MAP 3210 - 2023
BMA - BMAC - IME USP

Lista sobre Estabilidade de Liapunov

Justifique suas afirmações ou suas conclusões.

Questão 1 Analise a estabilidade de Liapunov, e a estabilidade assintótica, da origem nas seguintes equações:

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} \dot{x} = -xe^{x-y^2} + y\sin x \\ \dot{y} = xy - \sin(y + x^2) \end{cases} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{cases} \dot{x} = -x\cos y \\ \dot{y} = xy + \sin y \end{cases}$$

Questão 2 Seja $p(x) = x^2 + ax + b$ com $a^2 - 4b \geq 0$ e considere a equação de segunda ordem $\ddot{x} = p(x)$.

(i) Mostre que se $a^2 - 4b > 0$ essa equação tem dois pontos de equilíbrio $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$. Suponha $x_1 < x_2$ e prove que $(x_1, 0)$ é estável segundo Liapunov e $(x_2, 0)$ é instável.

(ii) Mostre ainda que $(x_1, 0)$ não é assintoticamente estável.

(iii) Mostre que se $a^2 - 4b = 0$ essa equação tem um único ponto de equilíbrio que é instável.
Sugestão: Em alguns casos esboçar o retrato de fase dessa equação pode ser útil.

Questão 3 Considere a equação

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^3 + yz \\ \dot{y} = -y + xz \\ \dot{z} = az - 2xy \end{cases}$$

(i) Prove que se $a \leq 0$ a origem é um equilíbrio estável segundo Liapunov.

(ii) Prove que se $a < 0$ a origem é assintoticamente estável.

Questão 4 Considere a equação $\ddot{x} = -f(x) + g(x)\dot{x}$, em que f e g são funções definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, ambas de classe $\mathcal{C}^2$, com $f(0) = 0$.

(i) Suponha que $f'(0) > 0$ e $g(0) \neq 0$. Analise a estabilidade e a estabilidade assitótica do ponto de equilíbrio $(0, 0)$ na equação diferencial dada.

(ii) Mostre que se, para $x \neq 0$, tem–se $xf(x) > 0$ e $g(0) < 0$ então $(0, 0)$ é um equilíbrio estável da equação diferencial dada.