9 Integração numérica

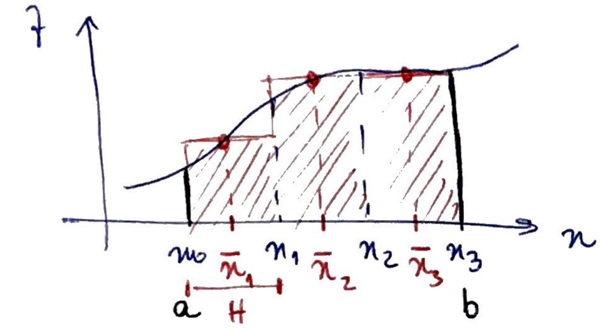
Quarteroni 4.3

$$I_f = \int_a^b f(x)\,dx \quad \rightarrow \text{definida}$$

- difícil ou impossível analiticamente
- conjunto de pontos (x_i, y_i)

* fórmula do ponto médio:

$$\bar{x}_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \quad k = 1, \dots, M$$



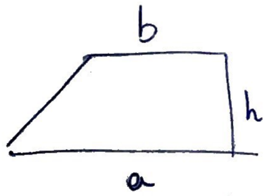
pontos $x_0, x_1, \dots, x_M$ (M+1 pontos)

$$H = \frac{(b-a)}{M}$$

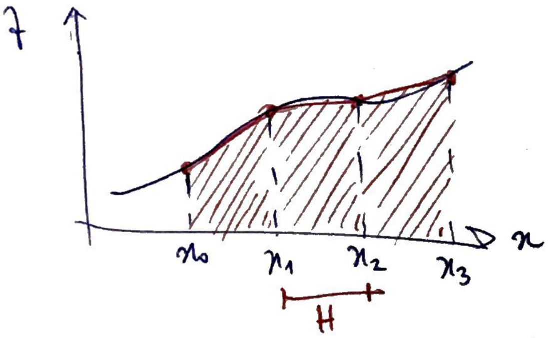
$$\boxed{\hat{I}_f = H \sum_{k=1}^{M} f(\bar{x}_k)}$$

ordem h^2

* fórmula do trapézio:



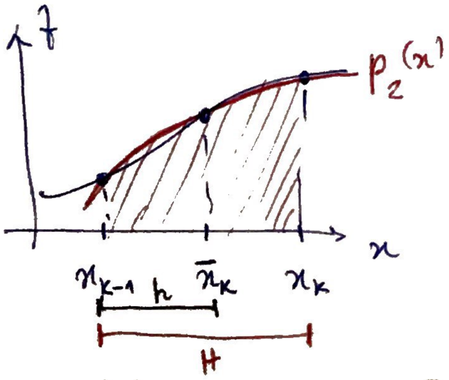
área $= \frac{a+b}{2} \cdot h$



$$\boxed{\hat{I}_f = H \sum_{k=1}^{M} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}}$$

* Fórmula de Simpson 1/3:

- ajuste de polinômio de grau 2
- usa x_{k-1}, $\bar{x}_k$ e x_k, $\bar{x}_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$
- integra $p_2(x)$



• usando polinômios de Lagrange:

$$p_2(x) = \frac{(x-\bar{x}_k)(x-x_k)}{\underbrace{(x_{k-1}-\bar{x}_k)}_{H/2}\underbrace{(x_{k-1}-x_k)}_{H}} f(x_{k-1}) + \frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{\underbrace{(\bar{x}_k-x_{k-1})}_{H/2}\underbrace{(\bar{x}_k-x_k)}_{H/2}} f(\bar{x}_k)$$

$$+ \frac{(x-x_{k-1})(x-\bar{x}_k)}{\underbrace{(x_k-x_{k-1})}_{H}\underbrace{(x_k-\bar{x}_k)}_{H/2}} f(x_k)$$

$$p_2(x) = \frac{2}{H^2}(x-\bar{x}_k)(x-x_k) f(x_{k-1}) + \frac{4}{H^2}(x-x_{k-1})(x-x_k) f(\bar{x}_k)$$

$$+ \frac{2}{H^2}(x-x_{k-1})(x-\bar{x}_k) f(x_k)$$

$$\hat{I}_f = \sum_{k=1}^{M} \int_{x_{k-1}}^{x_k} p_2(x)\, dx$$

$$\boxed{\hat{I}_f = \frac{H}{6} \sum_{k=1}^{M} \left[f(x_{k-1}) + 4 f(\bar{x}_k) + f(x_k) \right]}$$

ou $\quad H = 2h$

$$\hat{I}_f = \frac{1}{3} h \sum_{i=1}^{m/2} \left[f(x_{2i-2}) + 4 f(x_{2i-1}) + f(x_{2i}) \right]$$

* fórmulas de quadratura:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{k=0}^{M} \alpha_k f(x_k)$$

$$\begin{cases} x_k \rightarrow \text{pontos ou nós de quadratura} \\ \alpha_k \rightarrow \text{coeficientes de quadratura} \end{cases}$$

* fórmula de Newton-Cotes simples e fechada

  - aproxima $f(x)$ por um polinômio de Lagrange $p_n(x)$
  - simples: 1 único polinômio em $[a, b]$ (fechado)

$$\hat{I}_f = \int_a^b p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \underbrace{\int_a^b P_k(x)\,dx}_{\alpha_k}$$

* Newton-Cotes composto: uma quadratura em cada sub-intervalo

  - trapézio: Newton-Cotes composto de grau 1
  - Simpson 1/3: Newton-Cotes composto de grau 2
  - Simpson 3/8: Newton-Cotes composto de grau 3

  fechados $[x_0, x_n]$

$$\hat{I}_f = \frac{3}{8} h \sum_{i=1}^{n/3} \left[f(x_{3i-3}) + 3 f(x_{3i-2}) + 3 f(x_{3i-1}) + f(x_{3i}) \right]$$

obs.: grau maior → fenômeno de Runge

* Erro: (Franco 11.2.2), $\xi \in [a, b]$, Newton-Cotes simples

  - se n ímpar: $$I_f - \hat{I}_f = h^{n+2} \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n u(u-1)\ldots(u-n)\,du$$

  - se n par: $$I_f - \hat{I}_f = h^{n+3} \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n \left(u - \frac{n}{2}\right) u(u-1)\ldots(u-n)\,dn$$

- trapézio simples: $n = 1$, erro $= O(h^3)$

  trapézio composto: $M \times$(trapézio simples), $M = \frac{(b-a)}{h}$

  erro $= O(h^2)$

- Simpson 1/3 simples: $n = 2$, erro $= O(h^5)$

  Simpsom composto: $M \times$ (Simpson simples), erro $= O(h^4)$

- Simpson 3/8 simples: $n = 3$, erro $= O(h^5)$

  composto: erro $= O(h^4)$

obs: escolha entre Simpson 1/3 ou 3/8 depende se n é par ou ímpar.

* fórmula de quadratura de Gauss: Franco 11.3

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{M} \alpha_k f(x_k)$$

onde α_k são $$\alpha_k = \int_a^b \omega(x)\, l_k(x)\,dx$$

onde $l_k(x)$ são polinômios ortogonais entre si, isto é:

$$\langle l_i(x), l_j(x) \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = 0 \end{cases}$$

onde $\langle l_i(x), l_j(x) \rangle = \int_a^b \omega(x)\, l_i(x)\, l_j(x)\,dx$ é um produto escalar entre as funções $l_i(x)$ e $l_j(x)$.

ex) • polinômios de Legendre
• " " Tchebyshev
• " " Laguerre

obs: Newton - Cotes aberta (não usa x_0 e x_n):

• fórmula do ponto médio: polinômio de grau zero,
simples: erro = $O(h^3)$, composto: erro = $O(h^2)$