PNV5761 - Programação Matemática Aplicada a Problemas de Transporte

Programação Linear

1 - Introdução

Nas 3 primeiras aulas da disciplina, foram mostrados modelos de programação linear para a otimização de sistemas em diferentes setores de atividades. Começa agora o estudo da teoria de programação linear; de início, é importante destacar que este estudo estará limitado aos casos em que as variáveis de decisão assumem valores no conjunto dos números reais. Portanto, o tratamento de problemas com variáveis inteiras (binárias, por exemplo) está fora do escopo da disciplina. Além disto, para dar um tratamento unificado às diferentes formas vistas para o problema de programação linear, é necessário definir uma forma padrão e mostrar que qualquer forma pode ser reescrita na forma padrão com a finalidade de obter a solução ótima procurada.

1.1. Forma Padrão do Problema de Programação Linear

Para o desenvolvimento de estudo de programação linear, define-se como forma padrão do problema de programação linear:

minimizar z

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

sujeito a restrições

$$\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &= b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n &= b_m
\end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; \ldots, \; x_n \geq 0$$

ou em notação matricial

minimizar z

$$z = cx$$

sujeito a restrições

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

em que

$c = [c_1, c_2, \dots, c_n]$, $x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$b^T = [b_1, b_2, \dots, b_m]$

Assim, a forma padrão corresponde a um problema de minimização da função objetivo, as restrições lineares são todas na forma de igualdade e as variáveis são todas não negativas.

Definições (utilizando a notação matricial)

1. Diz-se que x' é solução viável para o problema de programação linear na forma padrão se: $Ax' = b$ e $x' \geq 0$.

   Seja F o conjunto de soluções viáveis para o problema de programação linear na forma padrão.

2. Diz-se que x^* é uma solução ótima para o problema de programação linear na forma padrão se:

   $x^* \in F$ (isto é $Ax^* = b$, $x^* \geq 0$) e

   $cx^* \leq cx'$ para todo $x' \in F$

1.2 Formas Alternativas do Problema de Programação Linear e Formas Padrões Associadas

Caso 1 Seja o problema de programação linear P

maximizar z

$$z = cx$$

sujeito a restrições

$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Neste caso, P não está na forma padrão por corresponder à maximização da função objetivo. Seja definida, então, a forma padrão associada P'

P'

minimizar z'

$$z' = -cx$$

sujeito a restrições

$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Se x^* é uma solução ótima para P', x^* também será ótima para a forma alternativa P. De fato:

i) x^* é solução viável para P, visto que os 2 problemas P e P' têm o mesmo conjunto F de soluções viáveis

ii) como $-cx^* \leq -cx'$, para qualquer $x' \in F$, dado que x^* é solução ótima de P', segue que

$$cx^* \geq cx' \quad \text{para todo } x' \in F$$

sendo, portanto, x^* também uma solução ótima de P.

Adicionalmente, caso P' não tenha solução viável, P também não terá solução viável pois as restrições são as mesmas para os 2 problemas. Por fim, caso P' não tenha solução ótima pois z' é ilimitada inferiormente na região viável, P não terá também solução ótima pois $z = -z'$ será ilimitada superiormente na região viável.

Caso 2 Admita-se agora que P não está na forma padrão em virtude de a restrição r estar escrita na forma de desigualdade:

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n \leq b_r$$

Neste caso, para obter a forma padrão P' associada a P, basta introduzir uma variável não negativa s_r na restrição r para que ela seja escrita na forma de igualdade. Isto é

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n + s_r = b_r$$

$$s_r \geq 0$$

Caso a restrição r fosse na forma de desigualdade $\geq$, seria subtraída no lado esquerda uma variável não negativa s'_r. Isto é

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n - s'_r = b_r$$

$$s'_r \geq 0$$

Tais variáveis s_r e s'_r são chamadas de variáveis residuais ou variáveis de folga.

Caso 3. Admita-se que o problema P não está na forma padrão pois há uma variável x_k que pode assumir valores positivos e negativos. Neste caso, o procedimento utilizado para encontrar a forma padrão associada ao problema P é substituir a variável x_k pela diferença entre duas variáveis não negativas x_k^+ e x_k^-. Isto é:

$$x_k = x_k^+ - x_k^-$$

$$x_k^+ \geq 0 \quad , \quad x_k^- \geq 0$$

Observe-se que, com tal substituição, aparecerão, na função objetivo z, as parcelas $+c_k x_k^+ - c_k x_k^-$ e, em cada restrição r, as parcelas $+a_{rk} x_k^+ - a_{rk} x_k^-$. Desta forma, as colunas das variáveis x_k^+ e x_k^- no sistema resultante de equações $A'x' = b$ serão linearmente dependentes, com implicações em análises futuras.

2 - Sistema de Equações Lineares e Método Gauss-Jordan de Eliminação

Admita-se, sem perda de generalidade, que o sistema de equações da forma padrão tenha m equações independentes com n variáveis (Caso não fossem independentes, as equações redundantes seriam previamente eliminadas.). O caso de interesse para a busca de uma solução ótima é quando $n > m$ e o sistema tem infinitas soluções. No caminho para se encontrar um algoritmo para obtenção de uma solução ótima para o problema de programação linear, será mostrado que basta examinar um conjunto finito de soluções viáveis, chamadas soluções básicas viáveis e que na iteração de uma solução básica viável (não ótima) para outra melhor se utiliza o método Gauss-Jordan de eliminação.

2.1 Resolução de um sistema de m equações independentes com n variáveis ($n > m$) para m variáveis, ditas dependentes em função das outras ($n-m$) variáveis, chamadas de independentes

Seja S um sistema de m equações independentes com n variáveis:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

ou na forma matricial

$$Ax = b$$

considere-se na matriz A um conjunto qualquer de m colunas linearmente independentes $B_1, B_2, \ldots, B_m$, formando uma matriz inversível B. A matriz A pode ser, então, particionada na forma $A = [B \mid A^N]$ em que a matriz A^N é composta pelas outras ($n-m$) colunas de A. Resolvendo-se, então, o sistema S

$Ax = b$ ou $Bx^B + A^N x^N = b$ (1)

para as variáveis x^B em função das variáveis x^N, obtém-se o sistema de equações $\bar{S}$

$$I x^B + \bar{A}^N x^N = \bar{b} \quad (2)$$

ou componente a componente de x^B

$$\begin{aligned} x_1^B &+ \sum_j \bar{a}_{1j}^N x_j^N = \bar{b}_1 \\ x_2^B &+ \sum_j \bar{a}_{2j}^N x_j^N = \bar{b}_2 \quad (2') \\ &\vdots \\ x_m^B &+ \sum_j \bar{a}_{mj} x_j^N = \bar{b}_m \end{aligned}$$

ou ainda

$$x^B = \bar{b} - \bar{A}^N x^N \quad (3)$$

$$x_i^B = \bar{b}_i - \sum_j \bar{a}_{ij}^N x_j^N \quad (3')$$

sendo x_i^B a variável associada à coluna B_i da matriz A.

Qualquer solução do sistema S, $Ax = b$, pode ser obtida, arbitrando-se valores para as variáveis independentes x^N e calculando-se, a seguir, pela expressão (3) os valores das variáveis dependentes x^B.

Uma solução particular de interesse é aquela em que se arbitra $x^N = 0$, obtendo-se, pela expressão 3, $x^B = \bar{b}$ $(x_i^B = \bar{b}_i)$.
Tal solução é chamada de solução básica; caso $\bar{b}_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, ela é uma solução básica viável.

Mudando-se as colunas de B e, consequentemente de A^N, há potencialmente $\binom{n}{m}$ soluções básicas para um problema de programação linear com m equações independentes e n variáveis. Algumas opções são descartadas quando as m colunas escolhidas para formar a matriz B forem linearmente dependentes.

Embora as relações abaixo sejam tema de tratamento posterior, não cabe deixar que elas passem despercebidas. Do exame comparativo das expressões (1) e (2), conclui-se que

$$\bar{A}^N = B^{-1} A^N \quad (4), \quad \bar{A}_j^N = B^{-1} A_j^N \quad (4')$$

e

$$\bar{b} = B^{-1} b \quad (5)$$

Há diferentes caminhos de passar do sistema de equações (1) para o sistema de equações (2) inclusive aquele utilizando as expressões como (4) ou (4') e (5) ; neste texto será dada ênfase ao método Gauss-Jordan de eliminação, que será aplicado a dois exemplos numéricos.

2.2 Método Gauss - Jordan de eliminação

Considere-se um sistema S de m equações lineares com n variáveis $(n > m)$

$$Ax = b$$

Deseja-se que a variável x_j, $1 \leq j \leq n$, passe a ter coeficiente 1 na equação i (premissa $a_{ij} \neq 0$) e seja eliminada das outras equações no novo sistema $\bar{S}$ equivalente ao sistema S

$$S \begin{cases} a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{ij} x_j + \cdots + a_{in} x_n = b_i \\ a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \cdots + a_{rj} x_j + \cdots + a_{rn} x_n = b_r \end{cases}$$

$\forall r \neq i$

$\Downarrow$ Método Gauss Jordan de eliminação

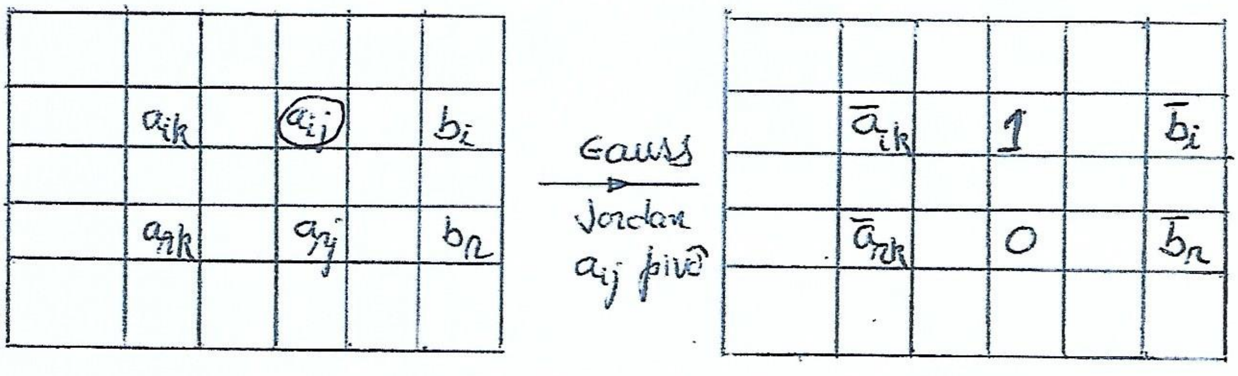
$$\bar{S} \begin{cases} \bar{a}_{i1} x_1 + \bar{a}_{i2} x_2 + \cdots + 1 x_j + \cdots + \bar{a}_{in} x_n = \bar{b}_i \\ \bar{a}_{r1} x_1 + \bar{a}_{r2} x_2 + \cdots + 0 x_j + \cdots + \bar{a}_{rn} x_n = \bar{b}_r \end{cases}$$

$\forall r \neq i$

Assim, para se obter a equação i do sistema $\bar{S}$, divide-a a equação i do sistema S por a_{ij}, coeficiente de x_j na equação i de S, chamado de pivô do método Gauss-Jordan de eliminação.

Para a obtenção de uma equação $r\ (\neq i)$ qualquer de $\bar{S}$, da equação r d sistema S deve ser subtraído o produto da equação i de $\bar{S}$ por a_{rj}, coeficiente de x_j na equação r do sistema S.

Portanto, valem as seguintes relações quando se aplica o método Gauss-Jordan, tendo $a_{ij} \neq 0$ como pivô:



linha i $\quad \bar{a}_{ik} = a_{ik}/a_{ij} \quad ; \quad \bar{b}_i = b_i/a_{ij}$

linha r $\quad \bar{a}_{rk} = a_{rk} - a_{rj} * a_{ik}/a_{ij} \quad \forall k \neq j$

$\forall r \neq i$ $\quad \bar{b}_r = b_r - a_{rj} * b_i/a_{ij}$

3. Exploração da Geometria do Problema de Programação Linear a partir de um Exemplo Introdutório de Pequeno Porte

Considere-se o seguinte problema de programação linear na forma padrão:

minimizar z

$$z = -4x_1 + 6x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 9/2\, x_5$$

sujeito a restrições

$$4x_1 + 5/6\, x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 29$$
$$-2x_1 + 29/6\, x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 11$$
$$-7/2\, x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 18$$

$$x_j \geq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, 5$$

Dado que há 3 equações (independentes) com 5 variáveis, é possível resolver o sistema de equações para 3 variáveis, ditas dependentes, em função das outras duas, denominadas independentes, e escrever a função objetivo em termos apenas das duas variáveis independentes. O passo que se propõe, a seguir, é examinar a geometria deste problema no espaço das variáveis independentes.

Por escolha arbitrária, o sistema de equações é resolvido para x_3, x_4 e x_5, nesta ordem, em função de x_1 e x_2, mediante aplicação por três vezes sucessivas do método de Gauss-Jordan. Os resultados obtidos, em cada iteração são apresentados abaixo.

1ª Iteração

$$\frac{4}{3}x_1 + \frac{5}{18}x_2 + x_3 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{4}{3}x_5 = \frac{29}{3}$$
$$-6x_1 + 3x_2 - 4x_4 = -18$$
$$-\frac{23}{2}x_1 + \frac{16}{3}x_2 - 8x_4 - 2x_5 = -40$$

2ª Iteração

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{7}{9}x_2 + x_3 + \frac{4}{3}x_5 = \frac{20}{3}$$
$$\frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{4}x_2 + x_4 = \frac{9}{2}$$
$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - 2x_5 = -4$$

3ª Iteração

$$\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{9}x_2 + x_3 = 4$$
$$\frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{4}x_2 + x_4 = \frac{9}{2}$$
$$-\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_5 = 2$$

Substituindo-se os valores obtidos para x_3, x_4 e x_5, em termos de x_1 e x_2, na função objetivo z, o problema de programação linear pode ser reescrito na forma:

minimizar z

$$z = 15 - 7/8\, x_1 - 1/2\, x_2$$

sujeito a restrições

$$\begin{aligned} 2/3\, x_1 + 1/3\, x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 4 \\ 3/2\, x_1 - 3/4\, x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 9/2 \\ -1/4\, x_1 + 1/3\, x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 2 \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 5$$

Esta representação do problema, conforme definição a ser apresentada oportunamente, corresponde à forma canônica do problema em termos das variáveis básicas x_3, x_4 e x_5.

A figura da página 17 mostra a representação dessa forma canônica no plano (x_1, x_2) das variáveis independentes. Inicialmente, a não negatividade de x_1 e x_2 indica que a região viável está no primeiro quadrante do plano (x_1, x_2). Considere-se, a seguir, a primeira equação do sistema e a não negatividade de x_3; elas implicam que

$$\left.\begin{array}{l} 2/3\, x_1 + 1/3\, x_2 + x_3 = 4 \\ x_3 \geq 0 \end{array}\right| \Rightarrow 2/3\, x_1 + 1/3\, x_2 \leq 4$$

a região viável está no semiplano

$$2/3\, x_1 + 1/3\, x_2 \leq 4$$

cuja reta suporte é

$$2/3\, x_1 + 1/3\, x_2 = 4$$

que corresponde a $x_3 = 0$.

De maneira análoga, a segunda equação do sistema e a não negatividade de x_4 implicam

$$3/2\, x_1 - 3/4\, x_2 \leq 9/2$$

deixando, portanto, a região viável ~~e~~ está no semiplano acima cuja reta suporte é

$$3/2\, x_1 - 3/4\, x_2 = 9/2$$

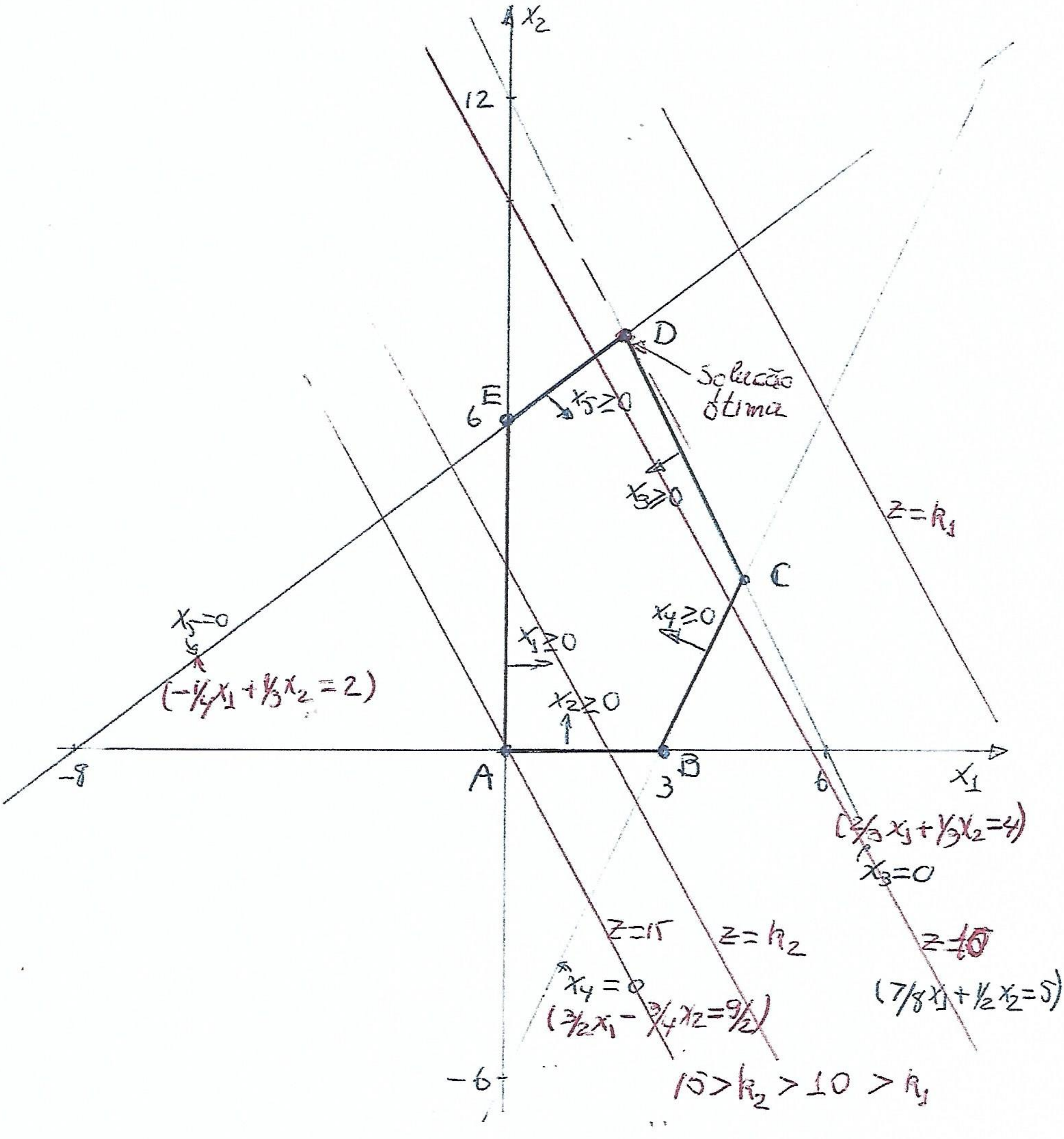
que corresponde a $x_4 = 0$

Por fim, a não negatividade de x_5 e a terceira equação implicam que a região viável fica no semiplano

$$-1/4\, x_1 + 1/3\, x_2 \leq 2$$

com reta suporte $-1/4\, x_1 + 1/3\, x_2 = 0$, correspondente a $x_5 = 0$.

Os 3 semiplanos, correspondentes a não negatividade de x_3, x_4 e x_5, estão indicados na figu-



Representação geométrica do problema no espaço das variáveis independentes x_1 e x_2

ra da página 17, bem como as respectivas retas suportes. Constata-se, então que a região viável deste problema de programação linear é o pentágono ABCDE.

Cabe agora examinar a função objetivo com o intuito de encontrar o ponto do pentágono ABCDE que minimiza a função objetivo. As equipotenciais $z = k$, constituem um feixe de retas paralelas

$$7/8\, x_1 + 1/2\, x_2 = (15 - k)$$

e o valor de k diminui com o crescimento de x_1 e x_2. Na figura da página 17 foi traçada a reta do feixe correspondente a $z = 10$ (isto é $7/8\, x_1 + 1/2\, x_2 = 5$); a seguir foram desenhadas outras retas do feixe: uma passando pelo vértice A ($x_1 = x_2 = 0$), com $z = 15$, outra com $z = k_2$, $15 > k_2 > 10$ e uma terceira com $z = k_1$, $k_1 < 10$.

Dado que a função objetivo diminui quando se desloca o feixe no sentido crescente de x_1 e x_2, constata-se que a solução ótima do problema é o vértice D, pois este é o último ponto da região viável que é tocado por uma reta do feixe quando este é deslocado no sentido decrescente de z.

Admita-se, agora, que houvesse uma mudança na função objetivo do problema que acabou de

ser resolvido e mantidas as mesmas restrições. 19
Não haveria, então, mudança na região viável e apenas alteração na direção do feixe de retas $z = k$. Ao deslocar o feixe, a partir de uma de suas retas que corte o pentágono ABCDE, no sentido decrescente de k, o último ponto a ser tocado será sempre um vértice, eventualmente todos os pontos de um lado do polígono. Esta constatação sugere que, para encontrar a solução ótima de um problema de programação linear, basta examinar os vértices da região viável. No caso em que dois vértices adjacentes são soluções ótimas, todos os pontos do lado correspondente também são soluções ótimas. Há, porém, algumas limitações nesse encaminhamento. A mais importante é que não é possível desenhar, como foi feito neste caso a região viável para qualquer valor $(n-m)$ de variáveis independentes. Um primeiro passo para superar este obstáculo é buscar descobrir algebricamente a natureza de um vértice da região viável. Superado este primeiro obstáculo, cabe verificar, posteriormente se, para instâncias grandes do problema de programação linear,

o número de soluções algébricas correspondentes aos vértices da região viável não é excessivamente elevado.

Cabe, por fim, mencionar que, em alguns casos, a região viável é ilimitada e pode não existir solução ótima para o problema de programação linear.

4. Associação entre Geometria e Álgebra em um Problema de Programação Linear

Examinando-se a região viável do problema estudado, constata-se na figura da página 17 que, em cada vértice, um par de variáveis assume valor zero: no vértice A, $x_1 = x_2 = 0$; no vértice B, $x_2 = x_4 = 0$; no vértice C, $x_4 = x_3 = 0$; no vértice D, $x_3 = x_5 = 0$; e no vértice E, $x_5 = x_1 = 0$. Dado que há 5 variáveis, há $\binom{5}{2} = 10$ formas diferentes de anular duas destas 5 variáveis. Mas 5 delas correspondem a soluções inviáveis, conforme se pode observar na figura: $x_1 = x_4 = 0$ (com $x_2 = -6$); $x_1 = x_3 = 0$ (com $x_5 < 0$); $x_2 = x_5 = 0$ (com $x_1 = -8$); $x_2 = x_3 = 0$ (com $x_4 < 0$); e $x_4 = x_5 = 0$ (com $x_3 < 0$).

A partir das observações feitas, surge um procedimento algébrico para resolver o problema de programação linear apresentado na página 13:

0. Inicialmente, $z^* = \infty$

1. Escolha duas das 5 variáveis e arbitre a elas o valor zero ($x^N = 0$);

2. Verifique se a matriz B formada pelas colunas das outras 3 variáveis no sistema de equações é inversível. Se B é inversível, vá para (3); em caso contrário, vá para (7);

3. Calcule os valores das 3 variáveis

$$x^B = B^{-1}b = \bar{b} \quad *$$

sendo b o vetor dos termos independentes no sistema de equações

4. Verifique se todos $\bar{b}_i \geq 0$.
Se não existe $\bar{b}_i < 0$, vá para (5); em caso contrário, vá para (7);

5. Calcule a função objetivo para a solução atual x^B:

$$z = c^B x^B$$

6. Faça

$$z^* = \min \{z^*, z\}$$

Se z^* é atualizado, atualize

$$x^{*B} = x^B, \quad x^{*N} = 0$$

* Convém observar que pode resultar algum $\bar{b}_i = 0$.

7. Verifique se todas as $\binom{5}{2} = 10$ alternativas já foram examinadas.
Se há ainda alternativa a examinar, volte para (1); em caso contrário, o problema está resolvido: x^{*B}, $x^N = 0$ é a solução ótima e z^* é o valor da função objetivo nesta solução ótima.

Generalização para o caso de m Equações Independentes com n Variáveis

Por analogia com o exemplo numérico acima tratado, o espaço das variáveis independentes tem dimensão $(n-m)$. Para encontrar uma solução correspondente a um vértice seria necessário:

a) escolher $(n-m)$ variáveis, formando um vetor x^N, e arbitrar a elas o valor zero $x^N = 0$

b) resolver, caso o determinante da matriz B, formada pelas colunas das outras m variáveis x^B, seja diferente de zero, o sistema resultante de equações

$$Bx^B = b$$

que implica $x^B = B^{-1}b = \bar{b}$

A solução $x^N = 0, x^B = \bar{b}$ é chamada de solução básica; se $\bar{b} \geq 0$, ela é uma solução básica viável. As componentes do vetor x^B são chamadas de variáveis básicas e as componentes do vetor x^N de variáveis não básicas.

Os passos do algoritmo seriam os mesmos mencionados acima, mas para instâncias de porte maior, o número de alternativas a serem examinadas $\binom{n}{m}$ pode ser excessivamente elevado. Por exemplo, para o caso de um sistema de 80 equações com 500 variáveis, que não é uma instância muito grande para problemas de programação linear, haveria $1{,}44 \times 10^{94}$ alternativas a serem examinadas.

Impõe-se, portanto, buscar um algoritmo mais eficiente que consiga:

1. identificar que uma solução básica viável é ótima ao se deparar com ela; e
2. caminhar de uma solução básica viável não ótima para uma solução básica viável melhor.