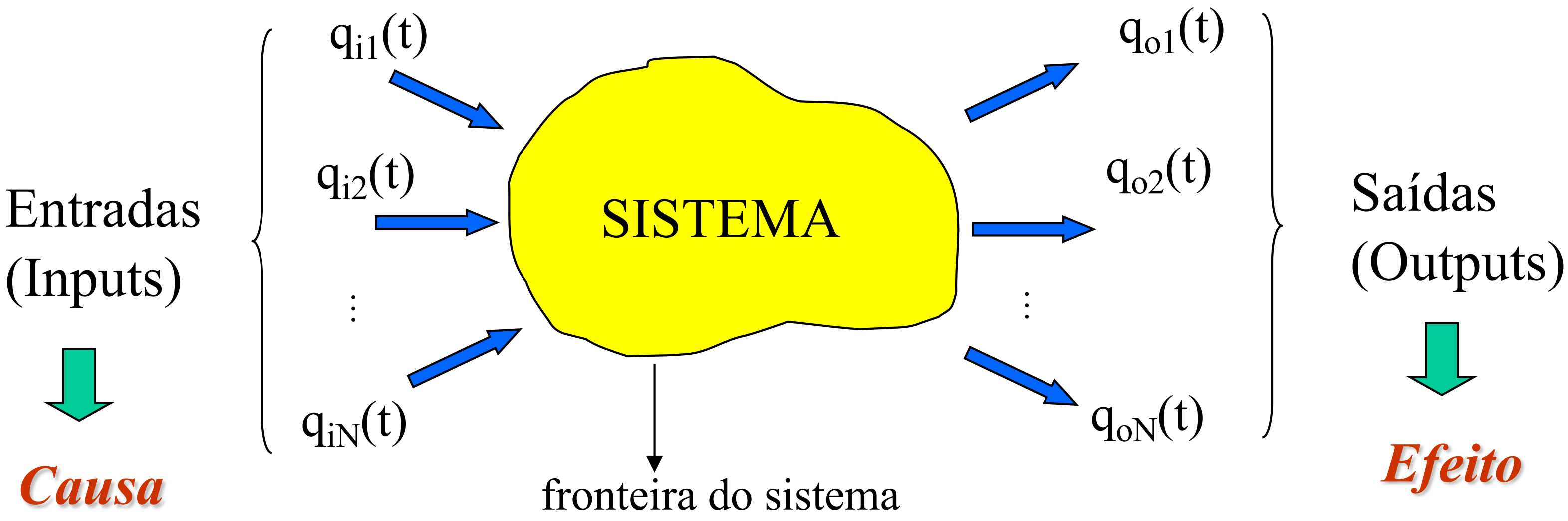
Interação entre Domínios



Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves

Recordar é Viver !

A figura abaixo mostra uma representação muito importante:



• Entradas: Agentes que provocam distúrbios no sistema. Geralmente, não dependem do sistema

• Saídas: Respostas do sistema. São na verdade "entradas" modificadas pelas características dinâmicas do sistema.

Considerações Preliminares

Forma geral de um sistema dinâmico linear de parâmetros concentrados:

$$\underset{q_i(t)}{\text{Entrada}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{SISTEMA}\\ H(s),\ h(t)\end{matrix}} \longrightarrow \underset{q_o(t)}{\text{Saída}}$$

No domínio do tempo a EDO do sistema é escrita como:

SISTEMA ($q_o\,(t)$ saída)

$$\boxed{a_n\frac{d^nq_o}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}q_o}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2\frac{d^2q_o}{dt^2} + a_1\frac{dq_o}{dt} + a_0q_o =}$$

$$\boxed{b_m\frac{d^mq_i}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}q_i}{dt^{m-1}} + b_1\frac{dq_i}{dt} + \cdots + b_0q_i}$$

ENTRADA ($q_i\,(t)$)

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Cont. ...

De forma abreviada, podemos escrever esta última equação como segue

$$\sum_{p=0}^{N} a_p \frac{d^p q_o}{dt^p} = \sum_{q=0}^{M} b_q \frac{d^q q_i}{dt^q}$$

e, usando a Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{p=0}^{N} a_p \frac{d^p q_o}{dt^p}\right\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{q=0}^{M} b_q \frac{d^q q_i}{dt^q}\right\}$$

e, usando a propriedade

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2}\frac{df}{dt}(0) - \cdots - \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}(0)$$

Cont. ...

Aplicando a propridade da derivação a EDO transforma-se numa equação algébrica

$$D(s)Q_o(s) + R_o(s) = N(s)Q_i(s) + R_i(s)$$

onde $Q_i(s)$ e $Q_o(s)$ representam as transformadas de Laplace de $q_i(t)$ e $q_o(t)$, respectivamente. Os polinômios D(s) e N(s) possuem a seguinte forma

$$D(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_N s^N = \sum_{p=0}^{N} a_p s^p$$

$$N(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_M s^M = \sum_{q=0}^{M} b_q s^q$$

Enquanto que $R_o(s)$ e $R_i(s)$ também são polinômios em s, possuindo graus máximos iguais a (N-1) e (M-1), respectivamente e que dependem dos coeficientes a_p e b_p bem como das condições iniciais das variáveis de entrada e saída.

Cont. ...

E a partir da equação algébrica

$$D(s)Q_o(s) + R_o(s) = N(s)Q_i(s) + R_i(s)$$

Obtemos a solução da EDO no domínio de Laplace, escrevendo

$$Q_o(s) = \underbrace{\frac{N(s)}{D(s)}Q_i(s)}_{\text{Devida à Entrada}} + \underbrace{\left(\frac{R_i(s) - R_o(s)}{D(s)}\right)}_{\text{Devida às C.I.}}$$

E, a resposta do sistema no domínio do tempo é obtida pela T.L. inversa

$$q_o(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{N(s)}{D(s)}Q_i(s)\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{R_i(s) - R_o(s)}{D(s)}\right)\right\}$$

Cont. ...

Vamos fazer uma reflexão sobre as últimas expressões. Retornando à solução em s

$$Q_o(s) = \frac{N(s)}{D(s)} Q_i(s) + \left(\frac{R_i(s) - R_o(s)}{D(s)} \right)$$

Esta é a solução geral, que leva em conta a entrada ($Q_i(s)$) e as condições iniciais ($R_i(s)$ e $R_o(s)$). Para o caso mais geral, conforme já mostrado a solução em t fica

$$q_o(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{N(s)}{D(s)} Q_i(s) \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left(\frac{R_i(s) - R_o(s)}{D(s)} \right) \right\}$$

Agora vamos considerar dois casos separadamente. Inicialmente, consideremos que a entrada $q_i(t)$ é nula. Neste caso as equações acima são escritas como

$$Q_o(s) = \frac{R_i(s) - R_o(s)}{D(s)} = \frac{R_i(s)}{D(s)} - \frac{R_o(s)}{D(s)}$$

Resposta de Regime Transiente (Transitória)

$$q_{ot}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{R_i(s)}{D(s)} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{R_o(s)}{D(s)} \right\}$$

Devida somente às C.I.

Cont. ...

Se as condições iniciais forem nulas então temos

$$Q_o(s) = \frac{N(s)}{D(s)} Q_i(s)$$

E a partir desta podemos definir (confirmar !) o conceito de F.T.

$$H(s) = \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{q=0}^{M} b_q s^q}{\sum_{p=0}^{N} a_p s^p}$$

E, neste caso a resposta do sistema no domínio do tempo fica

Resposta de Regime Permanente

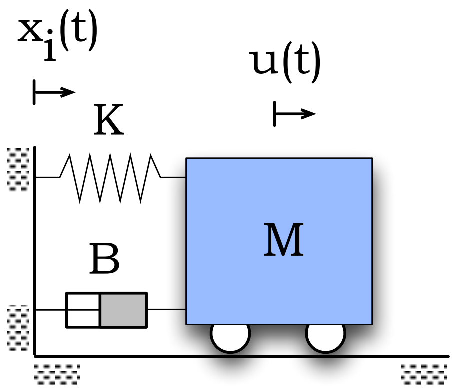
$$q_{op}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{N(s)}{D(s)} Q_i(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)Q_i(s)\right\}$$

Devida somente à $q_i(t)$

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Cont. ...

Exemplo: Sistema massa mola com entrada deslocamento via base



A equação de movimento é dada por:

$$M\frac{d^2u_o}{dt^2}+B\frac{du_o}{dt}+Ku_o=B\frac{dx_i}{dt}+Kx_i$$

Agora transformamos a EDO por Laplace

$$\mathcal{L}\left\{M\frac{d^2u_o}{dt^2}+B\frac{du_o}{dt}+Ku_o\right\}=\mathcal{L}\left\{B\frac{dx_i}{dt}+Kx_i\right\}$$

Resultando em

$$\left(Ms^2+Bs+K\right)U_o(s)-(Ms+B)\,u_o(0)-M\dot{u}_o(0)=(Bs+K)X_i(s)-Bx_i(0)$$

Então

$$D(s)=Ms^2+Bs+K$$
$$R_o(s)=-\left(Ms+B\right)u_o(0)-M\dot{u}_o(0)$$
$$N(s)=Bs+K$$
$$R_i(s)=-Bx_i(0)s$$

Cont. ...

$$U_o(s) = \underbrace{\overbrace{\boxed{\frac{Bs+K}{Ms^2+Bs+K}}}^{H(s)} X_i(s)}_{\text{Regime Permanente}} \underbrace{- \frac{Bx_i(0)}{Ms^2+Bs+K} + \frac{[(M+B)u_o(0)]s}{Ms^2+Bs+K} + \frac{M\dot{u}_o(0)}{Ms^2+Bs+K}}_{\text{Regime Transiente}}$$

Inexistência de condições iniciais na entrada $x_i(t)$

$$U_o(s) = \frac{Bs+K}{Ms^2+Bs+K} X_i(s) + \frac{[(M+B)u_o(0)]s}{Ms^2+Bs+K} + \frac{M\dot{u}_o(0)}{Ms^2+Bs+K}$$

Inexistência de condições iniciais na saída $u_o(t)$ a resposta de regime permanente é

$$U_o(s) = \frac{Bs+K}{Ms^2+Bs+K} X_i(s) \quad \Rightarrow \quad U_o(s) = H(s)X_i(s)$$

Cont. ...

E, para o caso da inexistência da entrada ($x_i(t) = 0$) o sistema responde somente às condições iniciais e a expressão da resposta fica então

$$U_{ot}(s) = [(M+B)u_o(0)]\left(\frac{s}{Ms^2+Bs+K}\right) + M\dot{u}_o(0)\left(\frac{1}{Ms^2+Bs+K}\right)$$

E, para todos os casos, a correspondente resposta no domínio do tempo é obtida tomando-se a transformada inversa de Laplace da respectiva expressão. Por exemplo, para o caso da resposta de regime transiente

$$u_{ot}(s) = \mathcal{L}^{-1}\{U_{ot}(s)\} = [(M+B)u_o(0)]\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{Ms^2+Bs+K}\right\}} + M\dot{u}_o(0)\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{Ms^2+Bs+K}\right\}}$$

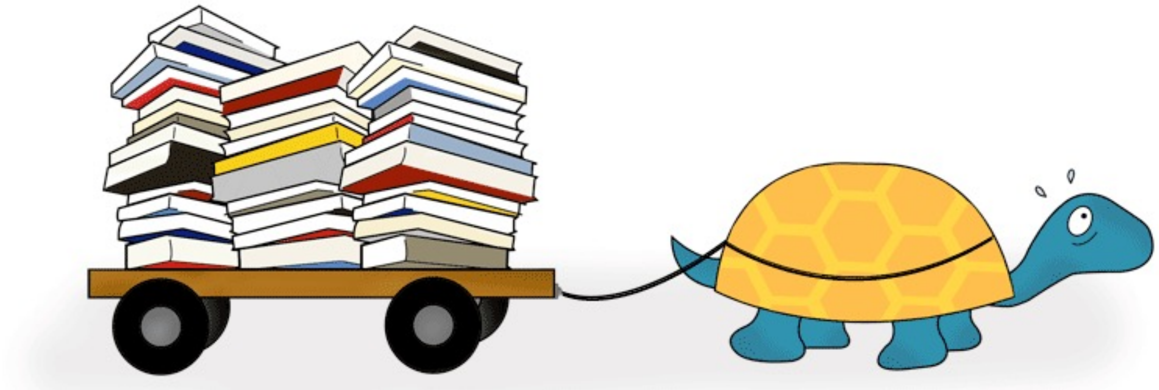
$\boxed{s_1 \text{ e } s_2 : \text{raízes de } Ms^2 + Bs + K}$ $\longrightarrow$ $\dfrac{s_2e^{-s_2t} - s_1e^{-s_1t}}{s_2 - s_1}$ $\qquad$ $\dfrac{e^{-s_1t} - e^{-s_2t}}{s_2 - s_1}$

E, para a resposta de regime permanente:

$$u_{op}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)X_i(s)\}$$ que depende de $x_i(t)$

FIM

Bom Estudo !



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

SEM 0533 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos I
SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

Estudo da Resposta de Sistemas Dinâmicos
Sistemas de Primeira Ordem

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves

SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM

A forma geral de um sistema de primeira ordem é obtida a partir da equação geral :

$$a_n \frac{d^n q_o}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} q_o}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{d^2 q_o}{dt^2} + \boxed{a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o =}$$
$$b_m \frac{d^m q_i}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} q_i}{dt^{m-1}} + b_1 \frac{dq_i}{dt} + \cdots + \boxed{b_0 q_i}$$

E, de forma mais simplificada:

$$a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_o q_i$$

Na forma padrão:

$$\frac{a_1}{a_0} \frac{dq_o}{dt} + q_o = \frac{b_o}{a_0} q_i$$

SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM

De forma compacta esta última equação pode ser escrita como:

$$\mathcal{T}\frac{dq_o}{dt} + q_o = \mathbb{K}q_i$$

Onde

$$\mathcal{T} = \frac{a_1}{a_0}$$ ⇨ ***CONSTANTE DE TEMPO*** [s]

$$\mathbb{K} = \frac{b_0}{a_0}$$ ⇨ ***GANHO DE REGIME PERMANENTE*** $[q_o]/[q_i]$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os lados da EDO temos:

$$\mathcal{T}\left(sQ_o(s) - q_o(0)\right) + Q_o(s) = \mathbb{K}Q_i(s)$$

Então, a solução em Laplace escreve

$$Q_o(s) = \frac{\mathbb{K}Q_i(s)}{\mathcal{T}s+1} + \frac{\mathcal{T}q_o(0)}{\mathcal{T}s+1}$$

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM

E, para o caso de $q_o(0) = 0$ temos para a resposta de regime permanente

$$Q_o(s) = \frac{\mathbb{K} Q_i(s)}{\mathcal{T} s + 1}$$

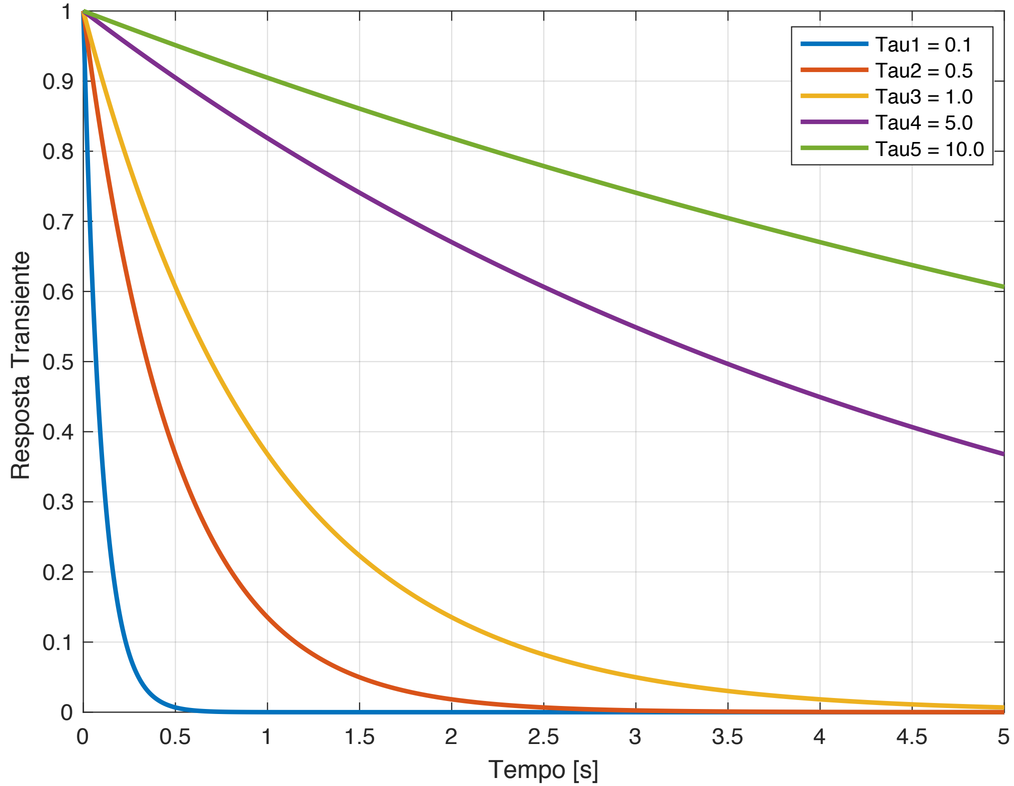
Da qual obtemos a F.T. para um sistema de primeira ordem na forma padrão

$$H(s) = \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{\mathbb{K}}{\mathcal{T} s + 1}$$

De forma análoga, se $q_i(t) = 0$ temos a resposta de regime transiente dada por

$$Q_{ot}(s) = \frac{\mathcal{T} q_o(0)}{\mathcal{T} s + 1} = \frac{q_o(0)}{s + \frac{1}{\mathcal{T}}} \quad \Rightarrow \quad q_{ot}(t) = q_o(0) e^{-\frac{1}{\mathcal{T}} t}$$

Gráfico da Resposta



A resposta de regime permanente em t é obtida de:

$$q_{op}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)Q_i(s)\right\}$$

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Cont. ...

E a resposta total é a soma das duas parcelas

$$q_o(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)Q_i(s)\right\} + q_o(0)e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

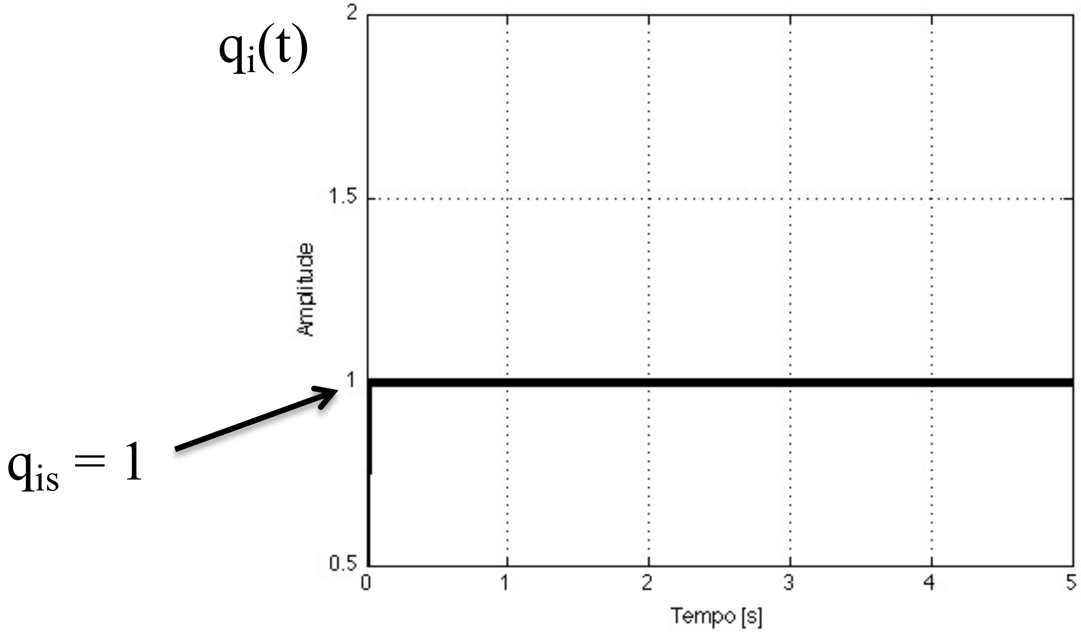
Como mostrado, a resposta total $q_o(t)$ depende da natureza da entrada $q_i(t)$ e, consequentemente de sua transformada de Laplace $Q_i(s)$. Veremos em seguida vários exemplos de entradas sendo as mais importantes:

- O degrau
- A rampa
- O impulso
- Com atraso no tempo
- Combinadas
- Harmônica

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM - EXEMPLOS

Vamos obter a resposta de um sistema de primeira ordem à entrada *degrau unitário* mostrada abaixo



Analiticamente a entrada degrau unitário pode ser expressa como:

$$q_i(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geqslant 0 \end{cases}$$

Obs: a notação u(t) ou μ(t) são amplamente usadas para representar funções degrau !

Cont. ...

Uma entrada degrau com amplitude genérica qis é escrita como: $q_i(t) = q_{is} u(t)$

A Transformada de Laplace da entrada é dada por: $Q_i(s) = q_{is} \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{q_{is}}{s}$

Sabemos que a solução geral é dada por: $Q_o(s) = \frac{\mathbb{K} Q_i(s)}{\mathcal{T} s + 1} + \frac{\mathcal{T} q_o(0)}{\mathcal{T} s + 1}$

$$Q_o(s) = \frac{\mathbb{K} q_{is}}{\mathcal{T}} \left(\frac{1}{s\left(s + \frac{1}{\mathcal{T}}\right)} \right) + \frac{q_o(0)}{s + \frac{1}{\mathcal{T}}}$$

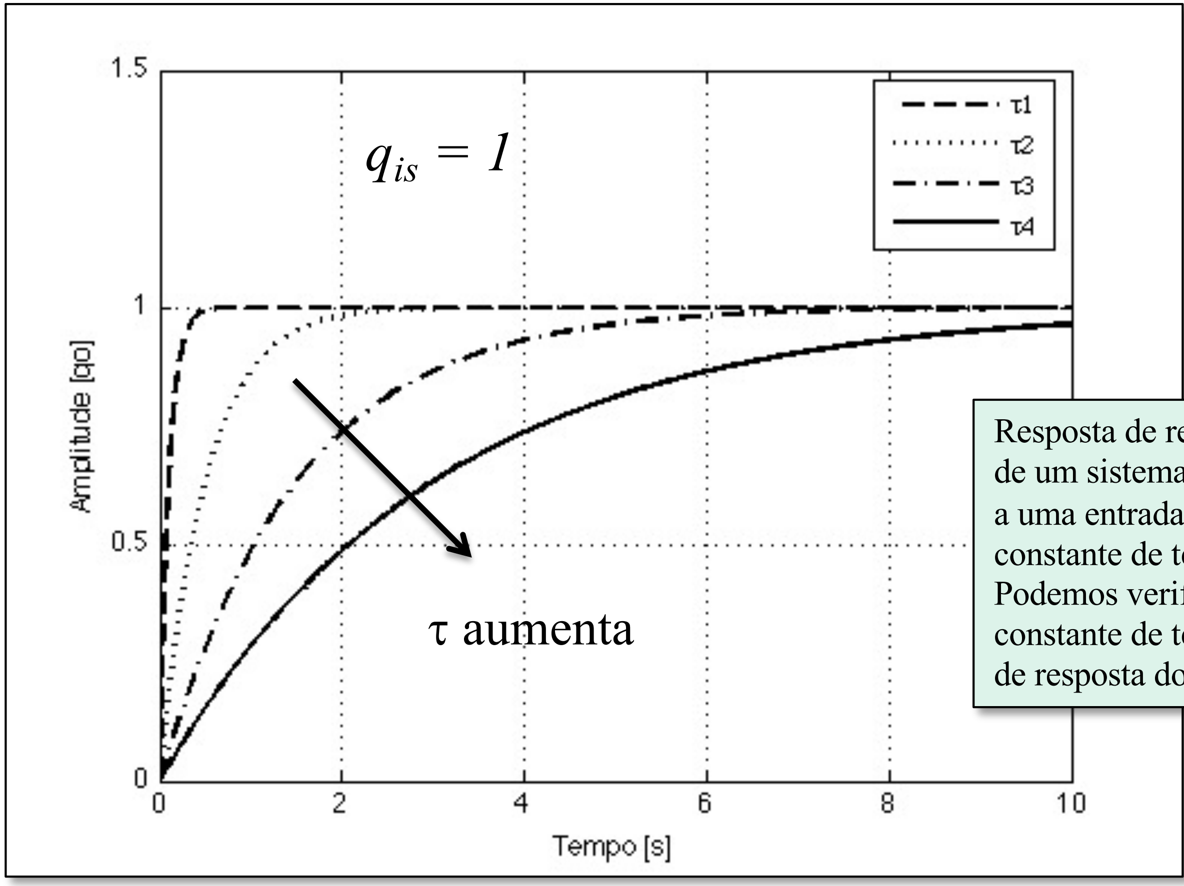
E a solução no domínio do tempo é obtida pela Transformada Inversa de Laplace

$$q_o(t) = \mathbb{K} q_{is} \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau} t}\right) + q_o(0) e^{-\frac{1}{\tau} t}$$

Cont. ...

E, para $q_o(0) = 0$

$$q_o(t) = \mathbb{K} q_{is} \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau} t}\right)$$



Resposta de regime permanente de um sistema de primeira ordem a uma entrada degrau unitário e constante de tempo variável ! Podemos verificar a influência da constante de tempo τ na velocidade de resposta do sistema !

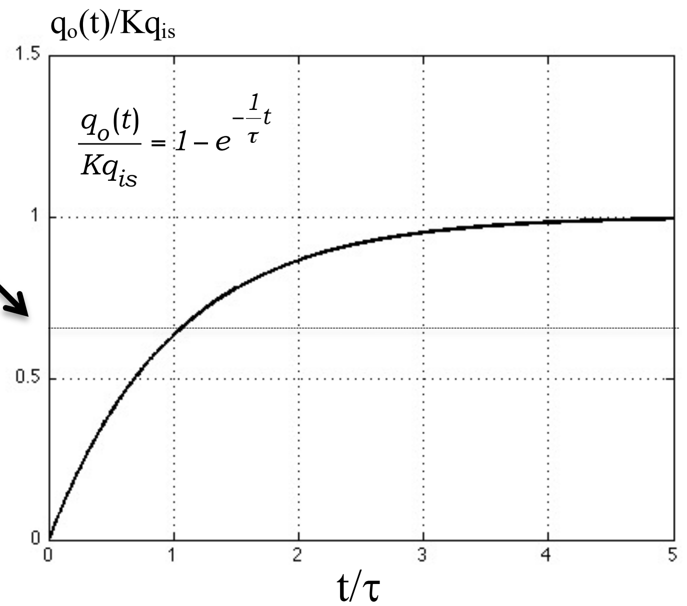
Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

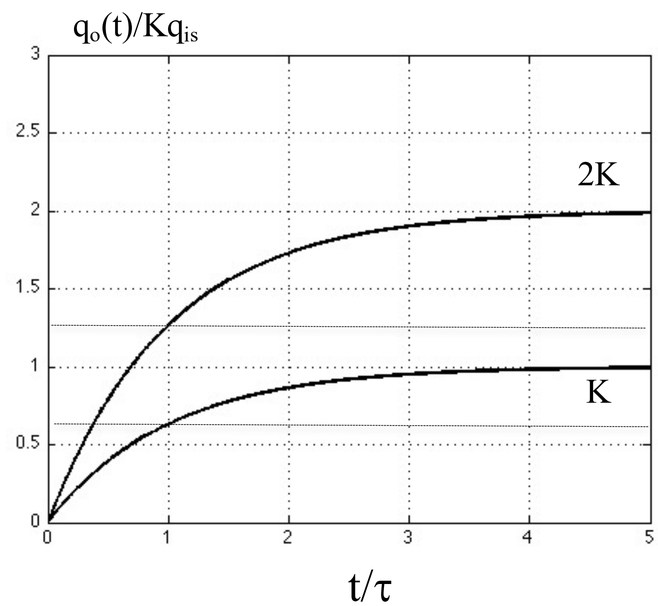
Cont. ...

Conclusão 1: A constante de tempo τ interfere diretamente na velocidade de resposta do sistema de primeira ordem e de forma inversamente proporcional. Quanto menor a constante de tempo maior é a velocidade de resposta do sistema pois o mesmo atinge a resposta de regime permanente num intervalo de tempo menor (e vice versa)

Façamos agora uma análise admensional da resposta de regime ao degrau unitário:

t/τ	$q_o(t)/Kq_{is}$
0	0
1	0,632
2	0,865
3	0,950
4	0.982
∞	1.000



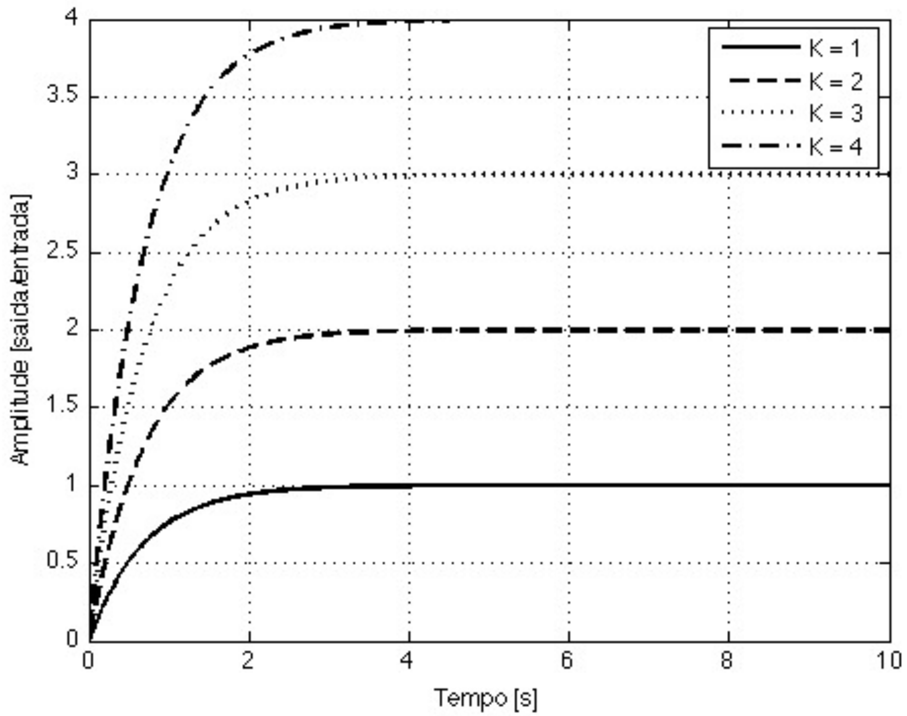


Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC • USP

Cont. ...

Definição: A constante de tempo de um sistema de primeira ordem τ representa o intervalo de tempo necessário para que o sistema atinja *63,2 %* da resposta de regime permanente para uma entrada degrau unitário na origem dos tempos e com condições iniciais nulas.

Já o grafico abaixo mostra a influência do ganho de regime K na resposta de regime permanente do sistema:



Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Cont. ...

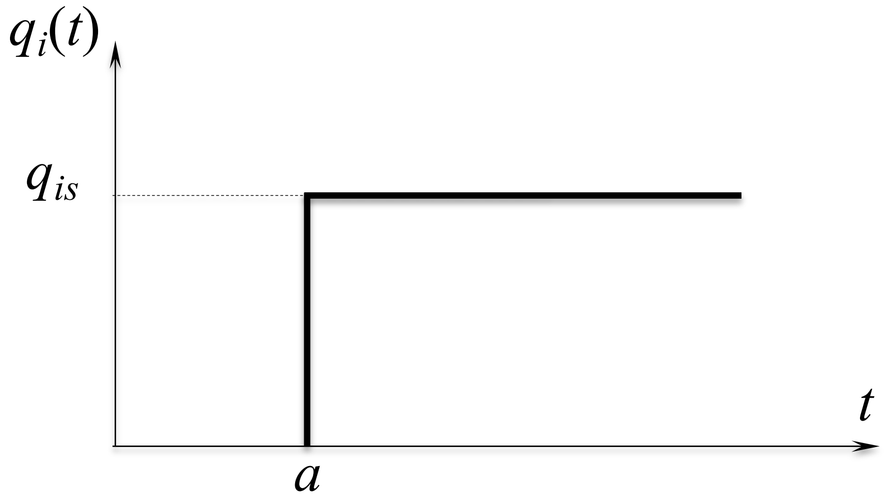
Definição: ***O ganho de regime permanente K*** (ou ***sensibilidade estática***) é definido como a quantidade de saída que se obtém em regime permanente por cada unidade de entrada aplicada ao sistema.

Algébricamente:

$$K = \frac{[q_o(t)]}{[q_i(t)]}$$

Cont. ...

Vejamos agora o caso onde a entrada degrau unitário apresenta um atraso no tempo:



$$q_i(t) = q_{is}u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ q_{is} & t \geq a \end{cases}$$

E para o cálculo da Transformada de Laplace usamos a seguinte propriedade

$$\mathcal{L}\left\{f(t-a)\right\} = F(s)e^{-as} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-as}\right\} = f(t-a)$$

Onde F(s) representa a transformada da função não defasada em t !

Cont. ...

Logo para o degrau com atraso temos

$$Q_i(s) = q_{is}\left(\frac{1}{s}\right)e^{-as}$$

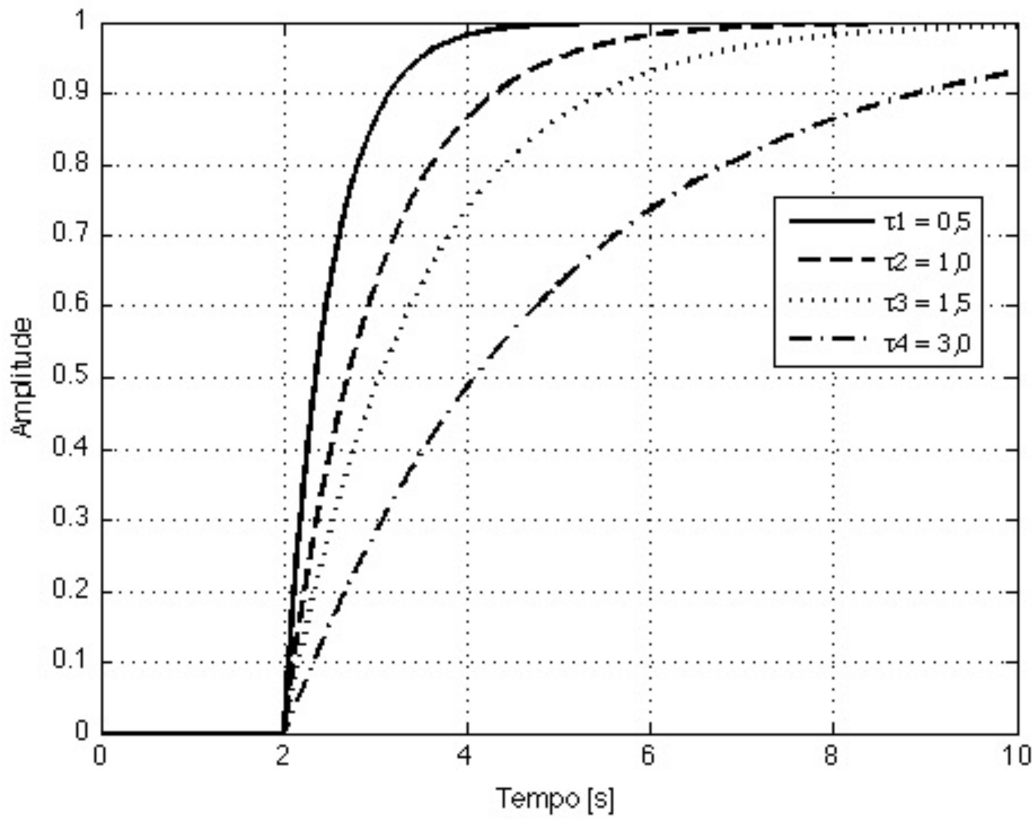
E para determinarmos a *resposta de regime permanente* ($q_o(0) = 0$) usamos

$$q_o(t) = \frac{\mathbb{K}}{\tau}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}Q_i(s)\right\} \Rightarrow q_o(t) = q_{is}\frac{\mathbb{K}}{\tau}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}\left(\frac{1}{s}\right)e^{-as}\right\}$$

$$q_o(t) = \frac{\mathbb{K}}{q_{is}}\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}(t-a)}\right)u(t-a)$$

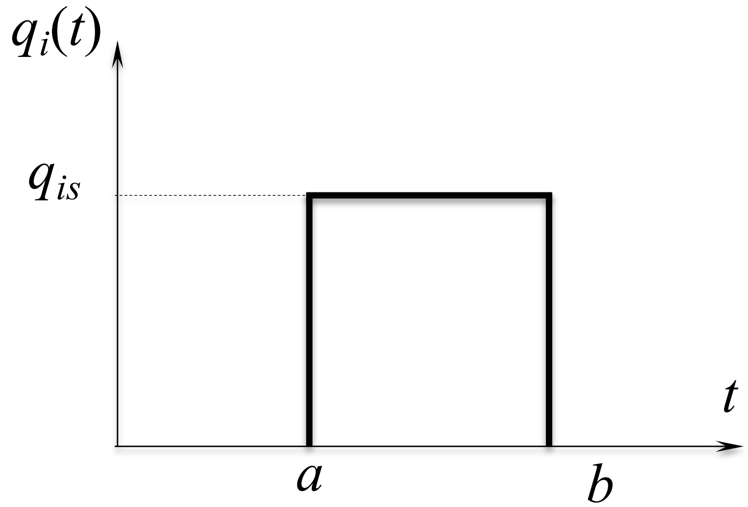
Cont. ...

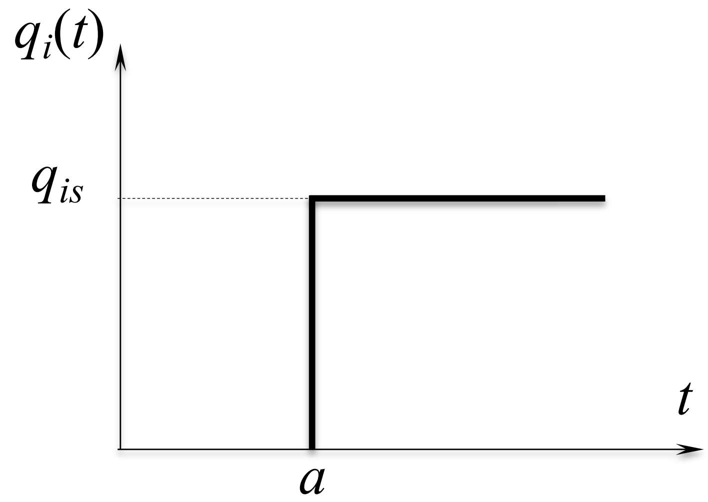
Graficamente:

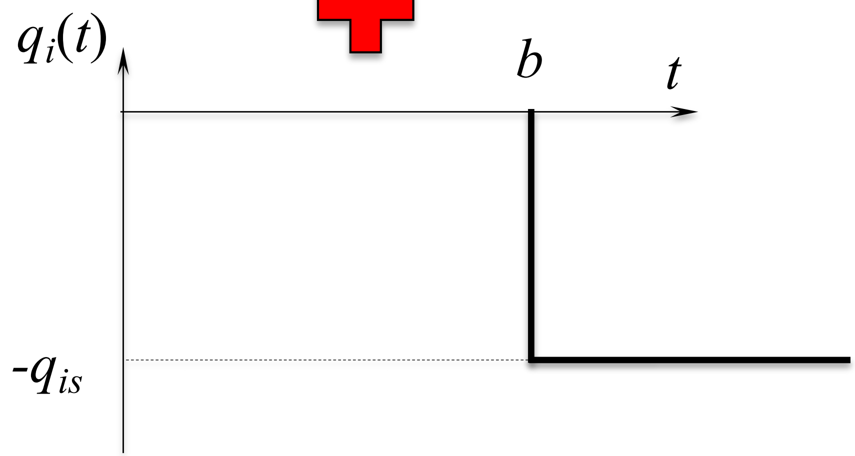


Cont. ...

Vamos agora analisar o seguinte caso







$$q_i(t) = q_{is}u(t-a)u(t-a) - q_{is}u(t-b)u(t-b)$$

ou

$$q_i(t) = q_{is}u(t-a) - q_{is}u(t-b)$$

$$Q_i(s) = q_{is}\frac{1}{s}\left(e^{-as} - e^{-bs}\right)$$

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC • USP

Cont. ...

Calculamos agora a resposta de regime permanente do sistema:

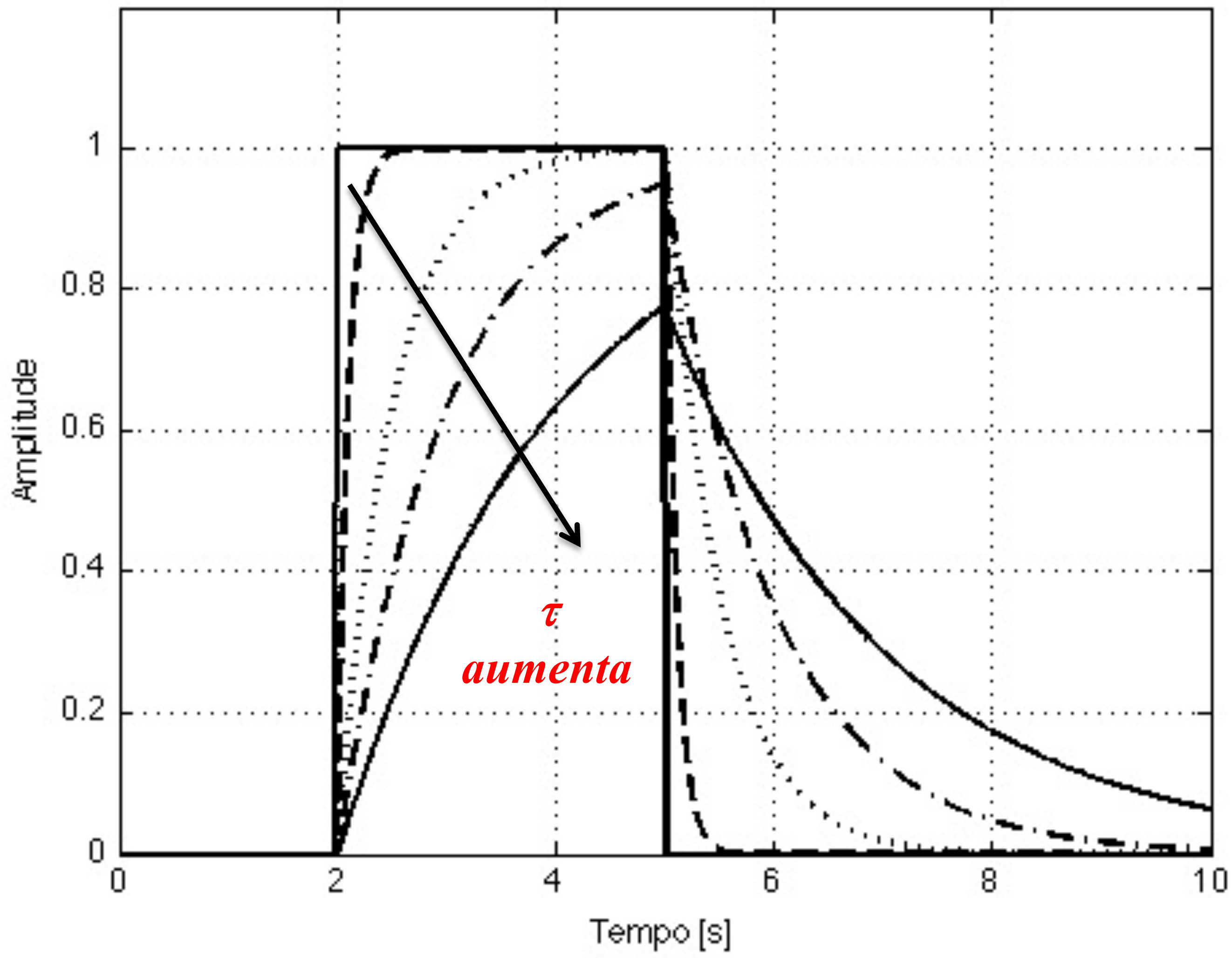
$$q_o(t) = \frac{\mathbb{K}}{\tau}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}Q_i(s)\right]$$

$$q_o(t) = \frac{\mathbb{K}}{\tau}q_{is}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}e^{-as} - \frac{1}{s}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}e^{-bs}\right]$$

$$q_o(t) = \mathbb{K}q_{is}\left[\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}(t-a)}\right)u(t-a) - \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}(t-b)}\right)u(t-b)\right]$$

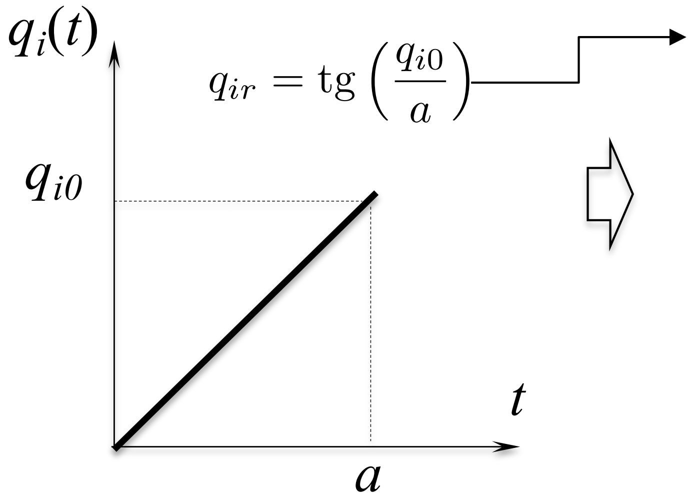
Cont. ...

Graficamente:



Resposta à uma entrada do tipo Rampa

Agora vamos obter a resposta de regime permanente do sistema de primeira ordem à uma entrada do tipo ***rampa.***



rampa unitária: $q_{ir} = 1$

$$q_i(t) = q_{ir}t \quad \Leftrightarrow \quad Q_i(s) = \frac{q_{ir}}{s^2}$$

EDO do sistema:

$$\tau \frac{dq_o}{dt} + q_o = \mathbb{K} q_{ir} t$$

Transformando

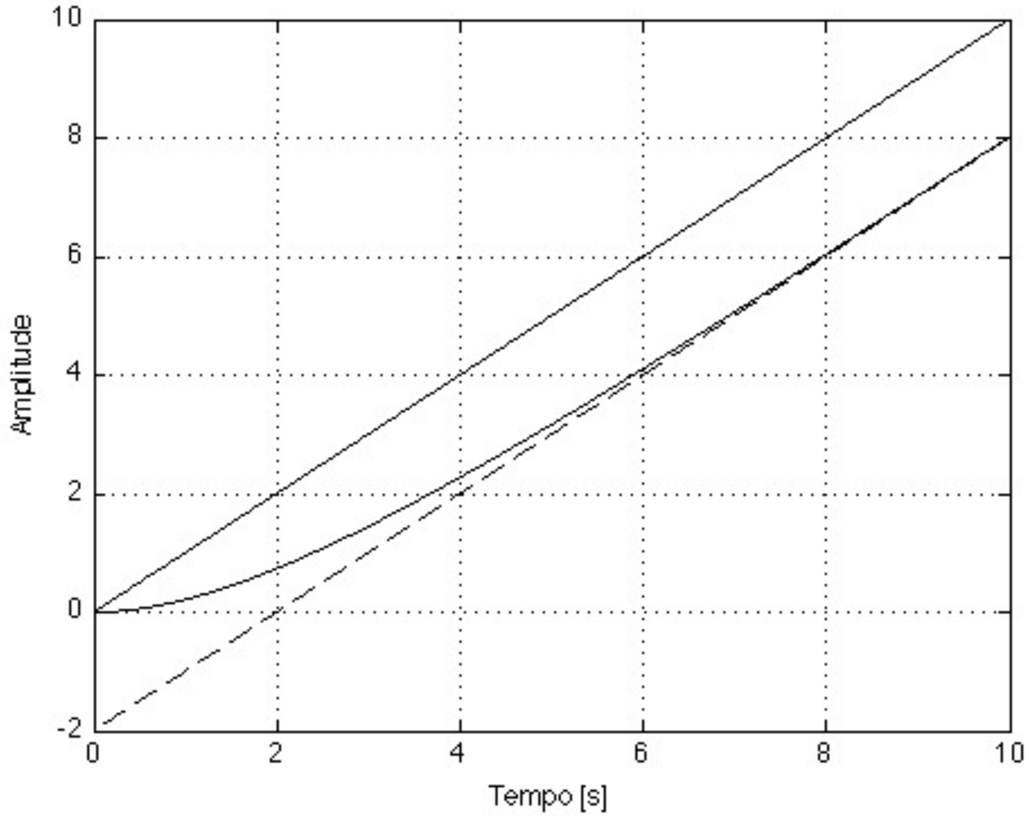
$$\tau\left(sQ_o(s) - q_o(0)\right) + Q_o(s) = \frac{\mathbb{K} q_{ir}}{s^2}$$

$$Q_o(s) = \frac{\mathbb{K} q_{ir}}{s^2(\tau s + 1)} + \frac{\tau q_o(s)}{\tau s + 1}$$

Cont. ...

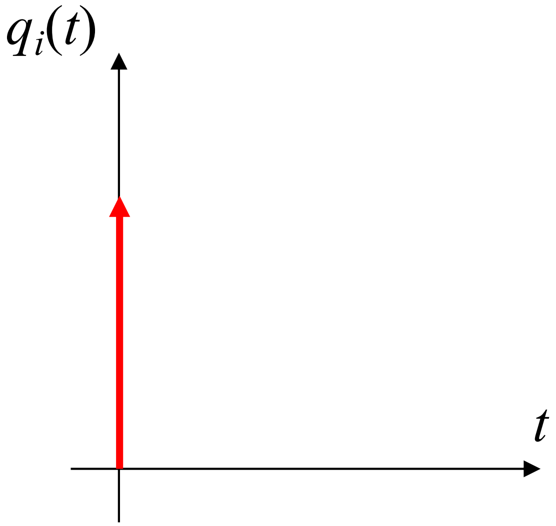
$$q_o(t) = q_o(0)e^{-\frac{1}{\tau}t} + \mathbb{K}q_{ir}e^{-\frac{1}{\tau}t} + \mathbb{K}q_{ir}(t-\tau)$$

$$\boxed{q_o(t) = \mathbb{K}q_{ir}e^{-\frac{1}{\tau}t} + \mathbb{K}q_{ir}(t-\tau)}$$



Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Resposta à uma entrada Impulso



Impulso Unitário: $A_i = 1$

$$q_i(t) = A_i\delta(t) \quad \Leftrightarrow \quad Q_i(s) = A_i$$

$$\mathcal{L}\left(\delta(t)\right) = 1$$

EDO do sistema:

$$\tau\frac{dq_o}{dt} + q_o = A_i\delta(t)$$

Transformando:

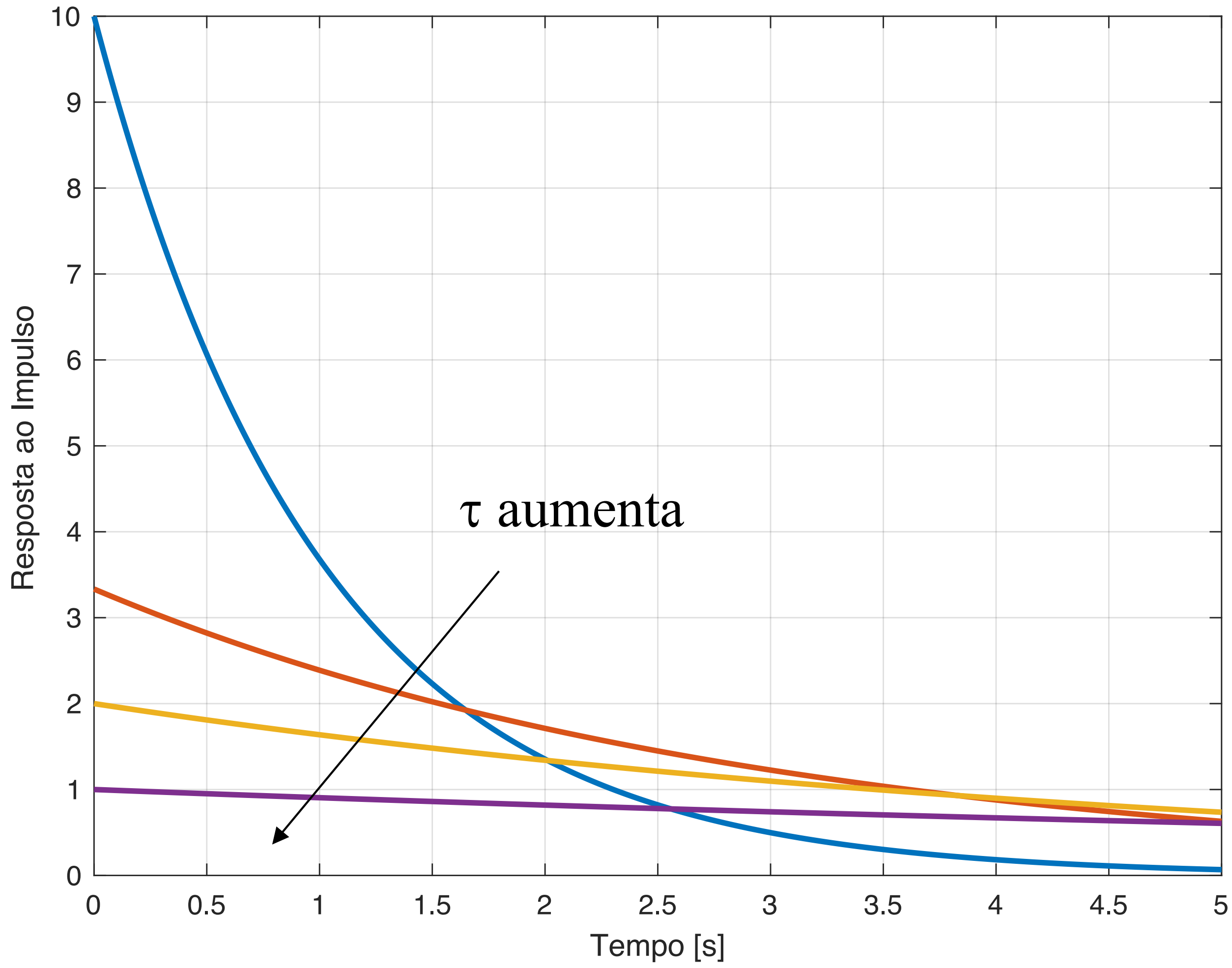
$$\tau(sQ_o(s) - q_o(0)) + Q_o(s) = A_i \quad \Rightarrow \quad Q_o(s) = \frac{\frac{A_i}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{\frac{q_o(0)}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}}$$

$$q_o(t) = \frac{A_i}{\tau}(1 + q_o(0))e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad \Rightarrow \quad q_o(t) = \frac{A_i}{\tau}e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

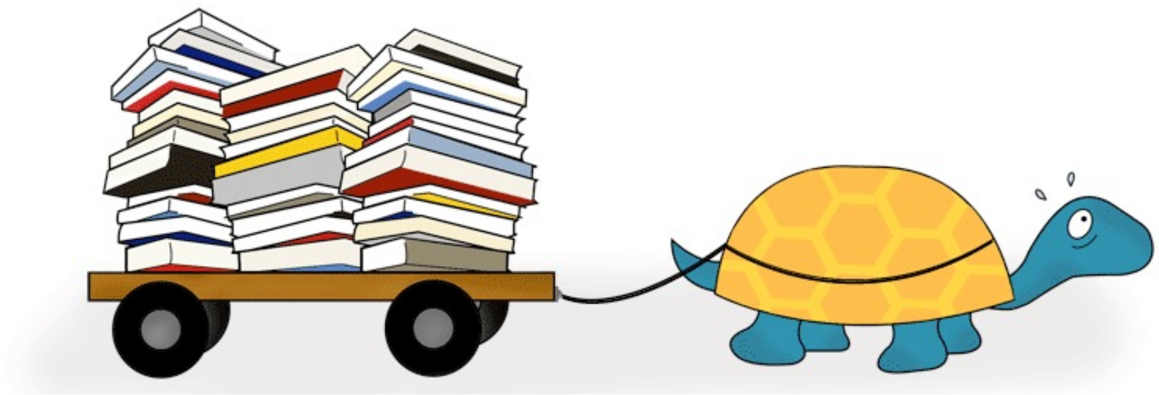
Resposta à uma entrada do tipo Impulso

Graficamente



FIM

Bom Estudo !



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

SEM 0533 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos I
SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

Estudo da Resposta de Sistemas Dinâmicos
Sistemas de Segunda Ordem

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC • USP

Sequência de Conteúdos

- Conceituação teórica de um sistema de 2ª Ordem
- Definição dos parâmetros físicos que o caracterizam
- Estudo da resposta de um 2ª Ordem à entradas padrão

Bibliografia:

1 Felício, L. C., Modelagem da Dinâmica de Sistemas e Estudo da Resposta, Rima, 2010

2 Doebelin, E. O., System Dynamics, Modeling, Analysis, Simulation, Design, M. Dekker, 1998

FORMA GERAL

A forma geral de um sistema de primeira ordem é obtida a partir da equação geral para dois casos de interesse:

$$a_n \frac{d^n q_o}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} q_o}{dt^{n-1}} + \cdots + \boxed{a_2 \frac{d^2 q_o}{dt^2} + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o =}$$
$$b_m \frac{d^m q_i}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} q_i}{dt^{m-1}} + \boxed{b_1 \frac{dq_i}{dt} + \cdots + b_0 q_i}$$

Modelo # 1

$$a_2 \frac{d^2 q_o}{dt^2} + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_1 \frac{dq_i}{dt} + b_0 q_i$$

Modelo # 2

$$a_2 \frac{d^2 q_o}{dt^2} + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_0 q_i$$

Forma Padrão:

$$\boxed{\frac{a_2}{a_0}\frac{d^2 q_o}{dt^2} + \frac{a_1}{a_0}\frac{dq_o}{dt} + q_o = \frac{b_1}{a_0}\frac{dq_i}{dt} + \frac{b_0}{a_0} q_i}$$

$$\boxed{\frac{a_2}{a_0}\frac{d^2 q_o}{dt^2} + \frac{a_1}{a_0}\frac{dq_o}{dt} + q_o = \frac{b_0}{a_0} q_i}$$

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Cont. ...

Propriedades importantes:

$$\frac{a_2}{a_0}\frac{d^2q_o}{dt^2} + \frac{a_1}{a_0}\frac{dq_o}{dt} + q_o = \frac{b_0}{a_0}q_i$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$$

Frequência natural não amortecida (rad/s)

$$\zeta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2 a_0}}$$

Razão ou fator de amortecimento (admensional)

$$\mathbb{K} = \frac{b_0}{a_0}$$

Ganho de regime permanente ([q_o]/[q_i])

Um sistema de segunda ordem fica completamente caracterizado por estas três propriedades

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Cont. ...

Portanto, podemos reescrever as EDOs dos dois modelos como

$$\boxed{\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2q_o}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{dq_o}{dt} + q_o = \frac{b_1}{a_0}\frac{dq_i}{dt} + \frac{b_0}{a_0}q_i}$$

$$\boxed{\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2q_o}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{dq_o}{dt} + q_o = \mathbb{K}q_i}$$

Considerando condições iniciais nulas, as F.T. para os modelos são

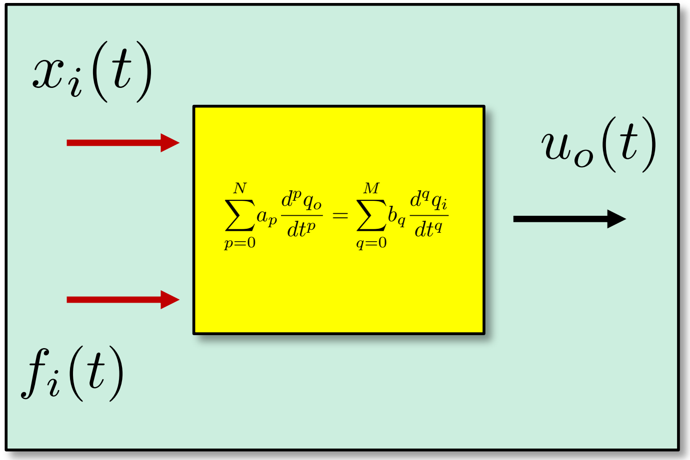
$$\boxed{\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{\frac{b_1}{a_0}s + \frac{b_0}{a_0}}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}}$$

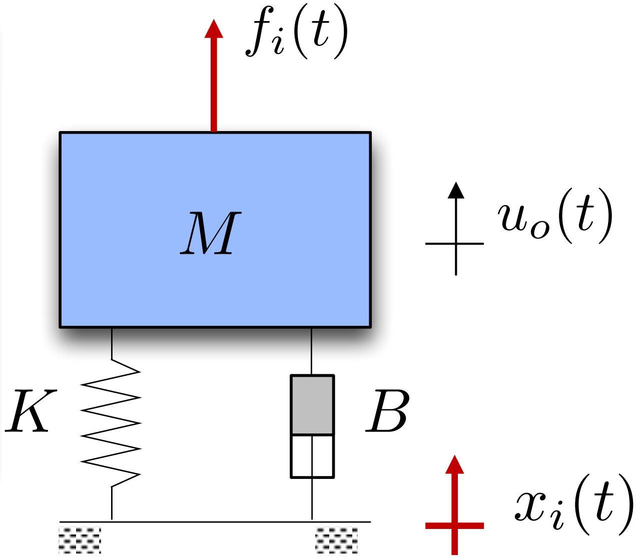
$$\boxed{\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{\mathbb{K}}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}}$$

Para fins de determinação da resposta à entradas padrão consideraremos o segundo modelo !

Resposta Transiente Sistema de Segunda Ordem (só às CIs)

Um bom modelo para estudarmos a resposta é o massa-mola-amortecedor





$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\omega_n = \sqrt{\dfrac{K}{M}} & (rad/s) \\
\zeta = \dfrac{B}{2\sqrt{kM}} & (adm) \\
\mathbb{K} = \dfrac{1}{K} & (m/N)
\end{array}
\right.
$$

EDO:

$$
M\frac{d^2u_o(t)}{dt^2} + B\frac{du_o}{dt} + Ku_o = \underbrace{f_i(t)}_{\text{força}} + \underbrace{Kx_i(t) + B\dot{x}_i(t)}_{\text{deslocamento}}
$$

Forma Padrão:

$$
\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2u_o(t)}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{du_o}{dt} + u_o = \mathbb{K}f_i(t) + x_i(t) + \frac{2\zeta}{\omega_n}\dot{x}_i(t)
$$

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Cont. ...

Se considerarmos as entradas individualmente temos as seguines EDOs

Entrada $f_i(t)$:

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2u_o(t)}{dt^2}+\frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{du_o}{dt}+u_o=\mathbb{K}f_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{H(s)=\frac{U_o(s)}{F_i(s)}=\frac{\mathbb{K}}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+1}}$$

Entrada $X_i(t)$:

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2u_o(t)}{dt^2}+\frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{du_o}{dt}+u_o=x_i+\frac{2\zeta}{\omega_n}\dot{x}_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{H(s)=\frac{U_o(s)}{X_i(s)}=\frac{\frac{2\zeta}{\omega_n}s+1}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+1}}$$

Para a resposta transiente :

$$\boxed{\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2u_o}{dt^2}+\frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{du_o}{dt}+u_o=0} \qquad u_o(0)\neq 0 \quad \dot{u}_o(0)\neq 0$$

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Cont. ...

Para o estudo da resposta transiente fazemos $f_i(t) = 0$ e então

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2u_o}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{du_o}{dt} + u_o = 0$$

Tomando a T.L. para condições iniciais quaisquer temos

$$\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right) U_o(s) - (s + 2\zeta\omega_n)u_o(0) - \dot{u}_o(0) = 0$$

E resolvendo algebricamente para $U_o(s)$

$$U_o(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega_n)u_o(0)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{\dot{u}_o(0)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

A solução no domínio do tempo é obtida pela transformada inversa de Laplace desta última expressão. No entanto, esta transformação depende da natureza das raízes da ***equação característica do sistema***

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Equação característica

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Cont. ...

Temos três possibilidades:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

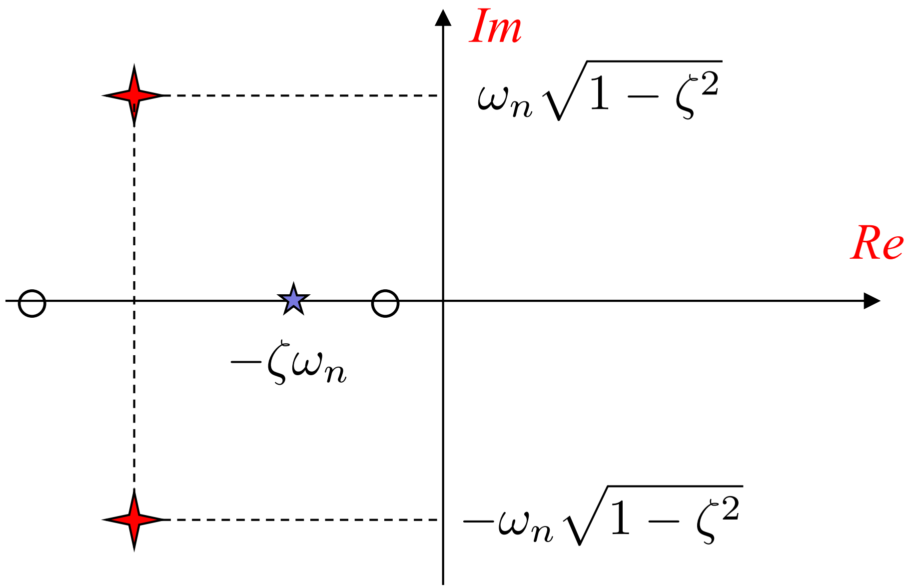
Reais e distintas $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad \zeta > 1$ *sobreamortecido*

Reais e iguais $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \quad \Leftrightarrow \quad \zeta = 1$ *criticamente amortecido*

Complexas $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\,\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \zeta < 1$ *subamortecido*

mais importante !

Plano Complexo



As raizes $s_{1,2}$
são denominadas
pólos do sistema !

$$\zeta = \frac{B}{2\sqrt{KM}}$$

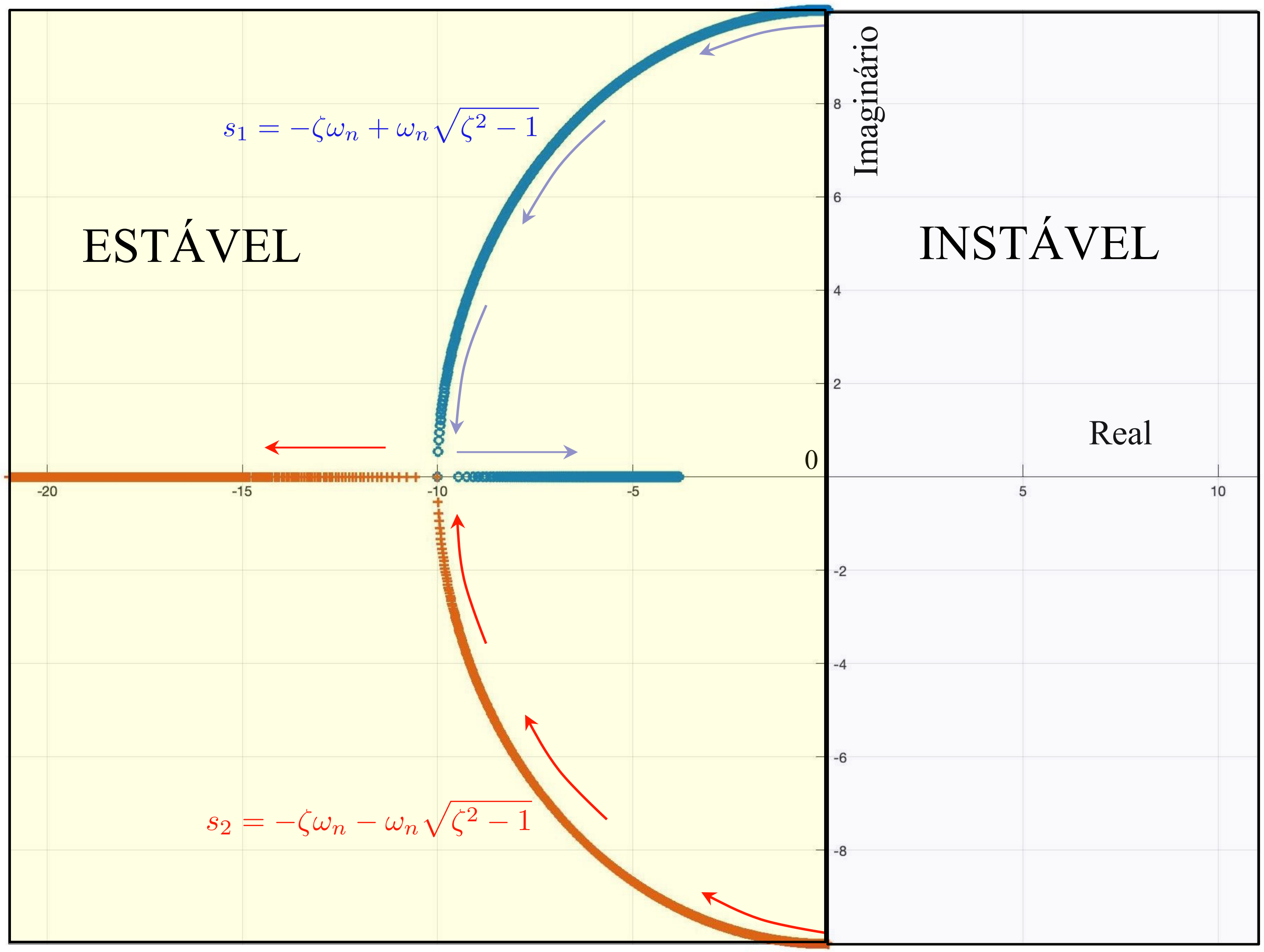
$$B_c = 2\sqrt{KM}$$

amortecimento
crítico

$$\boxed{\zeta = \frac{B}{B_c}}$$

Cont. ...

Lugar das raízes da equação característica com variação do amortecimento



Cont. ...

Para obtermos a resposta transiente para os três casos retornemos à solução:

$$U_o(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega_n)u_o(0)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{\dot{u}_o(0)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

E fatoramos o polinômio do denominador em função de suas raízes

$$U_o(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega_n)u_o(0)}{(s - s_1)(s - s_2)} + \frac{\dot{u}_o(0)}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

A solução no domínio do tempo dependerá do valor de ζ ! então teremos três soluções

$\zeta > 1$:

$$\boxed{u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(a_1 e^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t} + a_2 e^{+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t}\right)}$$

$$a_1 = \frac{-\dot{u}_o(0) + (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n u_o(0)}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$$a_2 = \frac{\dot{u}_o(0) + (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n u_o(0)}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

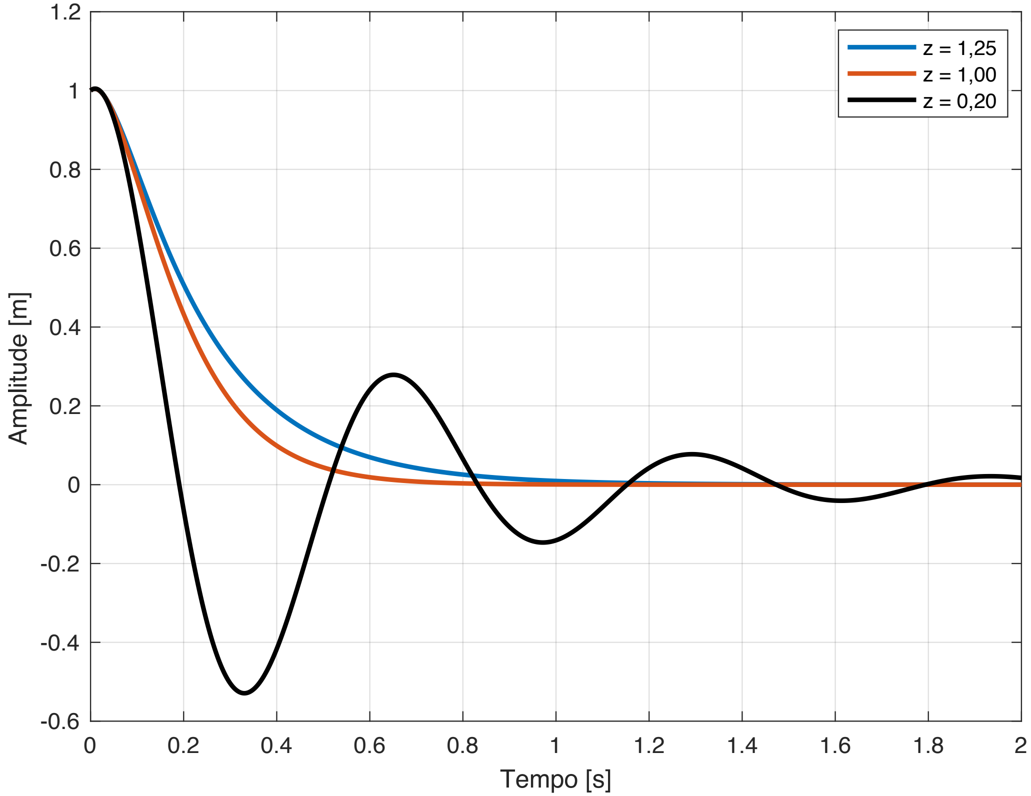
Cont. ...

$\zeta = 1$:

$$u_o(t) = \left[u_o(0) + \left(\dot{u}_o(0) + \omega_n u_o(0)\right) t\right] e^{-\omega_n t}$$

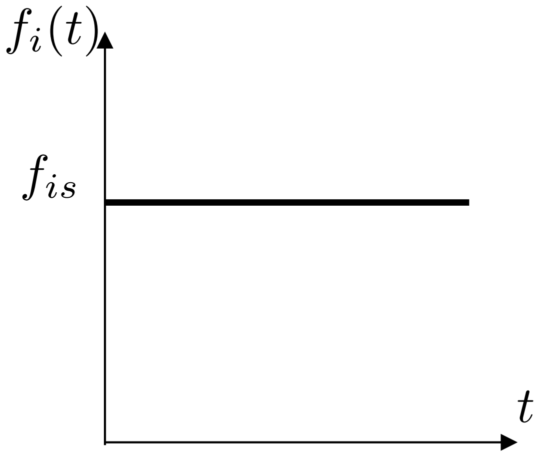
$0 < \zeta < 1{,}0$:

$$u_o(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(u_o(0)\cos\ \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \frac{\dot{u}_o(0) + \zeta\omega_n u_o(0)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\text{sen}\ \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right)$$



Resposta à Entrada Degrau

Modelo da entrada:



$$f_i(t) = f_{is} u(t)$$

$$M\ddot{u}_o + B\dot{u}_o + K u_o = f_{is} u(t)$$

$$\frac{1}{\omega_n^2}\ddot{u}_o + \frac{2\zeta}{\omega_n}\dot{u}_o + u_o = \mathbb{K} f_{is} u(t)$$

Para a obtenção da solução faremos duas hipóteses simplificadoras

- Condições iniciais nulas ($u_o(0) = 0$ e $v_o(0) = 0$)
- O sistema é subamortecido: $\zeta < 1{,}0$

Logo, as raizes da equação característica são:

Frequência Natural amortecida !

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Cont. ...

Aplicando a T.L. a ambos os lados da equação de movimento e resolvendo para a variável de saída temos

$$U_o(s) = \frac{\mathbb{K} f_{is}}{s(s-s_1)(s-s_2)}$$

E, calculando a transformada inversa temos a resposta de regime permanente à uma entrada degrau de amplitude f_{is}

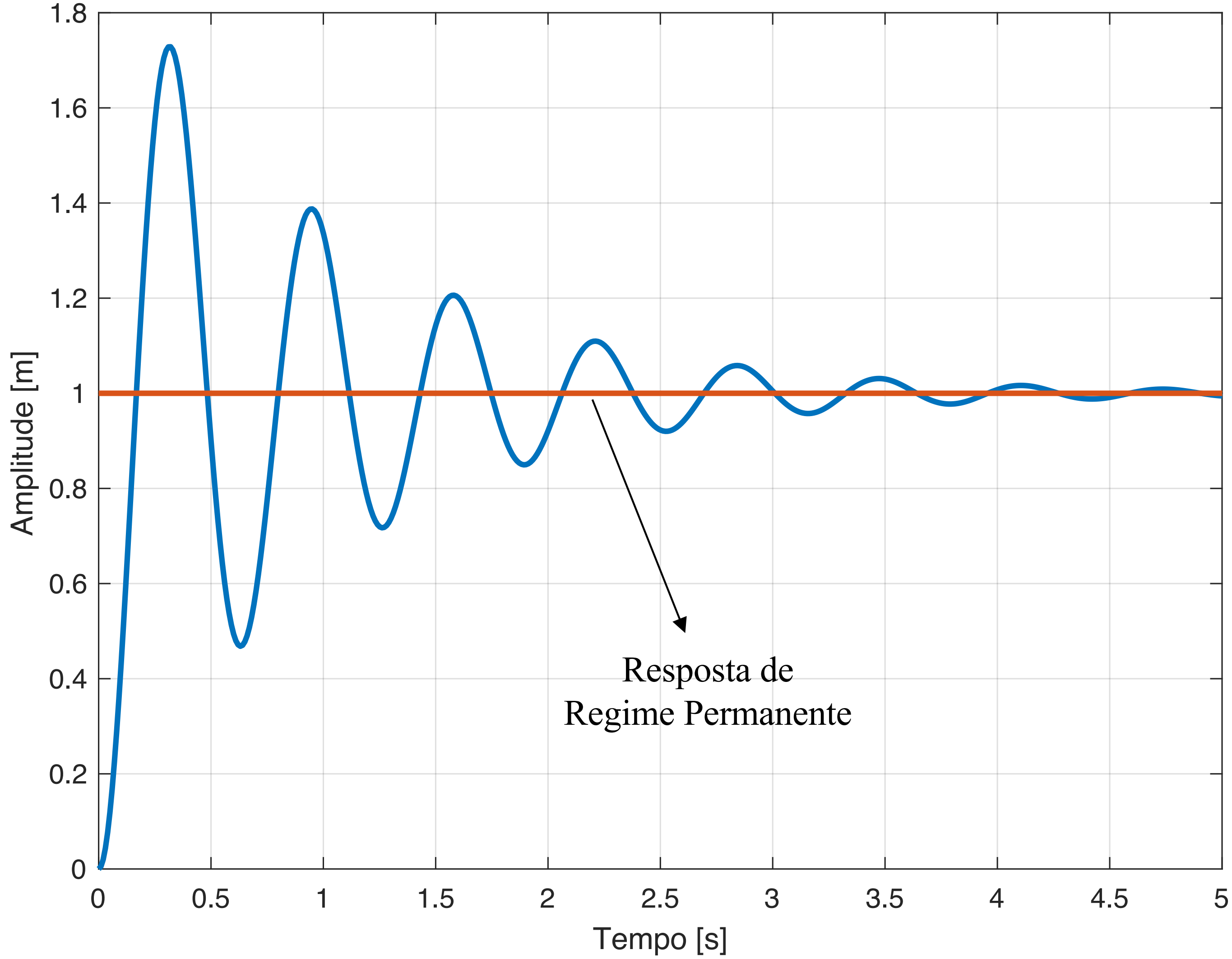
$$u_o(t) = \mathbb{K} f_{is} \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\mathrm{sen}\omega_d t + \cos\omega_d t\right)\right]$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

$$\boxed{u_o(t) = \mathbb{K} f_{is}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \phi)\right]}$$

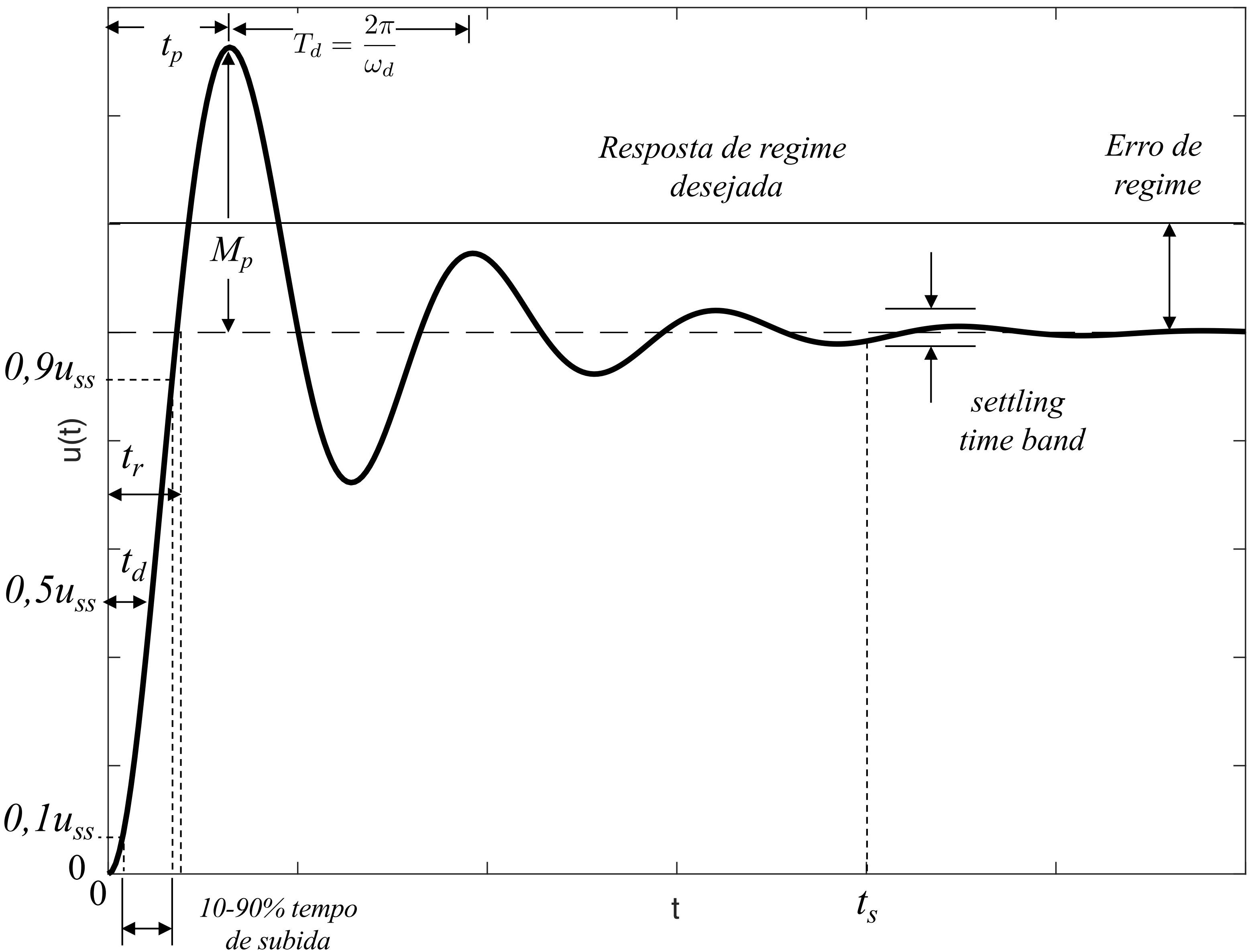
Cont. ...

Gráfico da resposta à um *degrau unitário* ($f_{is} = 1$) e *condições iniciais nulas*



Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Análise da Resposta ao Degrau



Análise da Resposta ao Degrau Unitário

Overshoot Máximo (Mp :) (Sobresinal Máximo)

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \left[\begin{array}{l} t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \\ \\ u(t_p) = u_p = \mathbb{K} e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \end{array} \right.$$

Tempo de subida (rise time) (t_r) :

$$t_r = \frac{2\pi - \phi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

Settling time 2% (t_s) : (Tempo de acomodação)

$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n}$$

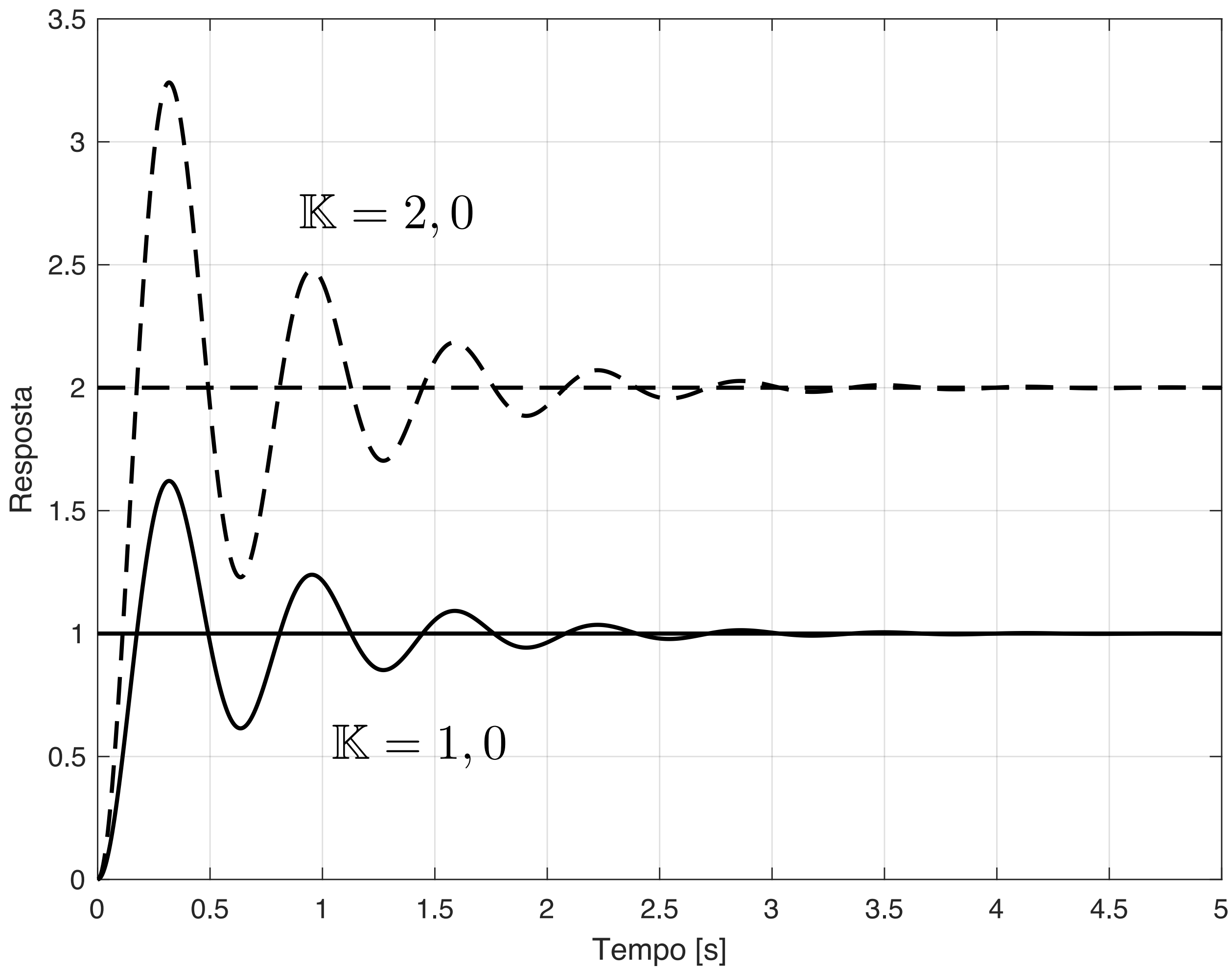
delay time (t_d): (Atraso)

$$t_d \cong \frac{1 + 0,7\zeta}{\omega_n}$$

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

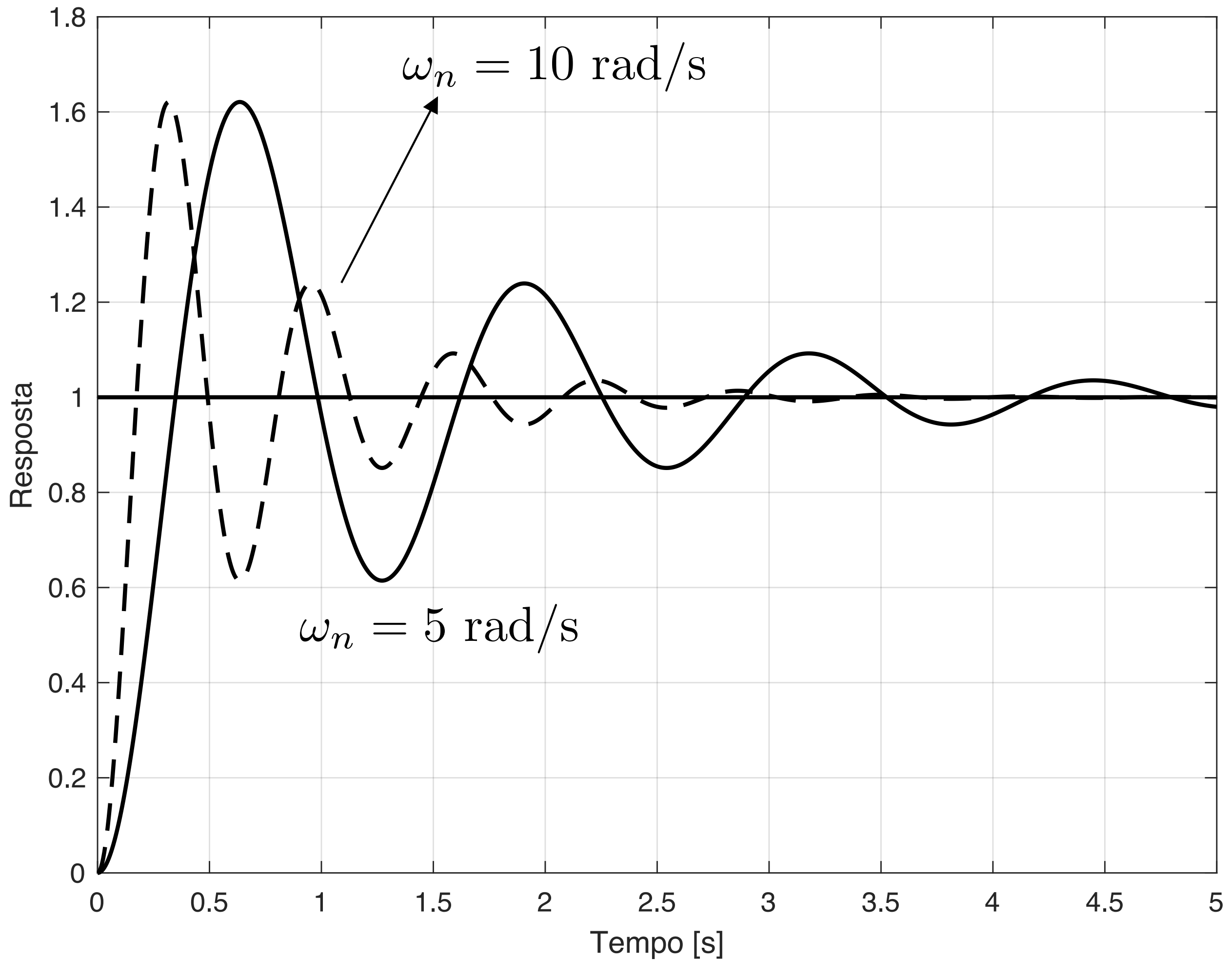
Análise dos Parâmetros na Resposta do Sistema

GANHO DE REGIME PERMANENTE



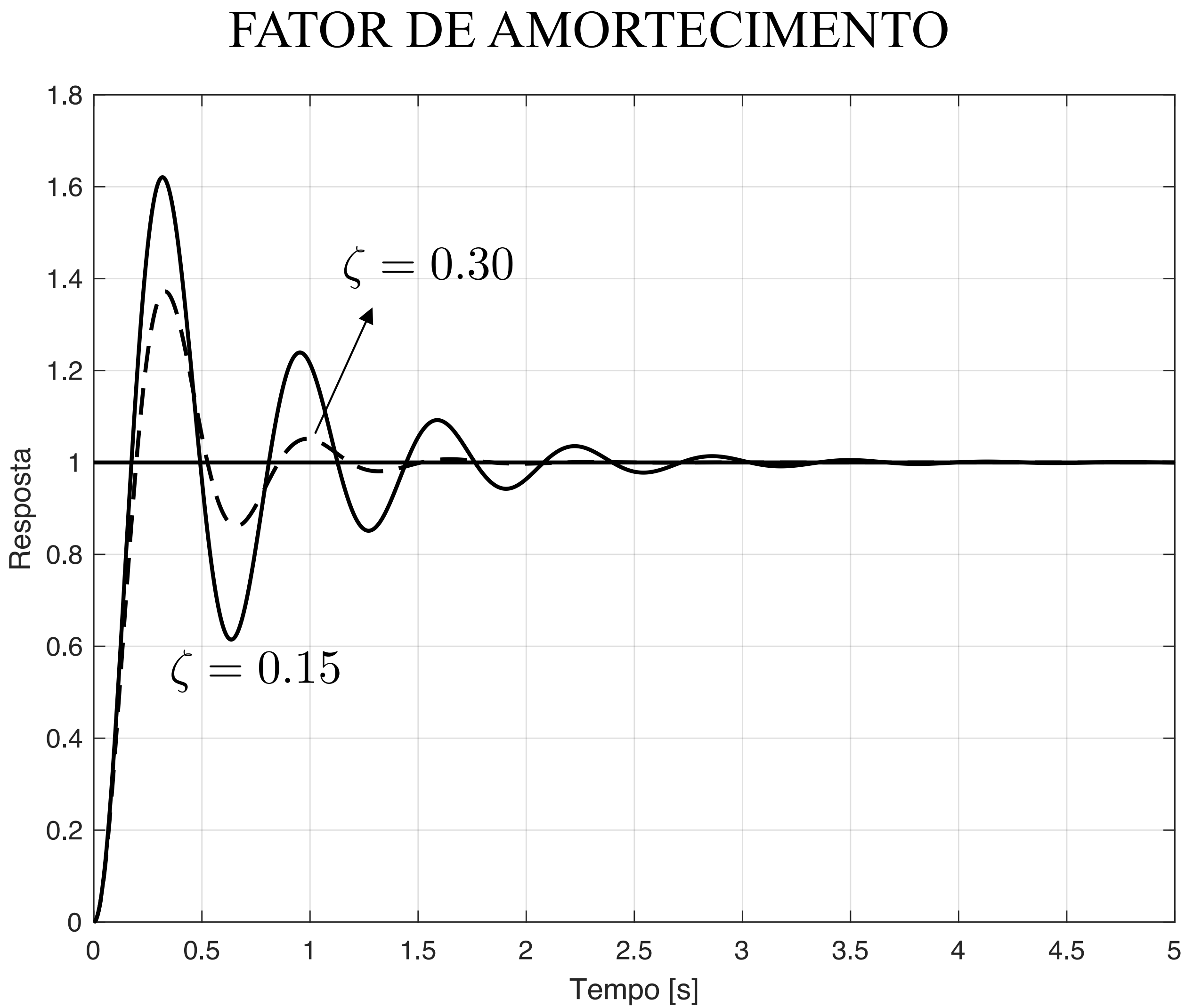
Análise dos Parâmetros na Resposta do Sistema

FREQUÊNCIA NATURAL NÃO AMORTECIDA



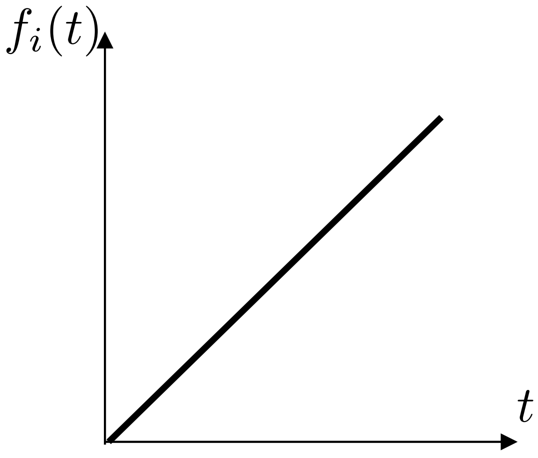
Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Análise dos Parâmetros na Resposta do Sistema



Resposta à Entrada Rampa

Modelo da entrada:



Rampa Unitária: $f_{ir} = 1$

$$f_i(t) = f_{ir}t \qquad F_i(s) = \frac{f_{ir}}{s^2}$$

$$M\ddot{u}_o + B\dot{u}_o + Ku_o = f_{ir}t$$

$$\frac{1}{\omega_n^2}\ddot{u}_o + \frac{2\zeta}{\omega_n}\dot{u}_o + u_o = \mathbb{K}f_{ir}t$$

Para a obtenção da solução faremos duas hipóteses simplificadoras

- Condições iniciais nulas ($u_o(0) = 0$ e $v_o(0) = 0$)
- O sistema é subamortecido: $\zeta < 1{,}0$

Logo, as raizes da equação característica são:

Frequência Natural amortecida !

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Cont. ...

Aplicando a T.L. e resolvendo para a variável de saída temos

$$U_o(s) = \frac{\mathbb{K} f_{ir}}{s^2(s - s_1)(s - s_2)}$$

e, usando as propriedades da transformada inversa de Laplace a resposta de regime permanente à entrada rampa é escrita como

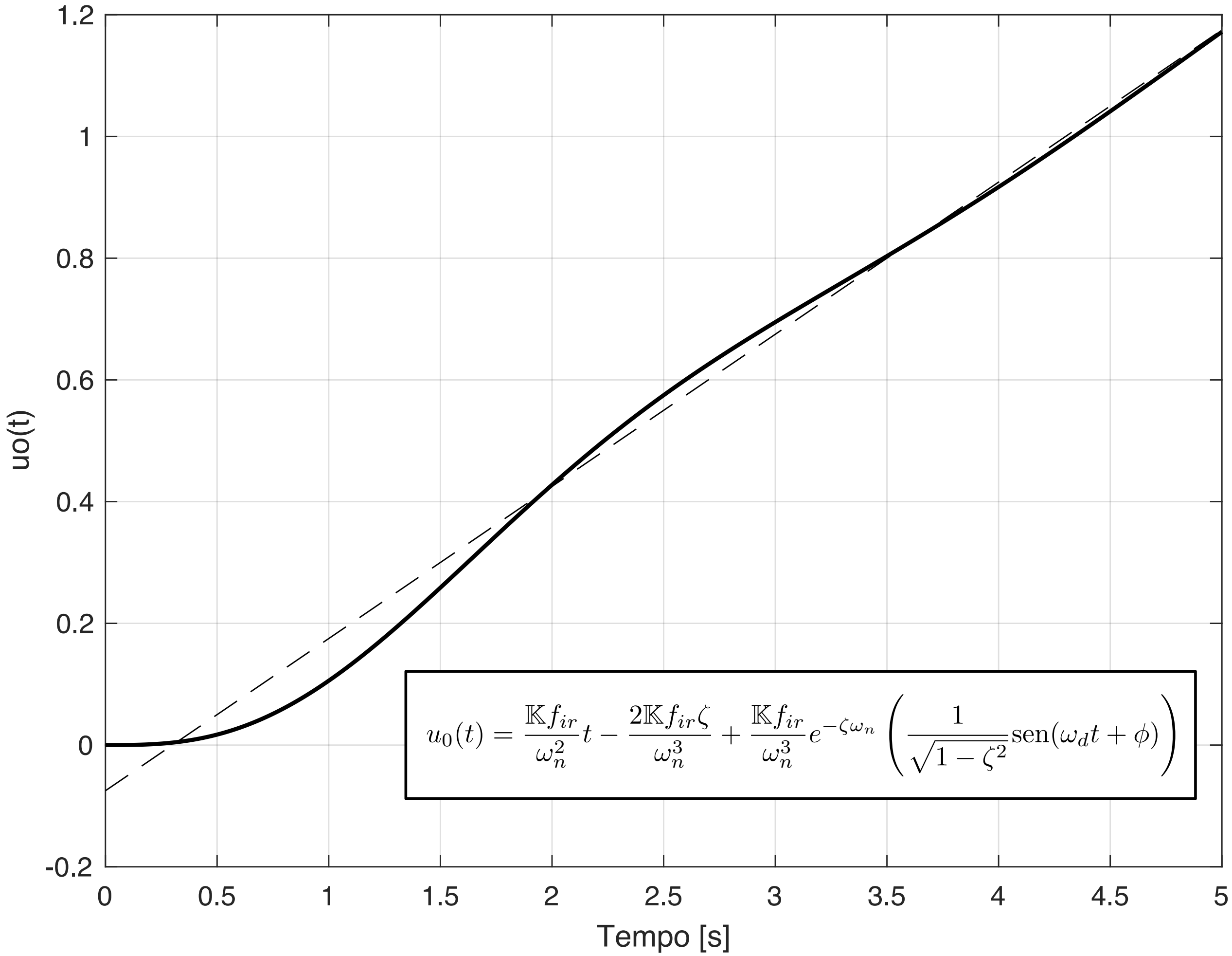
$$u_0(t) = \frac{\mathbb{K} f_{ir}}{\omega_n^2} t - \frac{2\mathbb{K} f_{ir}\zeta}{\omega_n^3} + \frac{\mathbb{K} f_{ir}}{\omega_n^3} e^{-\zeta\omega_n} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen}(\omega_d t + \phi) \right)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta^2 - 1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

$$\boxed{u_0(t) = \frac{t}{\omega_n^2} - \frac{2\zeta}{\omega_n^3} + \frac{1}{\omega_n^3} e^{-\zeta\omega_n} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen}(\omega_d t + \phi) \right)}$$

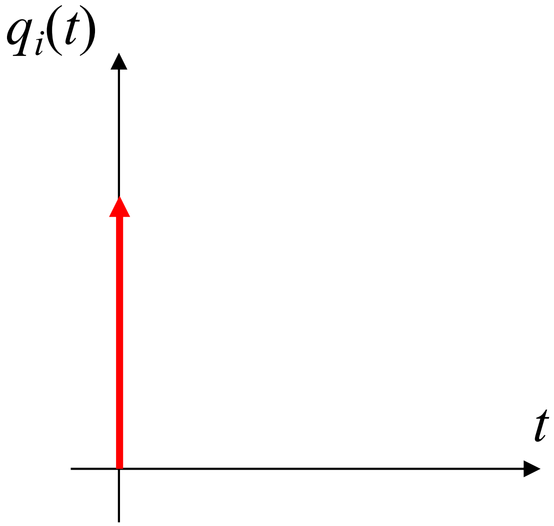
Cont. ...

Gráfico da resposta do sistema de 2ª ordem à rampa unitária



Resposta ao Impulso Unitário

Neste caso:



Impulso unitário: $A_i = 1$

$$q_i(t) = A_i \delta(t) \quad \Rightarrow \quad Q_i(s) = A_i$$

Equação de movimento:

$$\frac{1}{\omega_n^2}\ddot{u}_o + \frac{2\zeta}{\omega_n}\dot{u}_o + u_o = \mathbb{K} A_i \delta(t)$$

Para a obtenção da solução faremos duas hipóteses simplificadoras

- Condições iniciais nulas ($u_o(0) = 0$ e $v_o(0) = 0$)
- O sistema é subamortecido: $\zeta < 1{,}0$

Logo, as raizes da equação característica são:

Frequência Natural amortecida !

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Cont. ...

Solução da EDO no domínio de Laplace

$$U_o(s) = \frac{A_i \mathbb{K}}{(s-s_1)(s-s_2)} \quad \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} \quad \boxed{u_o(t) = \frac{\mathbb{K} A_i \omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t\right)}$$

Cabe aqui uma comparação com a resposta transiente ($f_i(t) = 0$) devida somente às condições iniciais

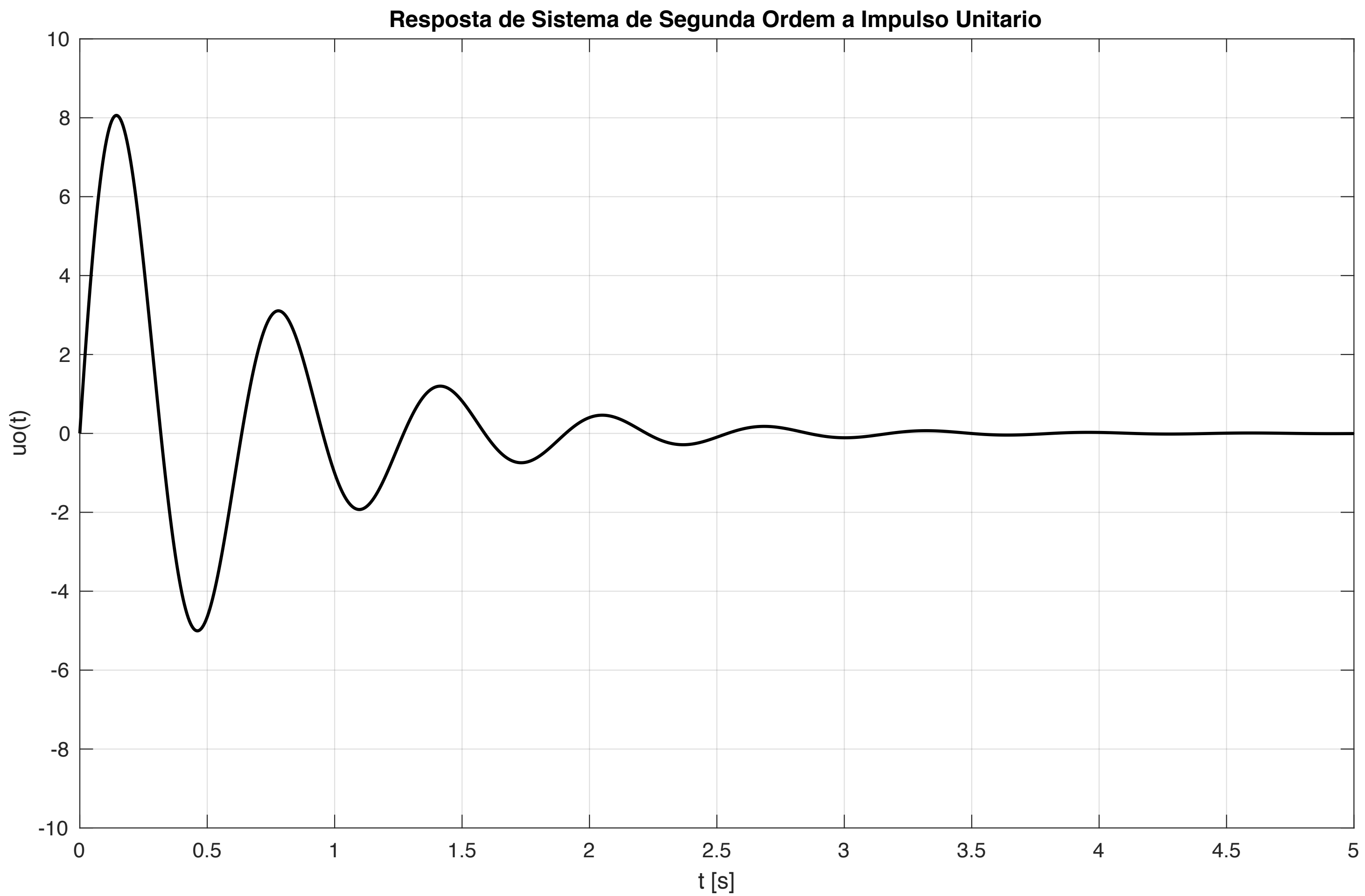
$$U_o(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega_n) u_o(0)}{(s-s_1)(s-s_2)} + \frac{\dot{u}_o(0)}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

Se tivermos $u_o(0) = 0$

$$U_o(s) = \frac{\dot{u}_o(0)}{(s-s_1)(s-s_2)} \quad \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} \quad \boxed{u_o(t) = \frac{\dot{u}_o(0)}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t\right)}$$

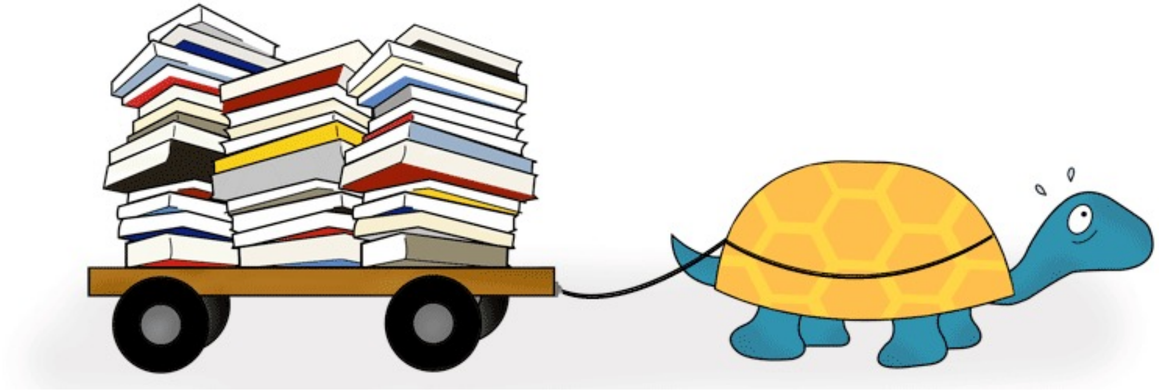
Cont. ...

Gráfico da resposta ao impulso unitário, ganho unitário



FIM

Bom Estudo !



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

SEM 0533 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos I
SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

Estudo da Resposta de Sistemas Dinâmicos
Resposta em Frequência de Sistemas Dinâmicos

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves

Objetivos

Objetivo da presente aula é apresentar e discutir o conceito de resposta em frequência de sistemas dinâmicos, com especial ênfase nos sistemas de primeira e segunda ordem.

Bibliografia:

1 Felício, L. C., Modelagem da Dinâmica de Sistemas e Estudo da Resposta, Rima, 2010
2 Doebelin, E. O., System Dynamics, Modeling, Analysis, Simulation, Design, M. Dekker, 1998

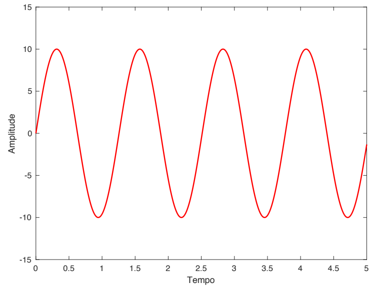
Considerações Preliminares

A resposta em frequência de um sistema dinâmico linear é uma grandeza de fundamental importância no estudo das propriedades do sistema. Para iniciarmos o estudo consideramos o cenário abaixo

Entrada $q_i(t)$ → SISTEMA H(s), h(t) → Saída $q_o(t)$

onde, para o presente estudo consideramos um tipo particular de entrada, a chamada entrada senoidal ou harmônica, ***considerando nulas as condições inicias do sistema***

$$q_i(t) = q_{ih}\text{sen}\omega t \quad \Rightarrow$$



onde q_{ih} é a amplitude da entrada e ω é a frequência da entrada senoidal

Cont. ...

Observação: a entrada harmônica pode ser escrita de, pelo menos duas outras formas a saber

$$q_i(t) = q_{ih}\cos\omega t$$

$$q_i(t) = q_{ih}e^{i\omega t}$$

sendo esta última denominada entrada harmônica exponencial complexa. Como o sistema é linear, *a saída obrigatoriamente apresentará a mesma variação temporal da entrada*, e mais importante, *na mesma frequência*. Logo podemos expressar a saída de forma geral como

$$q_o(t) = q_{oh}\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

onde q_{oh} representa a ***amplitude*** da saída e ϕ um ***ângulo de fase***. Passaremos agora a estudar estas grandezas individualmente para os sistemas de primeira e segunda ordem.

Resposta de um sistema de primeira ordem à entrada senoidal

Neste caso, lembremos a forma geral de um sistema de primeira ordem:

$$\tau \frac{dq_o}{dt} + q_o = \mathbb{K} q_i$$

Para uma entrada senoidal podemos escrever

$$\mathcal{L}\left\{\text{sen}(\omega t)\right\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\tau \frac{dq_o}{dt} + q_o = \mathbb{K} q_{ih} \text{sen}(\omega t)$$

Usando a T.L. considerando nulas as condições iniciais temos para a solução de regime permanente na variável de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}\right\} = \frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$$

$$Q_o(s) = \mathbb{K} q_{ih} \frac{\omega}{\left(s^2 + \omega^2\right)(\tau s + 1)}$$

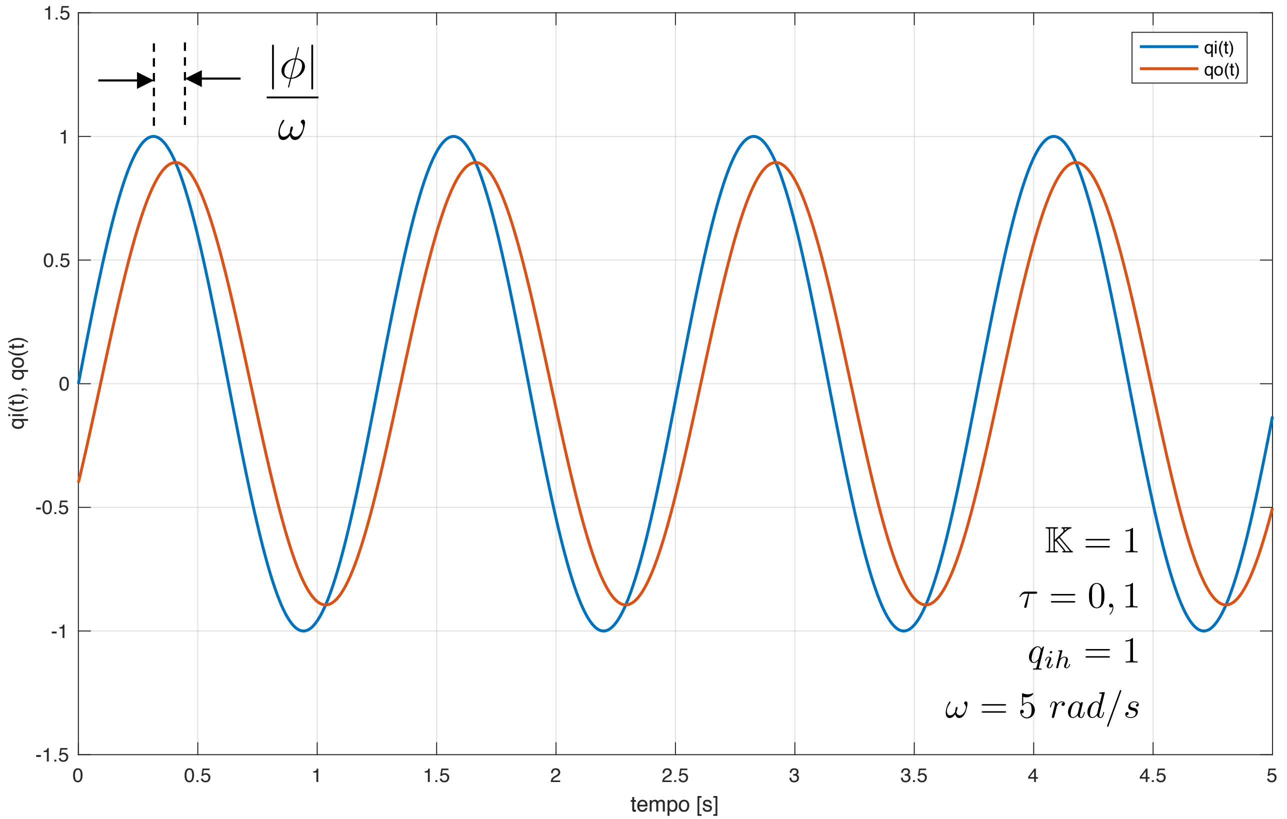
e a solução no domínio do tempo é obtida através da transformada inversa de Laplace

Cont. ...

E, então, a resposta de regime permanente, comumente denominada de resposta senoidal ou harmônica é dada por

$$q_o(t) = \frac{\mathbb{K} q_{ih}}{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}} \text{sen}\,(\omega t + \phi) \qquad \phi = -\tan^{-1}(\tau\omega)$$

Exemplo:



Cont. ...

Vamos fazer uma análise mais detalhada da resposta do sistema. Para isto, vamos apresentar o conceito de Função Transferência Senoidal (F.T.S.) a partir da F.T. padrão do sistema

$$H(s) = \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{\mathbb{K}}{\tau s + 1}$$

Para obtermos a F.T.S. fazemos $s = i\omega$ onde $i = (-1)^{1/2}$ e ω a frequência da entrada senoidal. Então

$$H(i\omega) = \frac{Q_o(i\omega)}{Q_i(i\omega)} = \frac{\mathbb{K}}{\tau(i\omega) + 1}$$

Ou de forma simplificada

$$\boxed{H(\omega) = \frac{Q_o(\omega)}{Q_i(\omega)} = \frac{\mathbb{K}}{i(\tau\omega) + 1}}$$

Esta expressão representa a F.T. do sistema escrita para uma entrada harmônica senoidal sendo então denominada de ***Função Transferência Senoidal.*** Importante: $H(\omega)$ é um número complexo

Cont. ...

Logo, como H(ω) é complexo e dependente de ω temos

$$H(\omega) = \frac{Q_o(\omega)}{Q_i(\omega)} = \frac{\mathbb{K}}{i(\tau\omega)+1} \quad \begin{cases} |H(\omega)| = \dfrac{\mathbb{K}}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}} \\ \\ \phi(\omega) = -\tan^{-1}(\tau\omega) \end{cases}$$

RELAÇÃO DE AMPLITUDES

ÂNGULO DE FASE

FUNÇÕES DE ω

e, se compararmos as expressões acima com as anteriores

$$q_o(t) = \frac{\mathbb{K}q_{ih}}{\sqrt{\omega^2\tau^2+1}}\text{sen}\,(\omega t+\phi)$$

$$\phi = -\tan^{-1}(\tau\omega)$$

Logo

$$\boxed{q_o(t) = |H(\omega)|q_{ih}\text{sen}(\omega t+\phi)}$$

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Cont. ...

De maneira ainda mais ampla, vamos resolver novamente a EDO do sistema agora adotando outra forma para a entrada harmônica

$$\tau \frac{dq_o}{dt} + q_o = \mathbb{K} q_{ih} e^{i\omega t}$$

Como o sistema é linear, ao invés de usarmos Laplace, assumimos a solução como

$$q_o(t) = q_{oh} e^{i\omega t}$$

que, quando substituída na primeira fornece o seguinte valor para a amplitude q_{oh}

$$q_{oh} = \frac{\mathbb{K} q_{ih}}{i\tau\omega + 1}$$

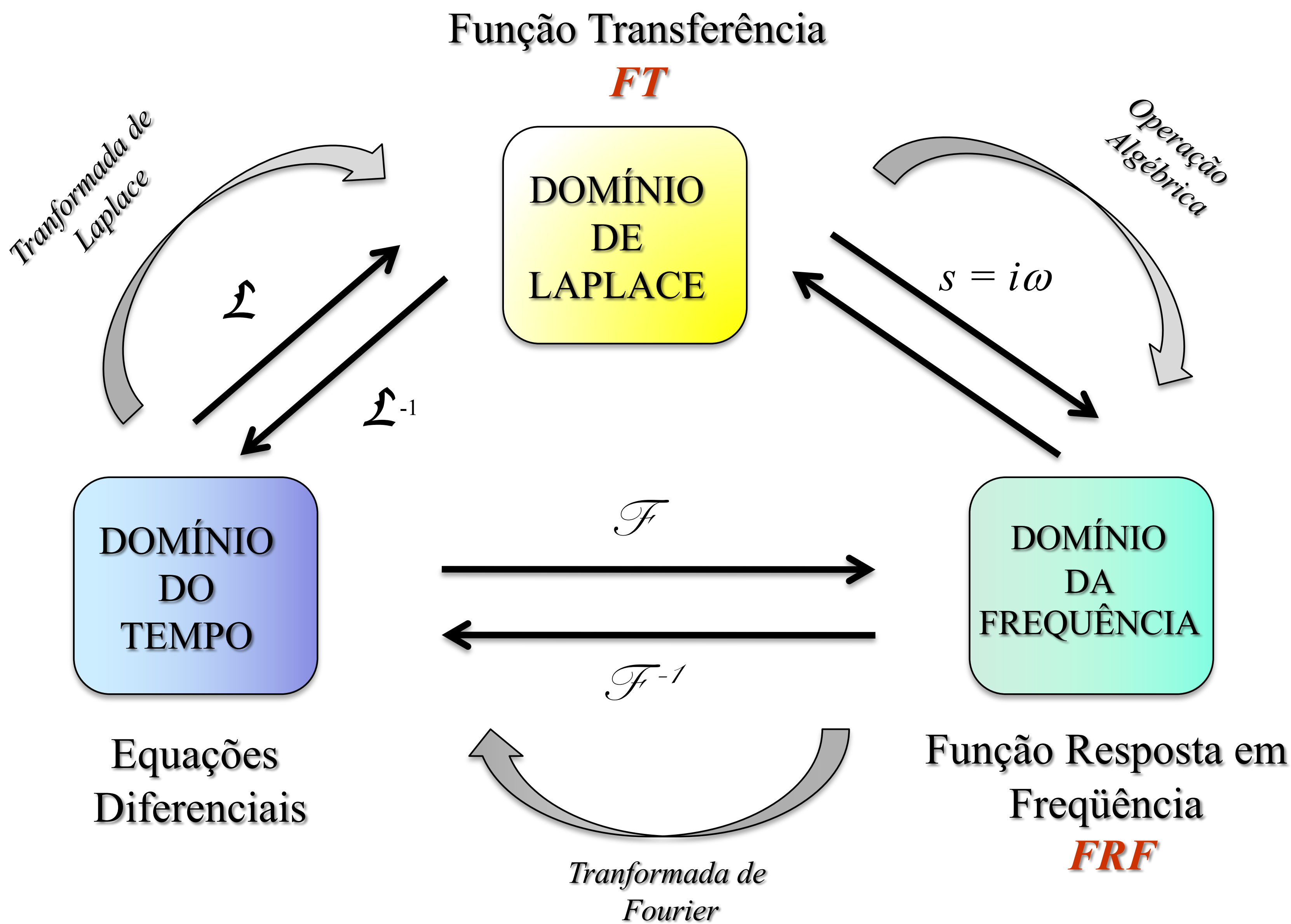
e, desta última chegamos à relação de amplitudes que é a própria F.T.S.

$$\boxed{H(\omega) = \frac{q_{oh}}{q_{ih}} = \frac{\mathbb{K}}{i\tau\omega + 1}}$$

$$|H(\omega)| = \frac{\mathbb{K}}{\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}}$$

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}(\tau\omega)$$

Interação entre Domínios



Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Cont. ...

Portanto para a determinação de H(ω) para um dado sistema dinâmico, temos pelo menos três maneiras:

1. Resolver a EDO do sistema para $q_i(t) = q_{ih}$ sen(ωt) e dela extrair |H(ω)| e φ(ω)
2. Resolver a EDO do sistema para $q_i(t) = q_{ih}e^{i\omega t}$ e dela extrair H(ω)
3. A partir da F.T. do sistema para $q_i(t)$ e $q_o(t)$ fazer s = iω e em seguida obter H(ω) e |H(ω)| e φ(ω)

Sumarizando: A função de resposta em frequência de um sistema dinâmico é dada pela relação de amplitudes |H(ω)| e pelo ângulo de fase φ(ω) da F.T.S. correspondente.

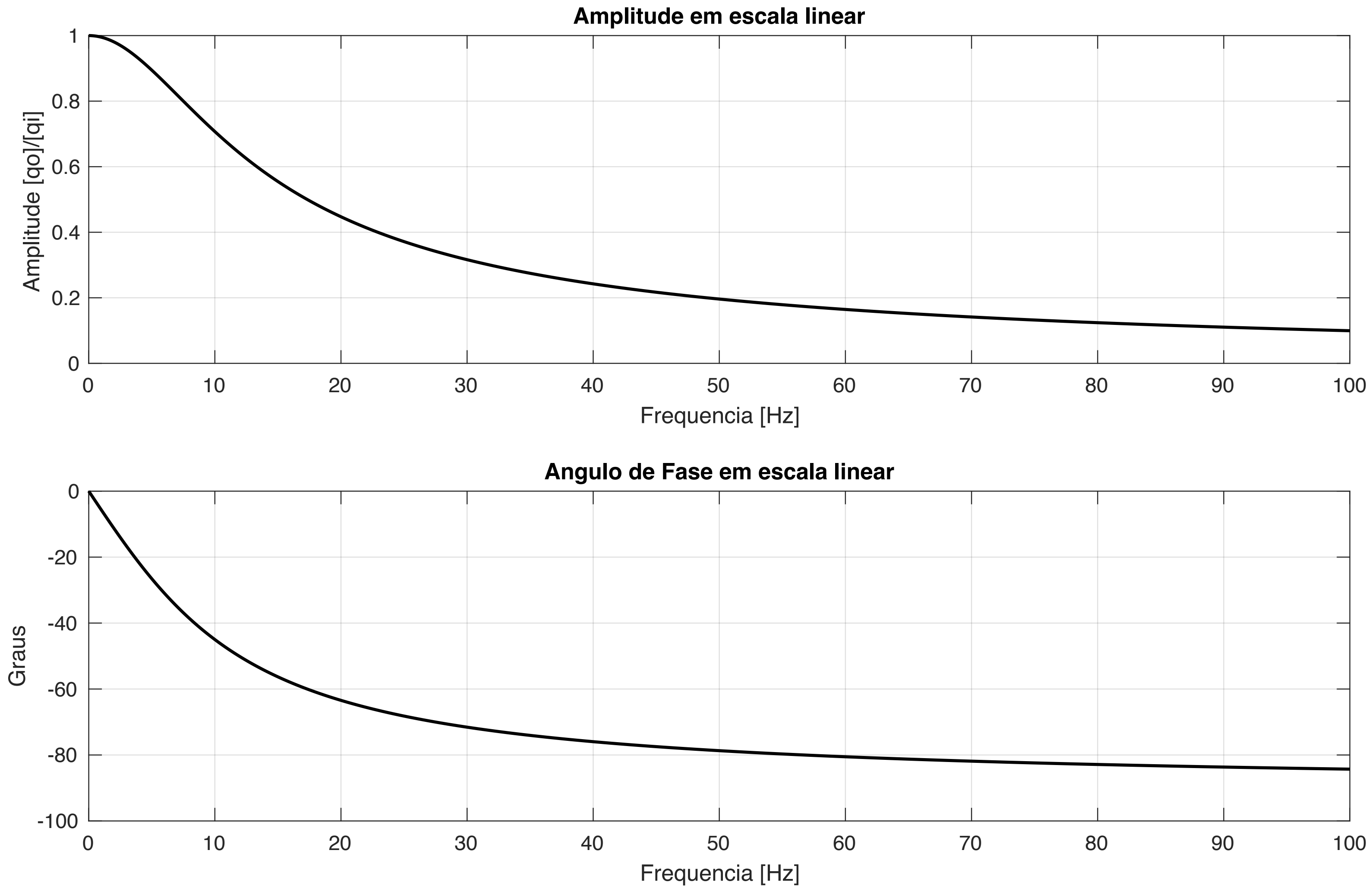
VAMOS INSPECIONAR AGORA |H(ω)| E φ(ω) GRÁFICAMENTE, EM FUNÇÃO DE ω VARIÁVEL

$$|H(\omega)| = \frac{\mathbb{K}}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}$$

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}(\tau\omega)$$

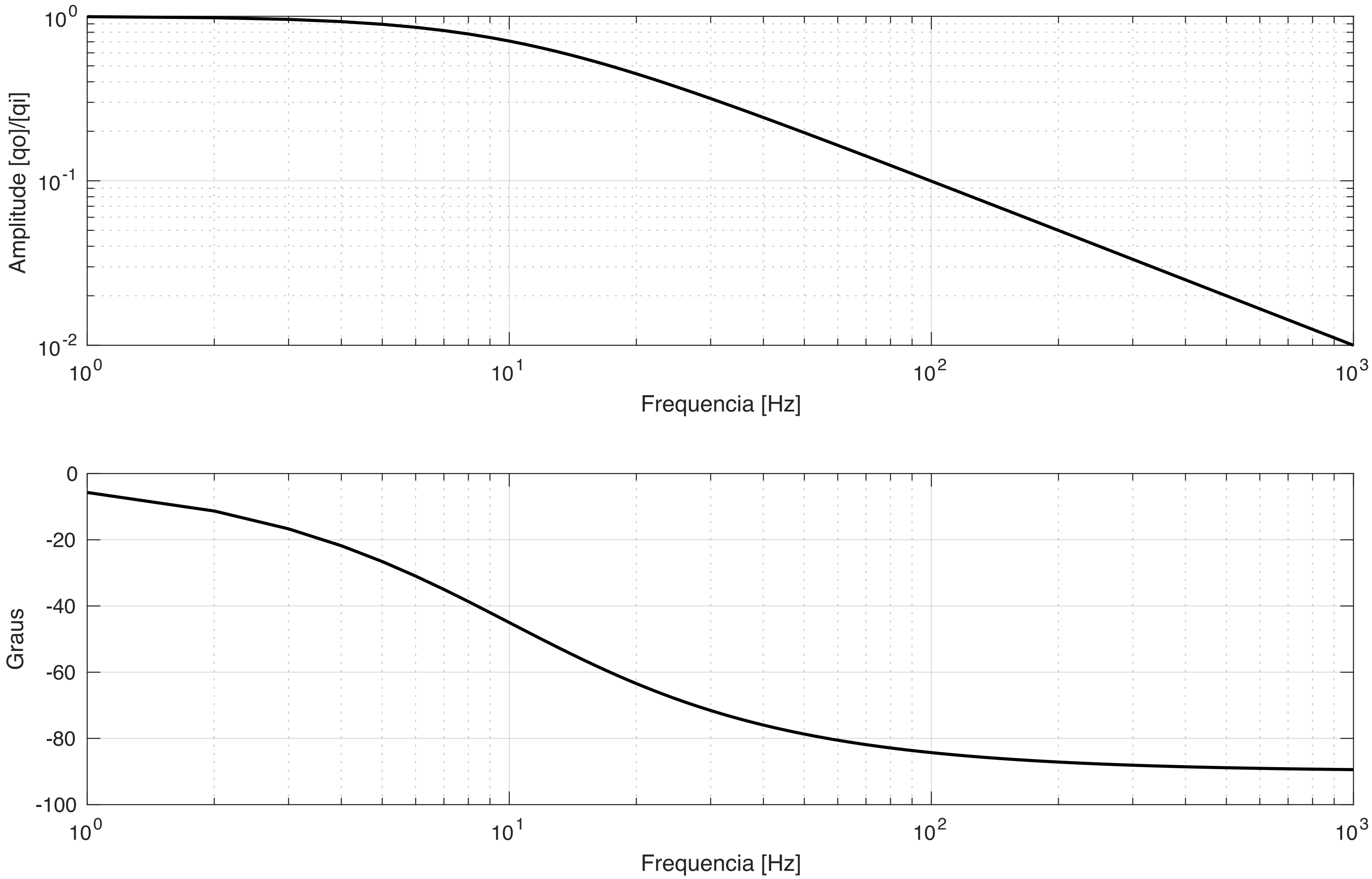
Gráficos da Resposta em Frequência Sistema de Primeira Odem

DIAGRAMA DE BODE



Gráficos da Resposta em Frequência Sistema de Primeira Odem

DIAGRAMA DE BODE



Conceitos Adicionais

Em dinâmica de sistemas é muito comum o uso das escalas logarítmicas bem como da unidade decibel (dB) para a relação de amplitudes. Por definição

$$\text{Valor Decibel de } N = dB = 20\ \log_{10} N$$

E, para a *relação de amplitudes* da resposta em frequência temos

$$\boxed{H(\omega)_{dB} = 20\ \log_{10} \frac{1}{\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}} = -20\ \log_{10} \sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}}$$

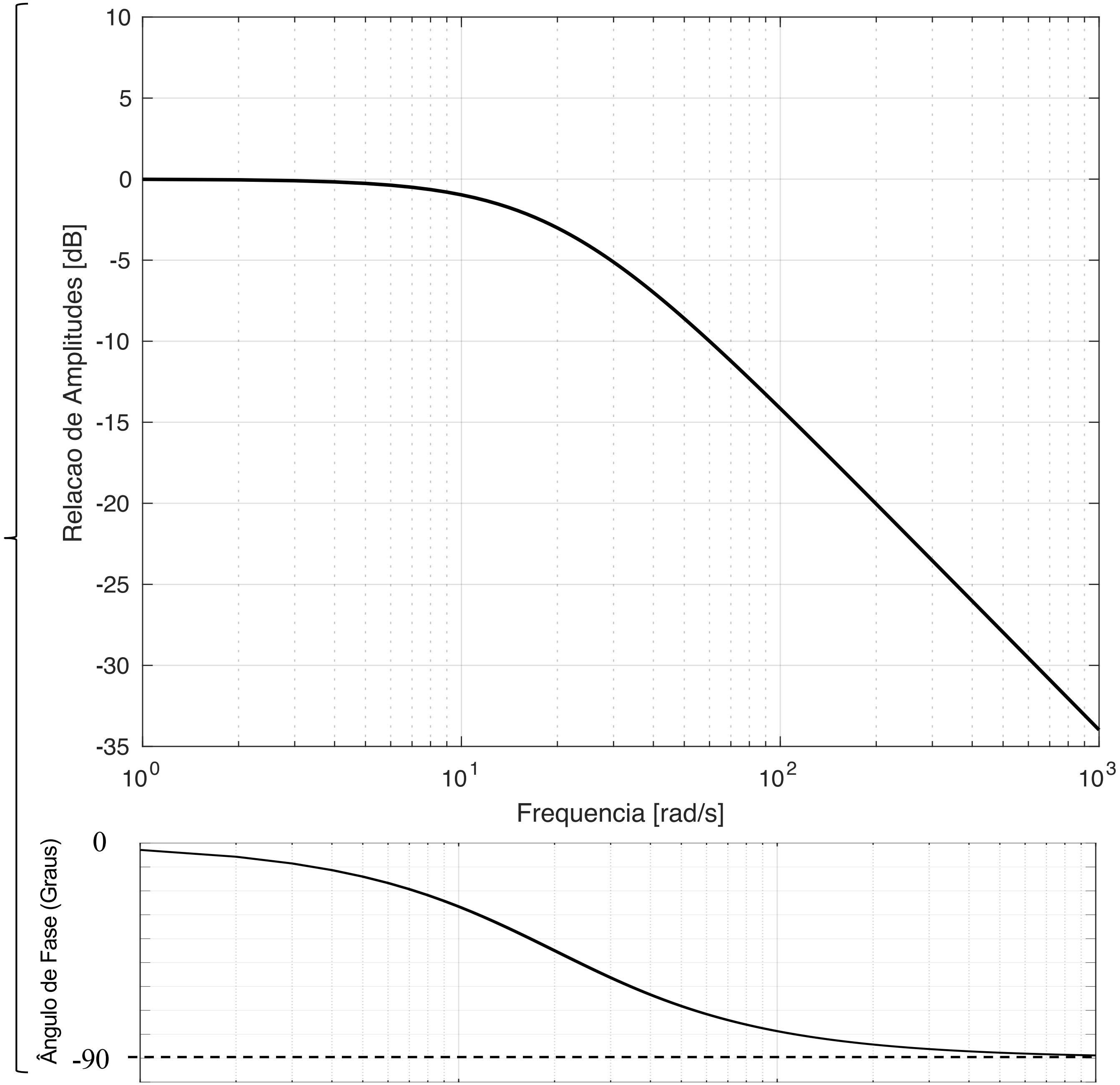
Dois conceitos adicionais (em relação ao eixo ω) :

- ***Década*** : Corresponde à uma mudança com um fator de 10 vezes
- ***Oitava***: Corresponde à uma mudança com fator de 2 vezes

Ex.: 1000 rad/s é uma década acima de 100 rad/s
1000 rad/s é uma oitava acima de 500 rad/s

Gráfico em dB

DIAGRAMA DE BODE



Análise de Assíntotas

Retomando a relação de amplitudes em dB

$$H(\omega)_{dB} = 20\ \log_{10}\frac{1}{\sqrt{(\tau\omega)^2+1}} = -20\ \log_{10}\sqrt{(\tau\omega)^2+1}$$

Vamos considerar dois casos limites

- Frequências muito baixas tal que $(\tau\omega)^2 << 1{,}0$

$$H(\omega)_{dB} \cong -20\log_{10}1 = 0$$

- Frequências muito altas tal que $(\tau\omega)^2 >> 1{,}0$

$$H(\omega)_{dB} \cong -20\log_{10}(\tau\omega) = -20\log_{10}\tau - 20\log_{10}\omega$$

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Análise de Assíntotas

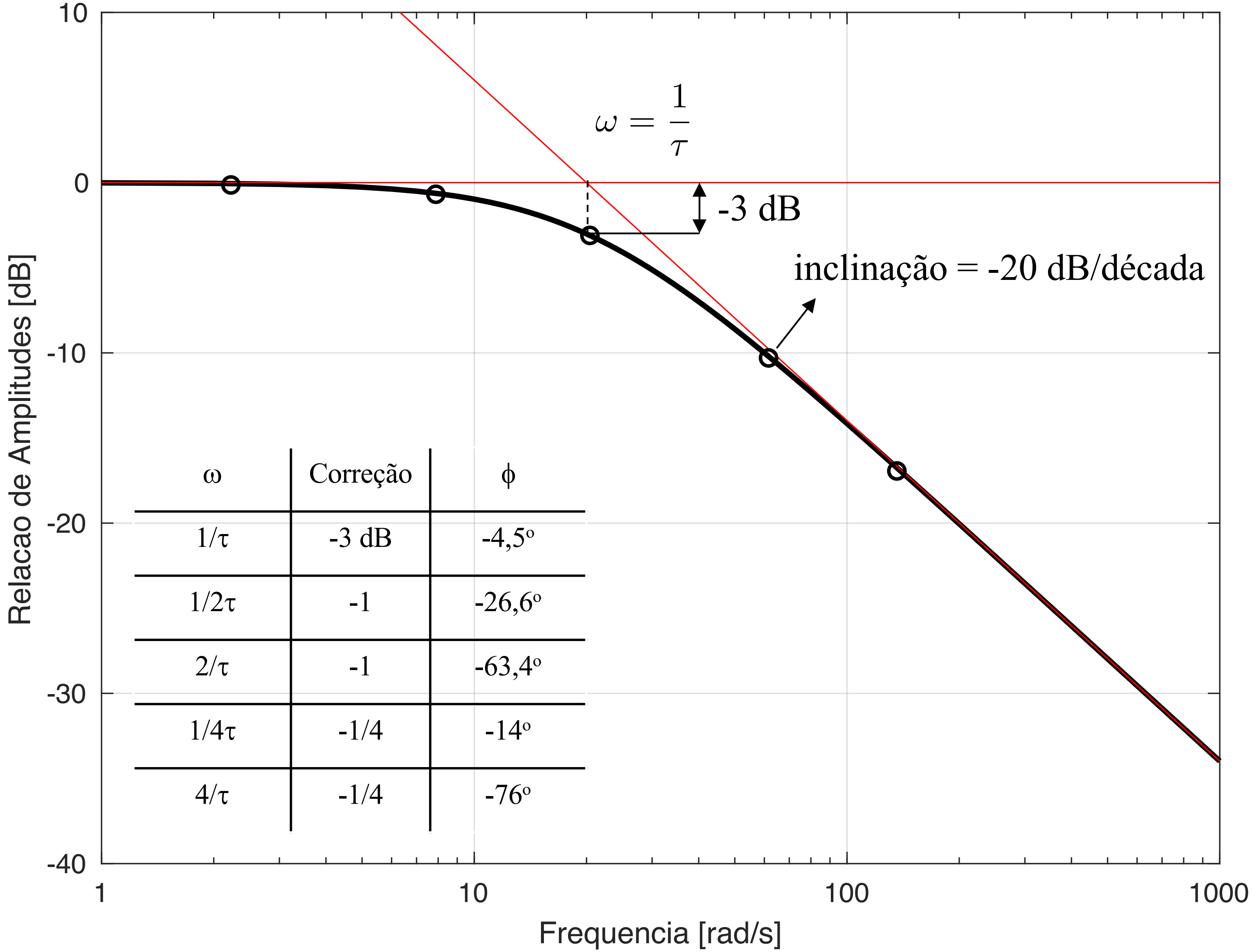
Essas assíntotas se cruzam na chamada *breakpoint frequency*

$$\omega = \frac{1}{\mathcal{T}}$$

Importante: Quando o ganho de regime permamente K for diferente de 1,0 a assíntota de baixa frequência continua horizontal cruzando o eixo vertical no valor 20 $\log_{10}$ K dB ao invés de 0 dB

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves

Análise de Assíntotas

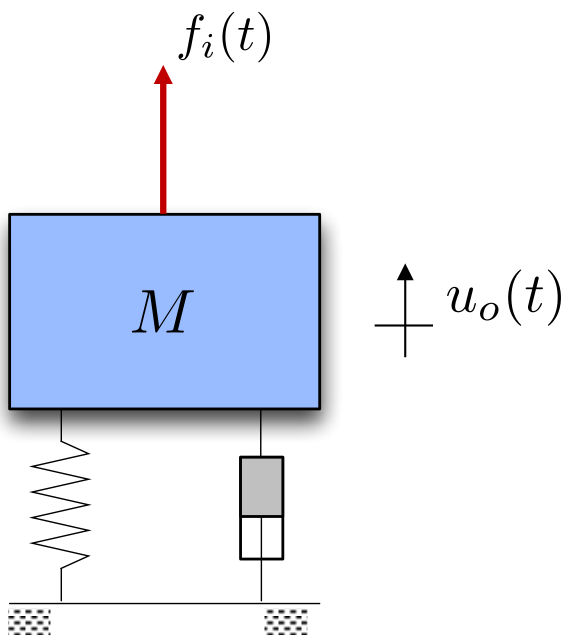


ω	Correção	ϕ
1/τ	-3 dB	-4,5º
1/2τ	-1	-26,6º
2/τ	-1	-63,4º
1/4τ	-1/4	-14º
4/τ	-1/4	-76º

Resposta de um sistema de segunda ordem à entrada senoidal

Seguindo procedimento análogo, nos interessa agora investigar as características da resposta à uma entrada senoidal e consequentemente a resposta em frequência de um sistema de segunda ordem.

Como motivação, usaremos o sistema massa-mola-amortecedor para o caso sub amortecido ($0 < \zeta < 1$). Logo



$$\frac{1}{\omega_n^2}\ddot{u}_o + \frac{2\zeta}{\omega_n}\dot{u}_o + u_o = \mathbb{K} f_i(t)$$

Cont. ...

Podemos obter a resposta de regime permanente à entrada harmônica de três formas:

$$\frac{1}{\omega_n^2}\ddot{u}_o + \frac{2\zeta}{\omega_n}\dot{u}_o + u_o = \mathbb{K} f_{ih} \mathrm{sen}(\omega t)$$

ou

$$\frac{1}{\omega_n^2}\ddot{u}_o + \frac{2\zeta}{\omega_n}\dot{u}_o + u_o = \mathbb{K} f_{ih} e^{i\omega t}$$

ou ainda através da F.T. relacionando as variáveis de entrada e saída do modelo

$$H(s) = \frac{U_o(s)}{F_i(s)} = \frac{\mathbb{K}}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} \qquad s = i\omega \qquad H(\omega) = \frac{\mathbb{K}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i\ 2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}$$

Cont. ...

Seguindo a primeira opção, inicialmente aplicamos a T.L. à equação considerando CIs nulas. E a solução algébrica da EDO é dada por

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$U_o(s) = \frac{\mathbb{K} f_{ih}\omega}{(s^2+\omega^2)(s-s_1)(s-s_2)}$$

Tomando a Transformada Inversa de Laplace desta última temos

$$u_o(t) = \frac{\mathbb{K}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \frac{4\zeta^2\omega^2}{\omega_n^2}}} f_{ih}\mathrm{sen}(\omega t+\phi)$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{2\zeta}{\frac{\omega}{\omega_n}-\frac{\omega_n}{\omega}}$$

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Cont. ...

Se seguirmos a segunda opção, escrevemos a resposta de regime permanente como

$$u_o(t) = U_{ih}e^{i\omega t}$$

E, ao subsituirmos na equação do modelo obtemos a expressão para U_{ih}

$$U_{ih} = \frac{\mathbb{K} f_{ih}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i\ 2\frac{\omega}{\omega_n}}$$

E a resposta fica

$$\boxed{u_o(t) = \frac{\mathbb{K}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i\ 2\frac{\omega}{\omega_n}} f_{ih}e^{i\omega t}}$$

Cont. ...

Fazendo agora uma análise conjunta das três soluções

$$u_o(t) = \boxed{\frac{\mathbb{K}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \frac{4\zeta^2\omega^2}{\omega_n^2}}}} f_{ih}\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{2\zeta}{\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega}}$$

$$u_o(t) = \boxed{\frac{\mathbb{K}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i\;2\frac{\omega}{\omega_n}}} f_{ih} e^{i\omega t}$$

$$H(s) = \frac{U_o(s)}{F_i(s)} = \frac{\mathbb{K}}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} \quad \xrightarrow{s = i\omega} \quad H(\omega) = \boxed{\frac{\mathbb{K}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i\;2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}}$$

$$\boxed{|H(\omega)| = \frac{\mathbb{K}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \frac{4\zeta^2\omega^2}{\omega_n^2}}} \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{2\zeta}{\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega}}}$$

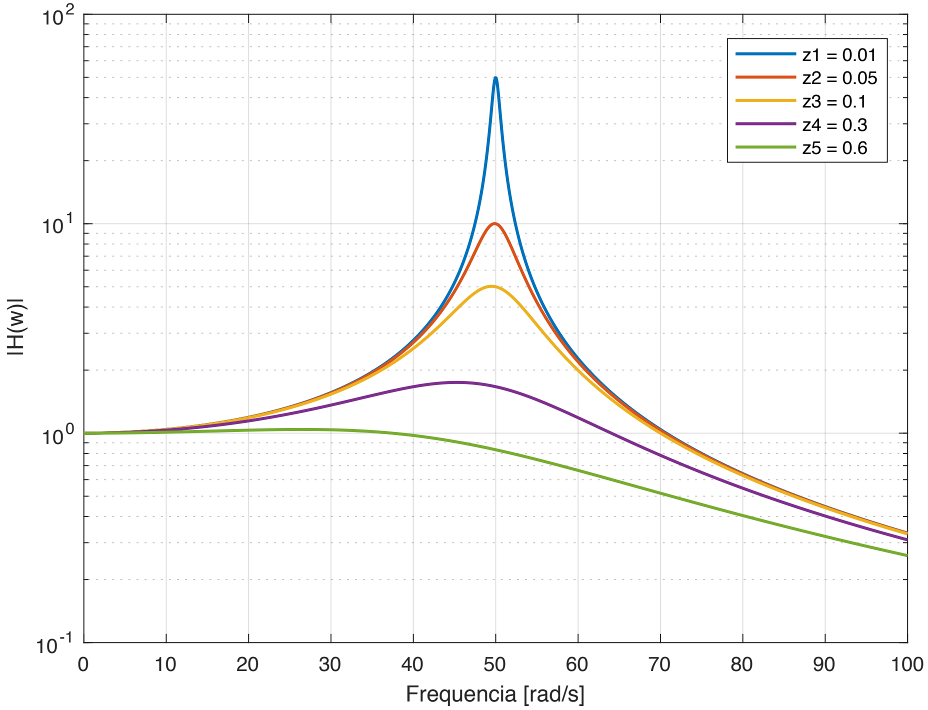
Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

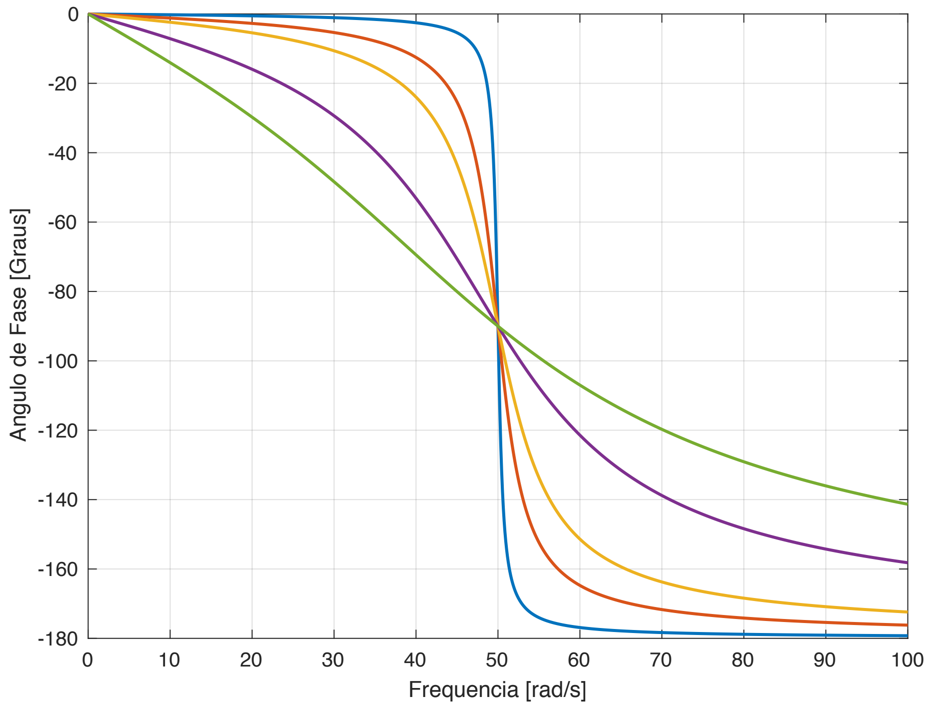
Cont. ...

Portanto, para um sistema massa-mola-amortecedor viscoso, sub-amortecido e com entrada força harmônica, a F.T.S. é um número complexo e dependente da frequência da força de entrada, dado por

$$
H(\omega) = \frac{\mathbb{K}\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\ 2\zeta\omega_n\omega}
\begin{cases}
|H(\omega)| = \dfrac{\mathbb{K}\omega_n^2}{\sqrt{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} \\[3em]
\phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)
\end{cases}
$$

Cont. ...



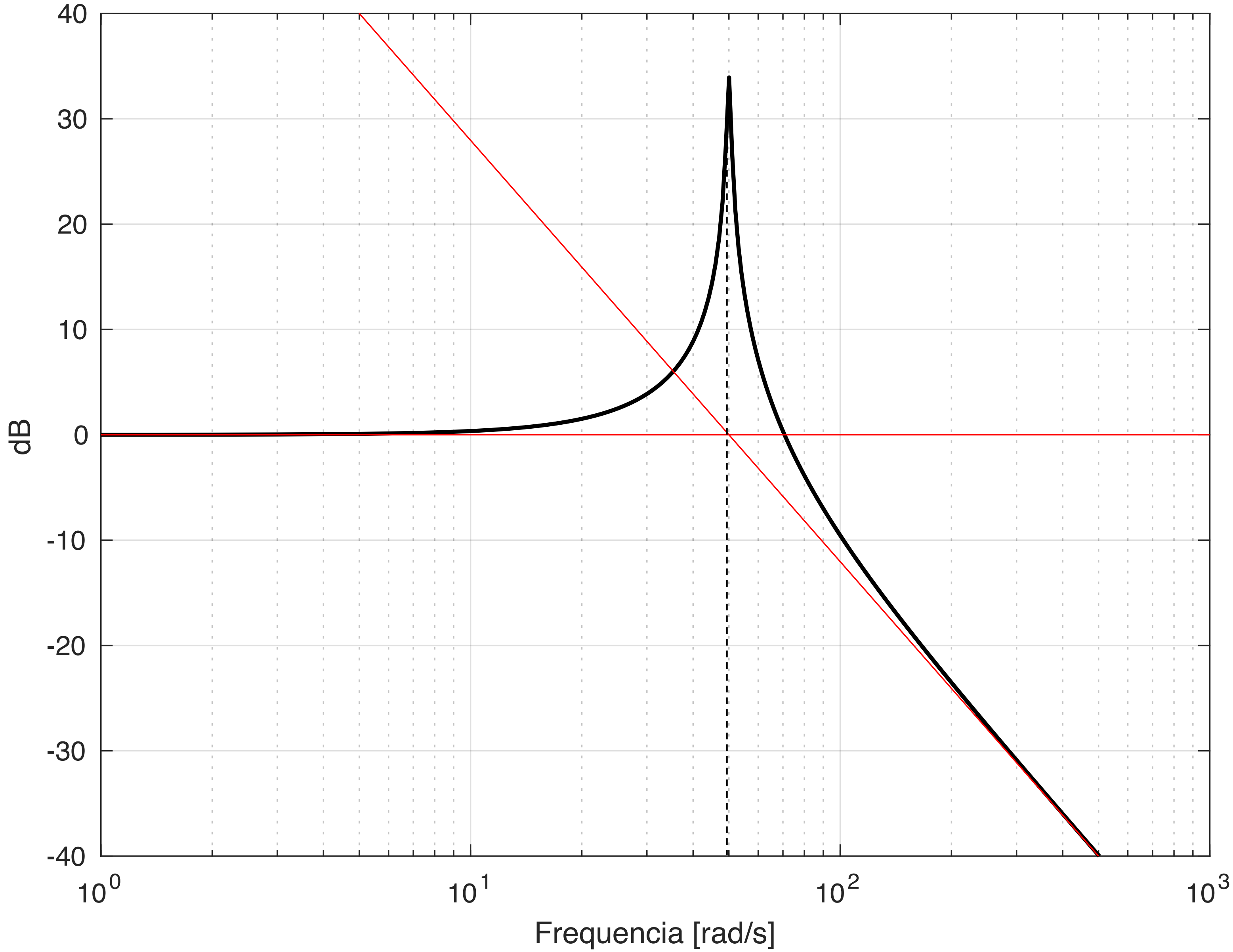


Assíntotas

$$|H(\omega)|_{dB} = \begin{cases} 0 \text{ dB} & \omega << \omega_n \\ -20\log_{10}\omega^2 & \omega >> \omega_n \end{cases}$$

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

COMPORTAMENTO DAS ASSÍNTOTAS



Considerações Adicionais

Vimos que a F.T. de um sistema dinâmico linear pode ser escrita como o quociente entre dois polinômios em s

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k\frac{s^p + B_{p-1}s^{p-1} + \cdots + B_1 s + B_0}{s^n + A_{n-1}s^{n-1} + \cdots + A_1 s + A_0}$$

onde k é uma constante e p e n é a ordem dos polinômios do numerador e denominador, respectivamente, sendo que em geral p<n. A expressão acima pode ser escrita como

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_p)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

- *$z_1, z_2, \ldots, z_p$* são os ***zeros*** da F.T. (raizes do polinômio do numerador)
- *$p_1, p_2, \ldots, p_n$* são os ***pólos*** da F.T. (raizes do polinômio do denominador)

Zeros e pólos podem ser positivos, negativos ou complexos !

Cont. ...

Na maioria dos casos trabalharemos com frações próprias (n>p), e nestes casos assumindo (pelo menos por enquanto) que não existam pólos repetidos, a F.T. é escrita como

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_1}{(s-p_1)} + \frac{K_2}{(s-p_2)} + \cdots + \frac{K_k}{(s-p_k)} + \cdots + \frac{K_n}{(s-p_n)}$$

Esta forma é conhecida como expansão em frações parciais. E vale também quando os pólos do sistema são complexos. Como exemplo tomemos um sistema de 2ª ordem

$$H(s) = \frac{\mathbb{K}\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

E, vamos assumir o caso sub-amortecido ($\zeta < 1$). Logo os pólos do sistema são

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_d \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Cont. ...

E agora escrevemos a F.T. como

$$H(s) = \frac{\mathbb{K}\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\mathbb{K}\omega_n^2}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{k_1}{s - s_1} + \frac{k_2}{s - s_2}$$

Juntando as frações parciais novamente temos

$$H(s) = \frac{\mathbb{K}\omega_n^2}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{k_1}{s - s_1} + \frac{k_2}{s - s_2} = \frac{(k_1 + k_2)s - k_1 s_2 - k_2 s_1}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

Igualando os coeficientes dos polinômios do numerador aos da fração original

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ -k_1 s_2 - k_2 s_1 = \mathbb{K}\omega_n^2 \end{cases} \Rightarrow \quad k_1 = \frac{\mathbb{K}\omega_n^2}{i\ 2\omega_d} \qquad k_2 = -\frac{\mathbb{K}\omega_n^2}{i\ 2\omega_d}$$

Identificação de Características a partir de Dados Experimentais

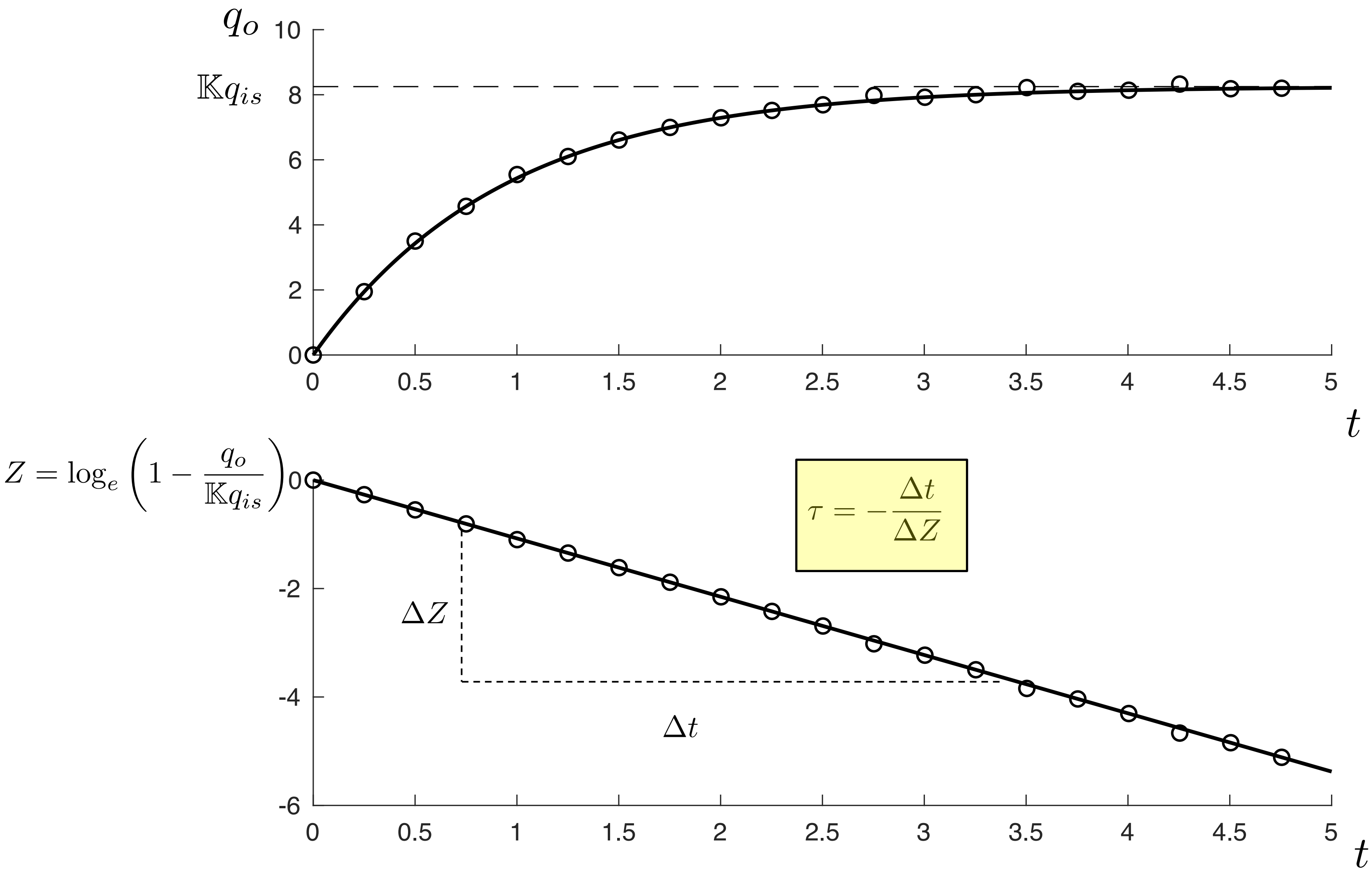
Inicialmente para um sistema de primeira ordem, recordemos que sua resposta de regime permanente à uma entrada degrau é dada por

$$q_o(t) = \mathbb{K} q_{is} \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)$$

Agora vamos assumir que para um sistema de primeira ordem é realizado um experimento onde uma entrada degrau de amplitude q_{is} conhecida é aplicada ao sistema. O objetivo é obtermos os valores de K e τ a partir deste dados. Criemos então uma nova função a partir da expressão acima escrevendo

$$Z = \log_e \left(1 - \frac{q_o}{\mathbb{K} q_{is}}\right) = \log_e \left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = -\frac{t}{\tau}$$

Cont. ...



q_o
$\mathbb{K}q_{is}$
10
8
6
4
2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
t
$Z = \log_e\left(1 - \frac{q_o}{\mathbb{K}q_{is}}\right)$
$\tau = -\frac{\Delta t}{\Delta Z}$
ΔZ
Δt
-2
-4
-6

Cont. ...

Agora vamos analisar um sistema de 2ª ordem

$$H(s) = \frac{\mathbb{K}\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$k_1 = \frac{\mathbb{K}\omega_n^2}{i\ 2\omega_d}$$

$$k_2 = -\frac{\mathbb{K}\omega_n^2}{i\ 2\omega_d}$$

E como vimos

$$H(s) = \frac{\mathbb{K}\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\mathbb{K}\omega_n^2}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{k_1}{s - s_1} + \frac{k_2}{s - s_2}$$

E tomando a transformada inversa de Laplace de H(s) temos

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{s - s_1} + \frac{k_2}{s - s_2}\right\} = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Cont. ...

Simplificando esta última expressão (usando as Relações de Euler) temos

$$h(t) = \frac{\mathbb{K}\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_d t)$$

Recordando o resultado para a resposta ao impulso de área A_i

$$u_o(t) = \frac{\mathbb{K}A_i\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t\right)$$

Se assumirmos $A_i = 1$ (impulso unitário) as expressões são idênticas e chegamos a uma conclusão muito importante

A resposta ao impulso unitário de um sistema de segunda ordem é igual a transformada inversa de Laplace de sua F.T.

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Cont. ...

Algébricamente

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

Prosseguindo com a análise, recordemos agora a resposta transiente do 2ª ordem quando $u_o(0) = 0$ $du_0/dt\ (t = 0) = v_0$

$$u_o(t) = \frac{v_0}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\mathrm{sen}(\omega_d t)$$

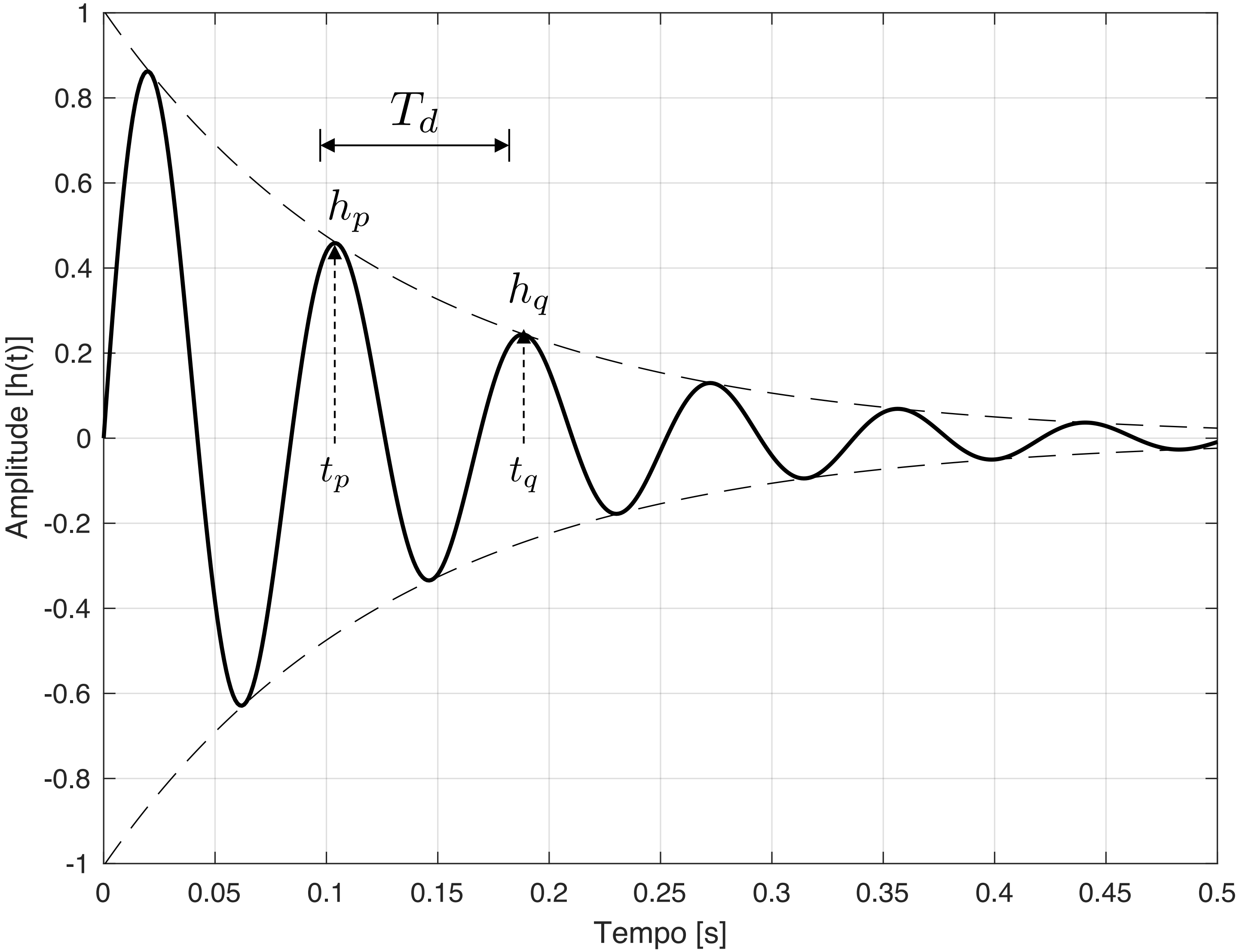
e comparando com h(t)

$$h(t) = \frac{\mathbb{K}\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\mathrm{sen}(\omega_d t)$$

A resposta ao impulso unitário que é a transformada inversa de Laplace da F.T. também corresponde à resposta transiente com $u_o(0) = 0$ e $v_0 = K\ \omega_n^2$

Cont. ...

Suponha que o gráfico abaixo seja a resposta experimental ao impulso



Cont. ...

Escrevemos a resposta ao impulso para estes dois instantes

$$h(t) = \frac{\mathbb{K}\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}(\omega_d t) = \begin{cases} \frac{\mathbb{K}\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_p}\operatorname{sen}(\omega_d t_p) & t = t_p \\ \\ \frac{\mathbb{K}\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_q}\operatorname{sen}(\omega_d t_q) & t = t_q \end{cases}$$

E agora tomamos a razão entre elas

$$\frac{h_p}{h_q} = \frac{\frac{\mathbb{K}\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_p}\operatorname{sen}(\omega_d t_p)}{\frac{\mathbb{K}\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_q}\operatorname{sen}(\omega_d t_q)} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{e^{-\zeta\omega_n t_q}} = e^{\zeta\omega_n T_d}$$

Cont. ...

em seguida definimos a grandeza δ, denominada ***decremento logarítmico***

$$\delta = \log_e \left(\frac{h_p}{h_q} \right) = \log_e \left(e^{\zeta \omega_n T_d} \right) = \zeta \omega_n T_d$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\boxed{\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}}}$$

Para valores pequenos de ζ

$$\boxed{\zeta \cong \frac{\delta}{2\pi}}$$

FIM

Bom Estudo !