MAT1351 - Cálculo para Funções de Uma Variável Real I

LISTA 5 PARA ENTREGAR

Instruções

1. Fazer em grupos de até 4 pessoas.
2. Prazo de entrega é até 05 de julho.
3. Escrever seus nomes completos com seu número usp nos trabalhos.
4. Enviar os trabalhos por e-Disciplinas em arquivos pdf.
5. Justifique todas as suas afirmações. Bom trabalho!

Questão 1 (2.0 pts) Se um campo eletrostático E agir em um dielétrico polar líquido ou gasoso, o momento de dipolo resultante P por unidade de volume é

$$P(E) = \frac{e^E + e^{-E}}{e^E - e^{-E}} - \frac{1}{E}.$$

Mostre que $\lim_{E \to 0^+} P(E) = 0$.

Questão 2 (3.0 pts) Esboçar o gráfico das curva.

(a) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

(b) $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$

Questão 3 (2.0 pts) Seja $f(x) = (x^3+1)/x$. Mostre que

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - x^2] = 0.$$

Isso mostra que o gráfico de f tende ao gráfico de $y = x^2$, e dizemos que a curva $y = f(x)$ é assintótica à parábola $y = x^2$. Use esse fato para ajudá-lo no esboço do gráfico de f.

Questão 4 (3.0 pts)

(a) Uma caixa com uma base quadrada e sem tampa tem volume de 32000cm^3. Encontre as dimensões da caixa que minimizam a quantidade de material usado.

(b) Qual é a menor área de um triângulo que é cortado pelo primeiro quadrante e cuja hipotenusa é tangente à parábola $y = 4 - x^2$ em algum ponto?

$\boxed{Q1}$ $$\lim_{E\to 0^+} P(E) = \lim_{E\to 0^+}\left(\frac{e^E + e^{-E}}{e^E - e^{-E}} - \frac{1}{E}\right)$$

$$= \lim_{E\to 0^+} \frac{E\left(e^E + e^{-E}\right) - \left(e^E - e^{-E}\right)}{E\left(e^E - e^{-E}\right)}$$

$$= \lim_{E\to 0^+} \frac{Ee^E + Ee^{-E} - e^E + e^{-E}}{Ee^E - Ee^{-E}}$$ → tem a forma $\frac{0}{0}$.

usando a Regra de L'Hôpital $$\overset{\downarrow}{=} \lim_{E\to 0^+} \frac{1.\cancel{e^E} + Ee^E + 1.\cancel{e^{-E}} - Ee^{-E} - \cancel{e^E} - \cancel{e^{-E}}}{1.e^E + Ee^E - 1.e^{-E} + Ee^{-E}}$$

$$= \lim_{E\to 0^+} \frac{Ee^E - Ee^{-E}}{e^E + Ee^E - e^{-E} + Ee^{-E}}$$

$$= \lim_{E\to 0^+} \frac{\cancel{E}\left(e^E - e^{-E}\right)}{\cancel{E}\left(e^E + e^{-E} + \frac{e^E}{E} - \frac{e^{-E}}{E}\right)}$$

$$= \frac{e^0 - e^0}{e^0 + e^0 + \lim\limits_{E\to 0^+}\left(\frac{e^E}{E} - \frac{e^{-E}}{E}\right)} = \frac{0}{2 + \lim\limits_{E\to 0^+}\left(\frac{e^E - e^{-E}}{E}\right)}$$

onde $\lim\limits_{E\to 0^+} \frac{e^E - e^{-E}}{E} \overset{\text{L'HÔPITAL}}{\underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}} \lim\limits_{E\to 0^+} \frac{e^E + e^{-E}}{1} = 2$, substituindo

$$= \frac{0}{2+2} = 0$$

Portanto

$$\lim_{E\to 0^+} P(E) = 0.$$

Q2 a) $y = f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

(A) O domínio de f é: $Dom(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

(B) As interseções com os eixos x e y são

com o eixo x: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

com o eixo y: $f(0) = 0$.

(C) Não tem simetria.

(D) Assíntotas:

Horizontais: Fazemos o seguinte.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = -\infty$$

Verticais: Calculamos os seguintes limites laterais.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$$

logo a reta $x = 1$ é assíntota vertical.

Oblíquas: São retas da forma $y = ax + b$, onde

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - ax \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1. \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

logo a reta $y = x + 1$ é assíntota oblíqua.

(E) Intervalos de crescimento ou decrescimento:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Logo $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$.

	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'		$+$		$-$		$-$		$+$	

$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \text{ em } (-\infty, 0) \text{ e } (2, +\infty) \\ f'(x) < 0 \text{ em } (0, 1) \text{ e } (1, 2) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ é estritamente crescente em } (-\infty, 0) \text{ e } (2, +\infty) \\ f \text{ é } \quad '' \quad \text{ decrescente em } (0,1) \text{ e } (1,2). \end{cases}$

(F) pelo teste da primeira derivada f tem máximo local em $x=0$ e f tem mínimo local em $x = 1$.

(G) Concavidade e pontos de inflexão:

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)(2x-2)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

f não tem pontos de inflexão pois $x=1$ não esta no domínio de f.

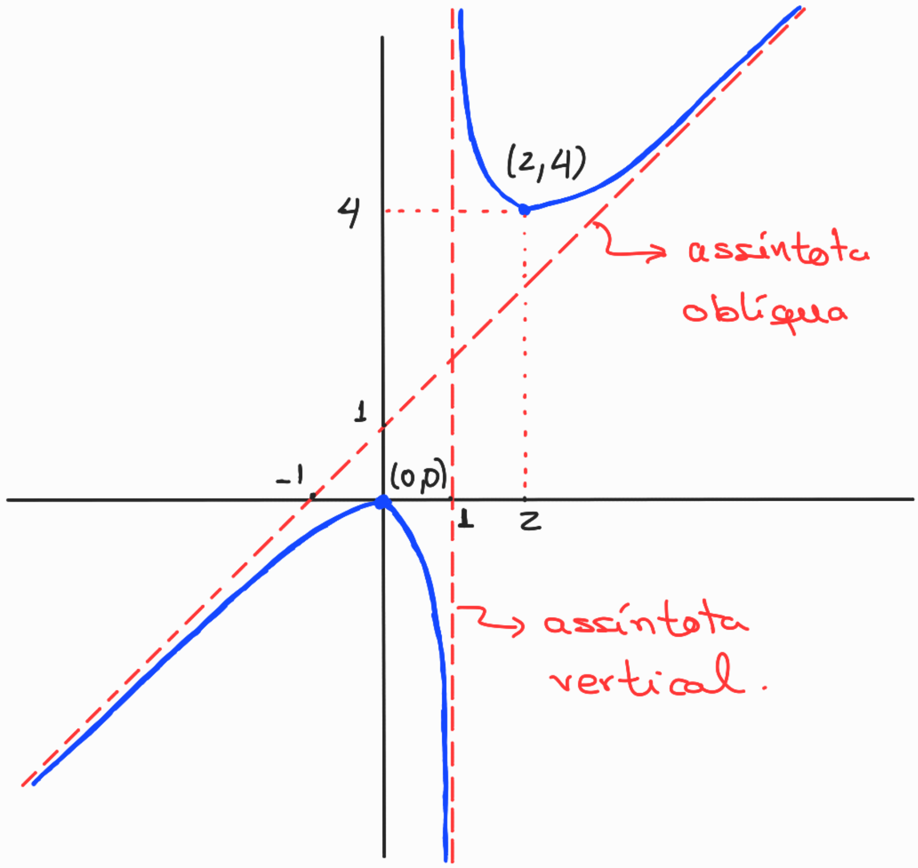
	$-\infty$		1		$+\infty$
f''		$-$		$+$	

$\Rightarrow \begin{cases} f''(x) < 0 \text{ em } (-\infty, 1) \\ f''(x) > 0 \text{ em } (1, +\infty) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{O gráfico de } f \text{ é côncavo para baixo em } (-\infty, 1) \\ \text{o gráfico de } f \text{ é côncavo para cima em } (1, +\infty). \end{cases}$

(H) Esboço da curva:

x	$f(x)$
0	0
2	4



(b) $f(x) = \dfrac{x^3+4}{x^2}$

(A) $Dom(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

(B) Interseção com os eixos:

eixo x: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3+4 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{4}$.

eixo y: não tem interseção

(C) Não tem simetria

(D) Assíntotas Horizontais:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+4}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \left(1 + \frac{4}{x^3}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x\left(1 + \frac{4}{x^3}\right) = -\infty$$

Assíntotas verticais.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^3+4}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3+4}{x^2} = +\infty$$

logo a reta $x=0$ é assíntota vertical

Assíntota oblíqua: $y = ax + b$; onde

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+4}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{4}{x^3} = 1$$

$\Rightarrow \boxed{a = 1}$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3+4}{x^2} - x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x^2} = 0$$

$\rightarrow \boxed{b = 0}$

logo a reta $y = x$ é assíntota oblíqua

(E) Intervalos de crescimento ou decrescimento.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2) - 2(x^3+4)x}{x^4} = \frac{x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x^3-8}{x^3}$$

logo $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (único ponto crítico. pois $x = 0$ não está no domínio de f)

$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ é estritamente crescente em } (-\infty, 0) \text{ e } (2, +\infty) \\ f \text{ é estritamente decrescente em } (0, 2). \end{cases}$

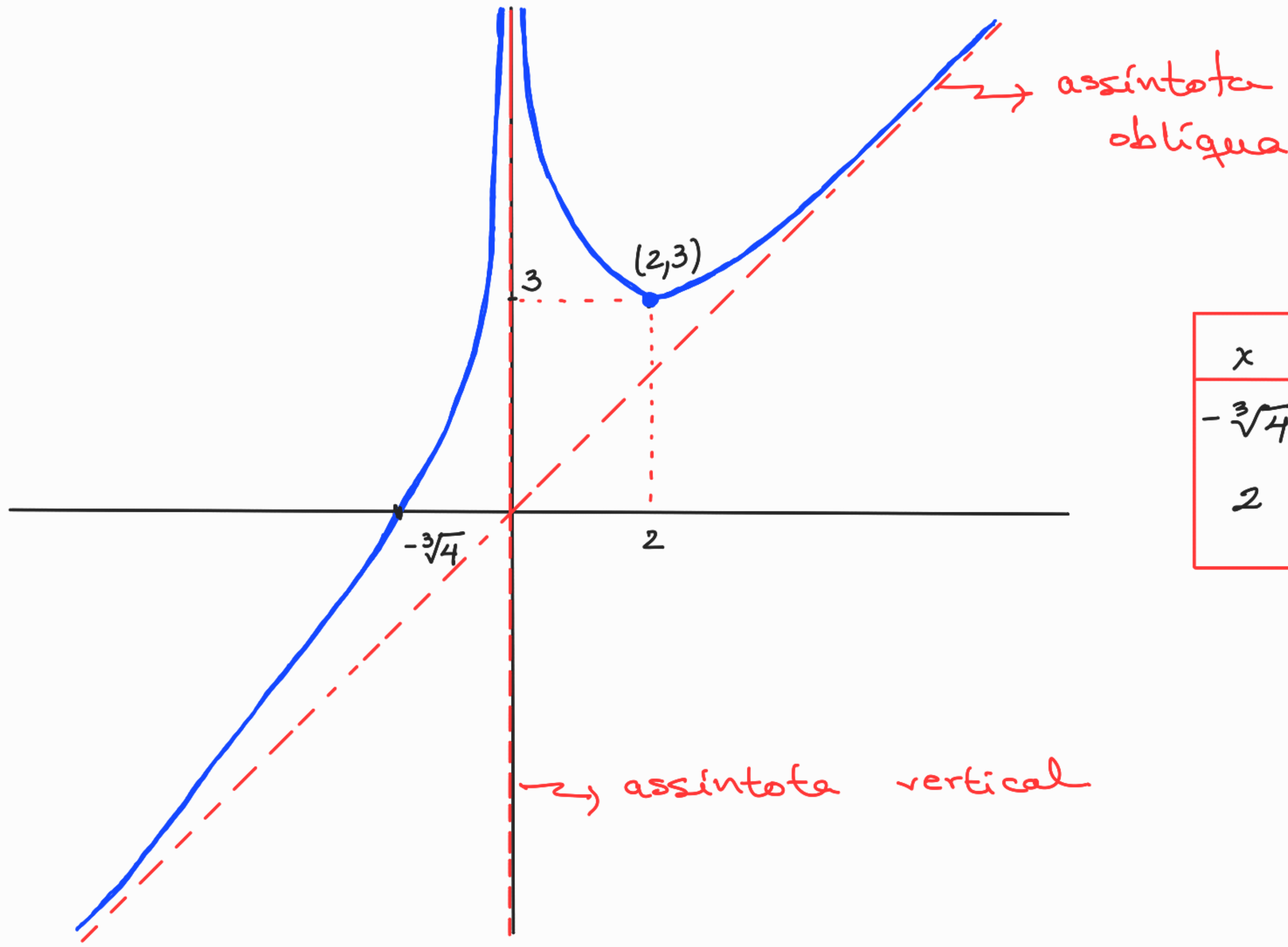
(F) Pelo teste da primeira derivada f tem um mínimo local em $x = 2$.

(G) Concavidade e pontos de inflexão.

$$f''(x) = \frac{3x^2(x^3) - (x^3-8).3x^2}{x^6} = \frac{24x^2}{x^6} = \frac{24}{x^4}$$

observamos que $f''(x) > 0$ em $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ então o gráfico de f é côncavo para cima em $(-\infty, 0)$ e em $(0, +\infty)$.

(H) Esboço da curva.



x	$f(x)$
$-\sqrt[3]{4}$	0
2	3

$\boxed{Q3}$ $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$

Observamos

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-x^2\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3+1}{x}-x^2\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

isso significa que a curva $f(x)$ é assintótica à parábola x^2.

(A) $\text{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

(B) Interseção com os eixos

eixo x: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

eixo y: não tem interseção

(C) Não tem simetria

(D) Assintotas Horizontais:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1+\frac{1}{x^3}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2\left(1+\frac{1}{x^3}\right) = +\infty$$

Assíntotas verticais

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3+1}{x} = +\infty.$$

Assíntotas oblíquas : Não tem.

(E) Intervalos de crescimento e decrescimento.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x)-(x^3+1)}{x^2} = \frac{2x^3-1}{x^2}$$

Logo $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3-1=0 \Leftrightarrow x = 1/\sqrt[3]{2}$. (único ponto crítico pois 0 não está no domínio de f)

f'	$-\infty$		0		$1/\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
		$-$		$-$		$+$	

$\Rightarrow$ f é estritamente decrescente em $(-\infty,0)$ e em $(0, 1/\sqrt[3]{2})$
f é " crescente em $(1/\sqrt[3]{2}, +\infty)$.

(F) Pelo teste da primeira derivada f possui um mínimo local em $x = 1/\sqrt[3]{2}$.

(G) Concavidade

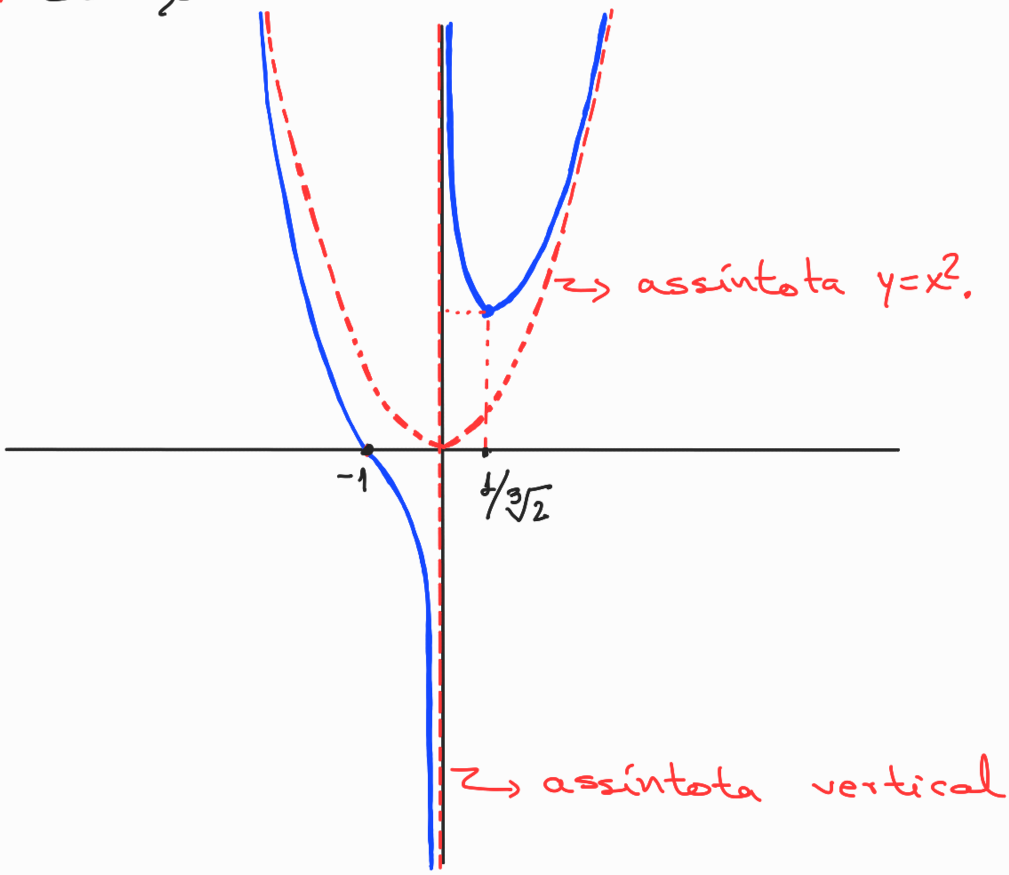
$$f''(x) = \frac{6x^2(x^2)-(2x^3-1)2x}{x^4} = \frac{2x^4+2x}{x^4} = \frac{2(x^3+1)}{x^3}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$. $\Rightarrow$ ponto de inflexão

f''	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
		$+$		$-$		$+$	

Logo o gráfico de f é côncavo para cima em $(-\infty,-1)$ e $(0,+\infty)$, e é côncavo para baixo em $(-1,0)$.

(H) Esboço da curva



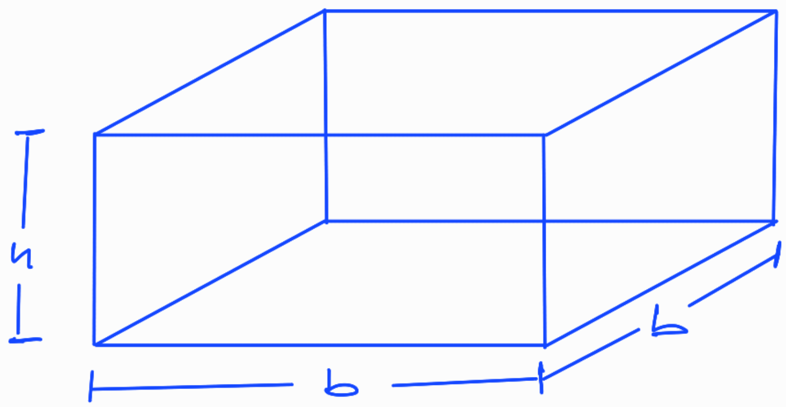
x	$f(x)$
-1	0
$1/\sqrt[3]{2}$	$3/\sqrt[3]{4}$

$\boxed{Q4}$

(a) Seja b o lado da base quadrada da caixa e h a altura da caixa.

Observamos que o volume da caixa é:

$$b^2.h = 32000 \Rightarrow h = \frac{32000}{b^2}$$



Por outro lado a área da supercície da caixa que vamos minimizar é

$$A = b^2+4b.h \Rightarrow A(b) = b^2 + 4.b.\frac{32000}{b^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{A(b) = b^2 + 4\frac{(32000)}{b}} \rightsquigarrow \text{nossa função área}.$$

onde $b > 0$.

Para achar os números críticos, derivamos A.

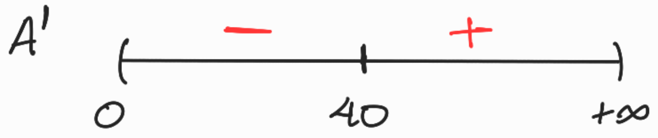
$$A'(b) = 2b - 4\frac{(32000)}{b^2} = \frac{2(b^3 - 64000)}{b^2}$$

então $A'(b) = 0 \Leftrightarrow 2b - 4\frac{(32000)}{b^2} = 0 \Leftrightarrow b^3 = 64000$

$\Leftrightarrow b = \sqrt[3]{64000}$

$\Leftrightarrow \boxed{b = 40.}$

↳ número crítico.



$\Rightarrow \begin{cases} A \text{ é estritamente decrescente em } (0, 40) \\ A \text{ é } \quad " \quad \text{crescente em } (40, +\infty) \end{cases}$

Logo pelo teste da primeira derivada A tem um mínimo absoluto em $b = 40$. Assim $h = \frac{32000}{b^2} = 20$

Portanto as dimensões da caixa que minimizam a quantidade de material usado são $40 \times 40 \times 20$.

(b) Temos a parábola $y = 4 - x^2$, logo derivamos para achar a inclinação de uma reta tangente à parábola.

$$y' = -2x.$$

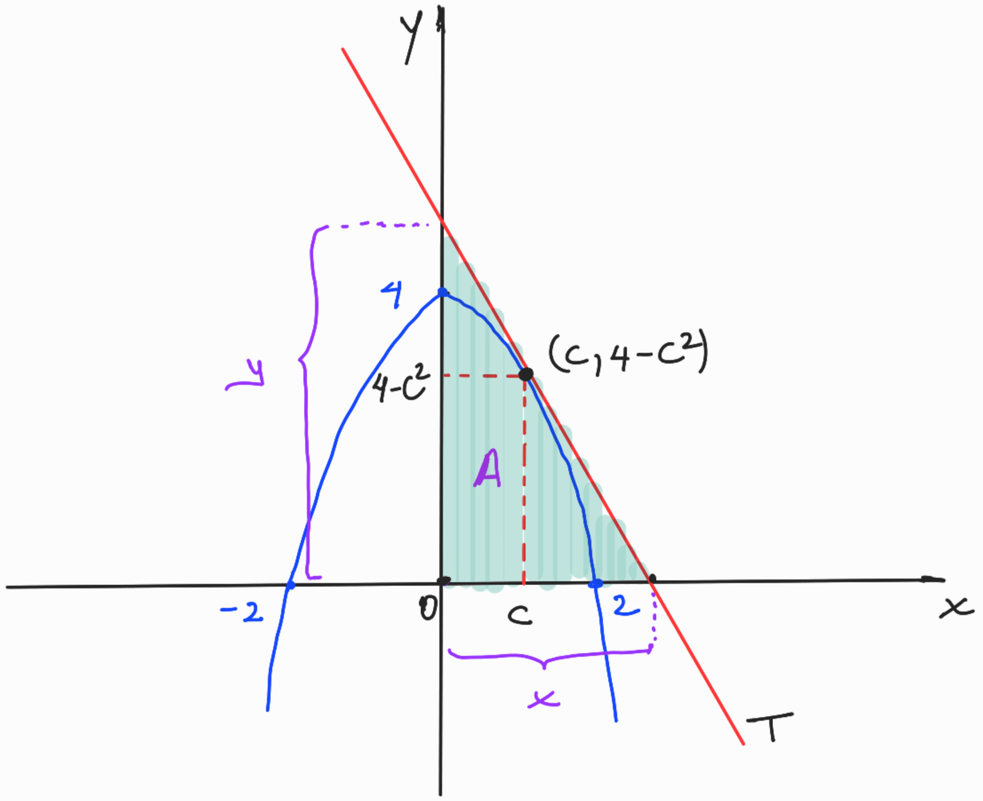
Logo para $x = c$ com $0 < c < 2$ temos $y = 4 - c^2$, então a inclinação da reta no ponto $(c, 4 - c^2)$ é $m_T = -2c$.

portanto a equação da reta é:

$$y - y_0 = m_T(x - x_0)$$

$$\Rightarrow y - (4 - c^2) = -2c(x - c)$$

$$\Rightarrow y = -2cx + c^2 + 4.$$



observamos que a reta T corta o eixo x em

$$0 = y = -2cx + c^2 + 4 \Rightarrow \boxed{x = \frac{c^2+4}{2c}.}$$

T corta o eixo y em

$$y = -2c(0) + c^2 + 4 \Rightarrow \boxed{y = c^2 + 4.}$$

Logo a área do triângulo A é : $A = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura})$

$$A(c) = \frac{1}{2}(x)(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{c^2+4}{2c}\right)\cdot(c^2+4)$$

$$\Rightarrow \boxed{A(c) = \frac{1}{4}\left(c^3 + 8c + \frac{16}{c}\right)} \rightsquigarrow \text{função área}$$

onde $0 < c < 2$.

Derivamos A para achar os pontos críticos.

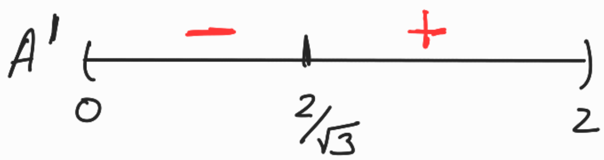
$$A'(c) = \frac{1}{4}\left(3c^2 + 8 - \frac{16}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow A'(c) = 0 \Leftrightarrow 3c^2 + 8 - \frac{16}{c^2} = 0 \Leftrightarrow 3c^4 + 8c^2 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3c^2 - 4)(c^2 + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

como $0 < c < 2$ então $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$. número crítico.



$\Rightarrow$ A é decrescente em $(0, 2/\sqrt{3})$ e crescente em $(2/\sqrt{3}, 2)$, logo pelo teste da primeira derivada A tem um mínimo absoluto em $c = 2/\sqrt{3}$.

Portanto, a menor área do triângulo que está no primeiro quadrante e tem como hipotenusa a reta tangente T é:

$$A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\frac{4}{3}+4}{2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}+4\right)$$

$$= \frac{32}{9}\sqrt{3}.$$