Prova 2 - SMA0169 - EDP - 05.7.2023

Prof. Sergio H. Monari Soares

Nome:____

Número USP:___________________________________

Questão	Valor	Nota
$1.^a$	3,0	
$2.^a$	3,0	
$3.^a$	3,0	
$4.^a$	3,0	
Total	12,0	

Instruções

1. Você só poderá sair da sala de aula após entregar a sua prova.

2. O uso de quaisquer equipamentos eletrônicos é proibido. Em particular, desligue e guarde o seu telefone celular. Portar em mãos ou utilizar quaisquer equipamentos eletrônicos durante a prova **resultará em anulação da sua avaliação.**

3. Esta prova é **individual.** Tentativas de consultar colegas, fornecer informações a colegas, consultar material bibliográfico, anotações pessoais etc. **resultará em anulação da sua avaliação.**

Termo Compromisso

Eu, abaixo assinado, empenho a minha honra em realizar esta avaliação de acordo com as instruções recebidas, de modo estritamente individual, sem consultar ou fornecer informações aos meus colegas, respeitando assim o propósito da avaliação, os meus colegas e professores bem como o Código de Ética da Universidade de São Paulo.

Assinatura: ____

1. Encontre a função harmônica limitada u no semidisco $\{r < 1, 0 < \theta < \pi\}$ com $u = 0$ no diâmetro $(\theta = 0, \pi)$ e $u = \pi \sin\theta - \sin 2\theta$ em $r = 1$. Escreva a resposta também em coordenadas cartesianas.

   Sugestão: Use o método de separação de variáveis e o Laplaciano em coordenadas polares $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$.

2. Prove o Princípio do Máximo: Seja D um conjunto aberto, limitado e conexo em $\mathbb{R}^2$. Seja $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ uma função harmônica em D. Então os valores máximo e mínimo de u são atingidos na fronteira de D e em nenhum ponto de D, a menos que u seja constante.

   Sugestão: use a função auxiliar $v(x, y) = u(x, y) + \epsilon(x^2 + y^2)$, para $\epsilon > 0$ dado, e a propriedade da média.

3. Prove o Princípio da reflexão de Schwarz: Sejam $B_1^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$ e $u \in C^2(B_1^+) \cap C(\overline{B_1^+})$ uma função harmônica em B_1^+ e tal que $u(x, 0) = 0$ para todo $-1 \leq x \leq 1$. Prove que a função

$$U(x, y) = \begin{cases} u(x, y) & y \geq 0 \\ -u(x, -y) & y < 0, \end{cases}$$

   obtida de u por reflexão ímpar em relação ao eixo x, é harmônica em todo a bola B_1.

   Sugestão: seja v a solução de

$$\Delta v = 0 \text{ em } B_1 \quad e \quad v = U \text{ sobre } \partial B_1.$$

   Defina $w(x, y) = v(x, y) + v(x, -y)$ e mostre que $w \equiv 0 \ldots$.

4. Dada uma função $g \in C(\mathbb{R})$ limitada, mostre a unicidade de solução **limitada** e contínua no semiplano $y \geq 0$ do problema

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   Sugestão: sejam u_1 e u_2 soluções limitadas desse problema e estenda a função $w = u_1 - u_2$ de modo impar para $y < 0$.