MAT0164 - Números Inteiros: uma introdução à matemática

Lista 5

Divisibilidade e Congruências

1º Semestre de 2023

(1) Mostre que o produto de três inteiros consecutivos é divisível por 6 e que o produto de quatro inteiros consecutivos é divisível por 24 e generalize esse fato para o produto de k inteiros consecutivos.

(2) Mostre que $4 \nmid n^2 + 2$ para qualquer inteiro n.

(3) Prove que se $a \in \mathbb{Z}$, então $360 \mid a^2(a^2-1)(a^2-4)$.

(4) Seja a um inteiro. Mostre que:

(a) $a^2 - a$ é divisível por 2; (b) $a^3 - a$ é divisível por 6; (c) $a^5 - a$ é divisível por 30.

(d) $a^7 - a$ é divisível por 42.

(5) Mostre que:

(a) todo inteiro ímpar é da forma $4k+1$ ou $4k+3$;

(b) o quadrado de todo inteiro é da forma ou $3k$ ou $3k+1$;

(c) o quadrado de todo inteiro é da forma ou $7k$ ou $7k+1$ ou $7k+2$ ou $7k+4$;

(d) o cubo de todo inteiro é da forma $9k$ ou $9k+1$ ou $9k+8$;

(e) o cubo de todo inteiro é da forma $7k$ ou $7k+1$ ou $7k+6$.

(6) Prove que nenhum inteiro da sequência $11, 111, 1111, \ldots$ é um quadrado perfeito.
[Dica:] Mostre que todo número quadrado perfeito é da forma $4k$ ou $4k+1$.

(7) Encontre todos os valores inteiros de n tais que

(a) $n^2 + 1$ é divisível por $n+1$;

(b) $n^3 - 3$ é divisível por $n-3$.

(8) Sejam a e b inteiros. Mostre que se $7 \mid a^2 + b^2$ então $7 \mid a$ e $7 \mid b$.

(9) Sejam a, b, c e d inteiros. Prove que, se $a - c \mid ab + cd$ então $a - c \mid ad + bc$.

(10) Seja a um número inteiro positivo tal que $a^{10} + 1$ é divisível por 10.

(a) Mostre que a pode assumir infinitos valores.

(b) Se $a_1, a_2, \ldots, a_{2021}$ são 2021 inteiros positivos tais que $a_i^{10} + 1$ é divisível por 10 para cada $i = 1, \ldots, 2021$, prove que

$$10 \nmid a_1 + a_2 + \ldots + a_{2021}$$

(11) [Critério de Divisibilidade por 11] Prove que um inteiro é divisível por 11 se, e somente se, a diferença entre a soma dos seus dígitos nas posições ímpares e a soma dos seus dígitos nas posições pares for divisível por 11.

(12) Nos casos abaixo, utilize o Algoritmo de Euclides para determinar inteiros r e s tais que $\mathrm{mdc}(a, b) = ar + bs$.

(a) $a = 56$ e $b = 72$;

(b) $a = 24$ e $b = 138$;

(c) $a = 119$ e $b = 272$;

(d) $a = 1128$ e $b = 336$.

(13) Escolhendo-se 51 números dentre os números naturais de 1 até 100, prove que existem ao menos 2 que devem ser primos entre si.

(14) Calcule:

(a) $\mathrm{mdc}(2n + 1, 9n + 4)$;

(b) $\mathrm{mdc}(2n - 1, 9n + 4)$;

(c) $\mathrm{mdc}(2n + 1, 9n - 4)$;

(d) $\mathrm{mdc}(2n - 1, 9n - 4)$.

(15) Para cada item, encontre todas as soluções inteiras positivas:

(a) $\begin{cases} \mathrm{mmc}(120, a) & = & 360 \\ \mathrm{mdc}(450, a) & = & 90 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \mathrm{mmc}(x, y) & = & 420 \\ \mathrm{mdc}(x, y) & = & 20 \end{cases}$

(16) Seja n um inteiro positivo. Mostre que se n divide $(n - 1)! + 1$, então n é primo.
Dica: Tome um divisor primo p de n e mostre que $p \geq n$.

(17) [Teorema de Clement] Prove que se n é tal que $n(n + 2)$ divide $4((n - 1)! + 1) + n$ então n e $n + 2$ são números primos gêmeos. [Dica:] Utilize o exercício anterior.

(18) Sejam p, q primos tais que $p \geq q \geq 5$. Prove que $24 | p^2 - q^2$.

(19) Seja n um inteiro positivo. Provar que

(a) Se $2^n - 1$ é primo então n é primo;

(b) $n^4 + 4$ é composto, para todo $n > 1$;

(c) todo inteiro positivo da forma $3n + 2$ tem um fator primo dessa forma;

(d) Se $n^3 - 1$ é primo, então $n = 2$;

(e) Se n é primo e $3n + 1$ é um quadrado, então $n = 5$.

(20) Seja p um primo. Prove que a equação $x^4 + 4y^4 = p$ tem solução inteira se e só se $p = 5$. Nesse caso, determine suas soluções. [Dica:] Use a identidade de Sophie-Germain: $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$

(21) Resolva as seguintes equações diofantinas:

(a) $3x + 5y = 47$;

(b) $47x + 29y = 99$;

(c) $6x + 8y = 58$;

(d) $28x + 63y = 259$.

(22) Determine todas as soluções inteiras das equações abaixo que verificam $x \geq 0$, e $y \geq 0$.

(a) $54x + 21y = 906$,

(b) $30x + 17y = 300$.

(23) [Problema de *McNuggets*] Originalmente, os *McNuggets* de Frango do *McDonald's* eram embalados em caxias com capacidade para 6, 9 e 20 McNuggets. Dizemos que n é um número de McNuggets se a quantidade de n McNuggets pode ser acondicionada nas embalagens de modo que não haja sobra.

(a) Prove que 43 não é um número de McNuggets.

(b) Mostre que todo $n \geq 44$ é um número de McNuggets.

(24) Resolva os seguintes sistemas de congruências lineares:

(a) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 2 \pmod 5 \\ x \equiv 3 \pmod 7 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod 6 \\ x \equiv 4 \pmod{11} \\ x \equiv 3 \pmod 7 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \\ x \equiv 0 \pmod 7 \end{cases}$.

(25) Resolva os seguintes sistemas de congruências lineares:

(a) $\begin{cases} 4x \equiv 3 \pmod 7 \\ 5x \equiv 4 \pmod{11} \\ 11x \equiv 8 \pmod{13} \end{cases}$, (b) $\begin{cases} 3x \equiv 5 \pmod 2 \\ x \equiv -3 \pmod 5 \\ 4x \equiv 7 \pmod 9 \end{cases}$.

(26) Resolva a equação $x^2 \equiv 11 \pmod{35}$.

(27) Seja a um inteiro. Demonstre as afirmações abaixo.

(a) $a^{21} \equiv a \pmod{15}$;

(b) Se $\mathrm{mdc}(a, 35) = 1$ então $a^{12} = 1 \pmod{35}$;

(c) Se $\mathrm{mdc}(a, 42) = 1$ então $168 \mid a^6 - 1$;

(d) $a^{25} \equiv a \pmod{26}$.

(28)

(a) Sejam a, b inteiros e seja p um primo positivo tal que $\mathrm{mdc}(a, p) = 1$. Mostre que $x = a^{p-2}b$ é solução da congruência $ax \equiv b \pmod{p}$.

(b) Resolva as congruências $6x \equiv 5 \pmod{11}$ e $3x \equiv 17 \pmod{29}$.

(29) Encontre o resto da divisão de

(a) 5^{14} por 7.

(b) 5^{100} por 11.

(c) 15^{175} por 11.

(d) 31^{200} por 28.

(e) $2^{7^{2002}}$ por 352.

(30) Encontre os dois últimos dígitos de

(a) 2^{999};

(b) 3^{999};

(c) 5^{2020};

(d) 7^{2019};

(e) 123^{2010};

(f) 557^{2012}.

(31)

(a) Seja p um inteiro primo e sejam a, b inteiros arbitrários. Mostre que se $a^p \equiv b^p \pmod{p}$ então $a \equiv b \pmod{p}$.

(b) Seja $p > 2$ um primo. Mostre que

$$1^p + 2^p + \cdots + (p-1)^p \equiv 0 \pmod{p}.$$