(13) Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona sobre um intervalo I. Se $f(I)$ é um intervalo, prove que f é contínua.

Solução 1 Vamos supor que f é crescente, a suponha que exista $a \in I$ tal que f não é contínua em a.

Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe $x_\delta \in (a-\delta, a+\delta)$ com $f(x_\delta) \notin (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$.

Suponha que $f(a)$ não é um extremo de $f(I)$. Como $f(I)$ é um intervalo, existe $r > 0$, que podemos tomar menor do que ε, tal que $(f(a) - r, f(a) + r) \subset f(I)$.

Então existem $x, y \in I$ tais que $f(x) = f(a) - r$ e $f(y) = f(a) + r$. Como $f(x) < f(a) < f(y)$ temos que $x < a < y$.

Seja $\delta > 0$ tal que $x < a - \delta < a < a + \delta < y$.

Existe $x_\delta \in (a - \delta, a + \delta)$ tal que $f(x_\delta) \notin (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.

Mas $x < x_\delta < y$ implica que $f(x) < f(x_\delta) < f(y)$ o que implica em $f(x_\delta) \in (f(a) - r, f(a) + r) \subset (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$, uma contradição.

Solução 2 - Usando a dica do Elon

Vamos supor que f é crescente, e que f não é contínua em $a \in I$. Então

$$\ell = \lim_{x \to a^-} f(x) \neq L = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Como f é crescente, temos que $\ell \leq L$, o que implica em $\ell < L$.

Sejam $\varepsilon > 0$ e $z \neq f(a)$ tais que $\ell < \ell + \varepsilon < z < L - \varepsilon < L$.

Para esse $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in (a - \delta, a)$ e $y \in (a, a + \delta)$:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \text{ e } |f(y) - L| < \varepsilon.$$

Então $f(x) < \ell + \varepsilon$ e $f(y) > L - \varepsilon$, isto é, $f(x) < z < f(y)$. Como $f(x)$ e $f(y)$ pertencem a $f(I)$ e $f(I)$ é um intervalo, então z deve pertencer a $f(I)$. Então existe $c \in I$ tal que $x < c < y$ e $f(c) = z$.

Se $x < c < a$ então $f(c) = z < \ell + \varepsilon$, um absurdo.

Se $a < c < y$ então $f(c) = z < L - \varepsilon$, um absurdo.