1 EDO linear homognea de ordem n

1.1 Objetivo e algumas informações

Nosso objetivo é obter a solução geral de uma EDO da forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{1}$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$.

A equação (1) é uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) linear hmogênea a coeficientes constantes, de ordem n, na forma normal.

As soluções (maximais) dessa equação são funções $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^n que satisfazem

$$\phi^{(n)}(t) + a_{n-1}\phi^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\phi'(t) + a_0\phi(t) = 0, \forall t \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Note que como os coeficientes são constantes, qualquer solução resulta, na verdade, de classe C^∞.

Note que podemos reescrever (2) na forma

$$\frac{d^n\phi}{dt^n}(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}\phi}{dt^{n-1}}(t) + \cdots + a_1\frac{d\phi}{dt}(t) + a_0\frac{d^0\phi}{dt^0}(t) = 0, \forall t \in \mathbf{R},$$

ou seja,

$$\Big(\frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{d}{dt} + a_0\frac{d^0}{dt^0}\Big)[\phi](t) = 0, \forall t \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Então podemos olhar o operador linear:

$$\begin{aligned} D = \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{d}{dt} + a_0\frac{d^0}{dt^0} : C^\infty(\mathbf{R}) &\to C^\infty(\mathbf{R}) \\ \phi &\to D[\phi] \end{aligned}$$

onde

$$D[\phi] = \Big(\frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{d}{dt} + a_0\frac{d^0}{dt^0}\Big)[\phi]$$

é a função dada por

$$\begin{aligned} D[\phi](t) &= \Big(\frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{d}{dt} + a_0\frac{d^0}{dt^0}\Big)[\phi](t) \\ &= \frac{d^n\phi}{dt^n}(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}\phi}{dt^{n-1}}(t) + \cdots + a_1\frac{d\phi}{dt}(t) + a_0\frac{d^0\phi}{dt^0}(t). \end{aligned}$$

Proposição 1 *O kernel da transformação linear D definida acima tem dimensão n.*

A prova desse teorema segue do Teorema de Existência e Unicidade visto em cursos de EDOs, e não será provado aqui, mas será usado no que segue.

1.2 Polinômio característico e fatoração de D

Chama-se polinômio característico da equação (1) ao polinômio definido por

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Como $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ são reais, esse polinômio pode ser fatorado em fatores de primeiro grau usando suas raízes reais distintas $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ com multiplicidades algebricas respectivamente $n_1, \ldots, n_r$, e suas raízes complexas não reais distintas (que aparecem aos pares, pois para cada raiz complexa aparece também a raiz complexa conjugada) $\alpha_1+i\beta_1, \alpha_1-i\beta_1, \ldots, \alpha_s+i\beta_s, \alpha_s-i\beta_s$, com multiplicidades algébricas respectivamente $m_1, m_1 \ldots, m_s, m_s$:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{n_r}(\lambda-(\alpha_1+i\beta_1))^{m_1}(\lambda-(\alpha_1-i\beta_1))^{m_1}\cdots \\ &= \cdots(\lambda-(\alpha_s+i\beta_s))^{m_s}(\lambda-(\alpha_s-i\beta_s))^{m_s} \end{aligned} \tag{4}$$

onde $n_1 + \cdots + n_r + 2m_1 + \cdots + 2m_s = n$.

Proposição 2 *Se o polinômio característico estiver fatorado como indicado acima, o próprio operador*

$$D = \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{d}{dt} + a_0\frac{d^0}{dt^0}$$

pode ser "fatorado" como segue:

$$\begin{aligned} D &= \Big(\frac{d}{dt} - \lambda_1\frac{d^0}{dt^0}\Big)^{n_1}\circ\cdots\circ\Big(\frac{d}{dt} - \lambda_r\frac{d^0}{dt^0}\Big)^{n_r}\circ\Big(\frac{d}{dt} - (\alpha_1+i\beta_1)\frac{d^0}{dt^0}\Big)^{m_1}\circ\Big(\frac{d}{dt} - (\alpha_1-i\beta_1)\frac{d^0}{dt^0}\Big)^{m_1}\circ\cdots \\ &= \cdots\circ\Big(\frac{d}{dt} - (\alpha_s+i\beta_s)\frac{d^0}{dt^0}\Big)^{m_s}\circ\Big(\frac{d}{dt} - (\alpha_s-i\beta_s)\frac{d^0}{dt^0}\Big)^{m_s} \end{aligned} \tag{5}$$

1.3 Kernel de operadores fatorados e casos especiais

Exercício 1 Sejam $S, T : V \to V$ lineares.

(a) Mostre que $\ker S \subset \ker T\circ S$.

(b) Mostre que se S e T comutam, então $\ker T \subset \ker T\circ S$.

(c) Mostre que se S e T comutam, então $\ker T + kerS \subset \ker T\circ S$.

Exercício 2 Seja $\frac{d}{dt} : \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$. Seja $\frac{d^0}{dt^0} : \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ a transformação identidade.

(a) Se $a \in \mathbf{R}$, qual a dimensão de $\ker(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0})$?

(b) Mostre que se $a, b \in \mathbf{R}$ e $a \neq b$ então $\ker(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0}) \cap \ker(\frac{d}{dt} - b\frac{d^0}{dt^0}) = \{O\}$.

(c) Mostre que $(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0})$ e $(\frac{d}{dt} - b\frac{d^0}{dt^0})$ comutam.

(d) Calcule a composta $(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0})\circ(\frac{d}{dt} - b\frac{d^0}{dt^0})$. Qual a dimensão de $\ker(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0})\circ(\frac{d}{dt} - b\frac{d^0}{dt^0})$?

(e) Mostre que se $a, b \in \mathbf{R}$ e $a \neq b$ então
$\ker(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0}) \circ (\frac{d}{dt} - b\frac{d^0}{dt^0}) = \ker(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0}) \bigoplus \ker(\frac{d}{dt} - b\frac{d^0}{dt^0})$.

Exercício 3 *[Continuação]* Seja $\frac{d}{dt} : \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$. Seja $\frac{d^0}{dt^0} : \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ a transformação identidade.

(f) Mostre que se $f \in \ker(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0})$ então g definida por $g(t) = tf(t)$ pertence a
$$\ker(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0})^2 := \ker(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0}) \circ (\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0}).$$

(g) Seja $f \in \ker(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0})$ e seja g_j definida por $g_j(t) = t^j f(t)$. Calcule $(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0})[g_j]$.

(h) Mostre que se $f \in \ker(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0})$ então g_j definida por $g_j(t) = t^j f(t)$ pertence a
$$\ker(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0})^{j+1}.$$

(i) Mostre que se $f \in \ker(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0})$ então $g_0, \ldots, g_{k-1}$ dadas por $g_j(t) = t^j f(t)$ pertencem a
$$\ker(\frac{d}{dt} - a\frac{d^0}{dt^0})^k.$$

1.4 Aplicação para a obtenção geral da EDO (1)

Exercício 4 Use o item (e) da questão [**?**] para resolver a equação

$$\Big(\frac{d}{dt} - 2\frac{d^0}{dt^0}\Big) \circ \Big(\frac{d}{dt} - 3\frac{d^0}{dt^0}\Big)[y] = O$$

para $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$. Justifique seus argumentos.

Exercício 5 Ache a solução geral de $y'' - y' - 2y = 0$.

Exercício 6 Ache a solução geral real da seguinte EDO:
$$\ddot{y} - 10\dot{y} + 29y = 0.$$

Exercício 7 Ache a solução geral real da seguinte EDO:
$$y''' - 4y'' + 5y' = 0.$$

Exercício 8 Ache a solução geral *real* de

$$\Big(\frac{d}{dt} - 2\frac{d^0}{dt^0}\Big)^2 \circ \Big(\frac{d}{dt} - 3i\frac{d^0}{dt^0}\Big)^3 \circ \Big(\frac{d}{dt} + 3i\frac{d^0}{dt^0}\Big)^3[y] = 0,$$

isto é, da equação diferencial linear a coeficientes constantes cujo polinômio característico é $p(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3i)^3(\lambda + 3i)^3$.

Exercício 9 Ache a solução geral real da EDO
$$y^{(7)} + a_6 y^{(6)} + a_5 y^{(5)} + a_4 y^{(4)} + a_3 y^{(3)} + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$
sabendo que
$$s^7 + a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = (s-3)^3(s^2 - 4s + 5)^2.$$