Física 3 IFUSP
14 de Junho de 2023

Prof. José Roberto B. Oliveira

Prova 3

Gabarito

1) O campo elétrico em certa região do espaço é descrita em coordenadas cartesianas por:

$$\vec{E}(x,y,z)=E_0 R\,\frac{x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}}{n\,x^2+y^2+z^2+R^2}$$

sendo R uma constante com dimensão de comprimento, e n uma constante adimensional.

a) [0,5] Determine o valor de n para que este campo seja conservativo. Explique.
b) [0,5] Expresse esse campo (conservativo) em coordenadas esféricas (r,θ,ϕ).
c) [1,0] Determine a expressão para a densidade de carga $\rho(\vec{r})$ que produz esse campo.
d) [0,5] Determine a densidade de carga na origem $r=0$.

Resp.:
a) Para que o campo seja conservativo, seu rotacional deve ser nulo. O rotacional é:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\hat{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)+\hat{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

Definindo $v=v(x,y,z)=n\,x^2+y^2+z^2+R^2$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\frac{-E_0R}{v^2}\left[\hat{i}\,(z\,2\,y-y\,2\,z)+\hat{j}\,(x\,2\,z-z\,2\,nx)+\hat{k}\,(y\,2\,nx-x\,2\,y)\right]=\frac{-E_0R}{v^2}\left[\hat{i}\,(0)+\hat{j}\,2(1-n)xz+\hat{k}\,2(n-1)xy\right]$$

A componente x é zero, mas as outras duas são nulas somente se $n=1$.

b) Com $n=1$, como $r^2=x^2+y^2+z^2$ e $\vec{r}=r\,\hat{r}$: $\quad \vec{E}(r,\theta,\phi)=E_0R\dfrac{r}{(r^2+R^2)}\hat{r}$

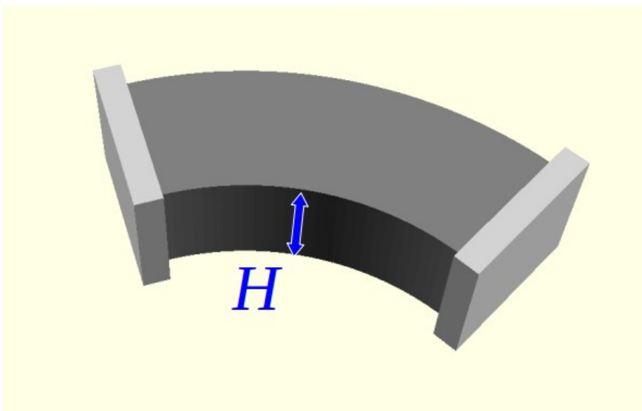
c) Pela lei de Gauss na forma diferencial: $\quad \rho=\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\varepsilon_0\left[\dfrac{\partial E_x}{\partial x}+\dfrac{\partial E_y}{\partial y}+\dfrac{\partial E_z}{\partial z}\right]=\varepsilon_0 E_0 R\dfrac{(r^2+3R^2)}{(r^2+R^2)^2}$

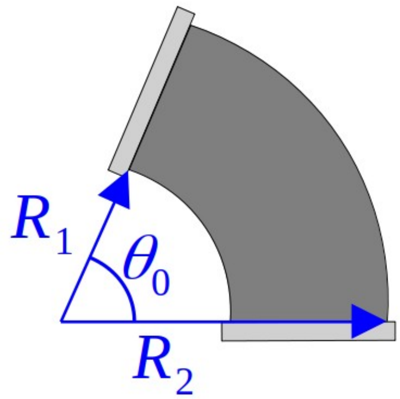
Usando, p. ex.:

$$E_x=\frac{E_0R}{(r^2+R^2)}x=E_0Rf(r)\,x\,,\quad \frac{\partial E_x}{\partial x}=\frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}x+f(r)=\frac{df}{dr}\frac{x^2}{r}+f(r)=E_0R\left[\frac{3}{(r^2+R^2)}-\frac{2\,x^2}{(r^2+R^2)^2}\right],\ E_y=\ldots$$

d) $\quad \rho(r=0)=3\,\varepsilon_0\dfrac{E_0}{R}$

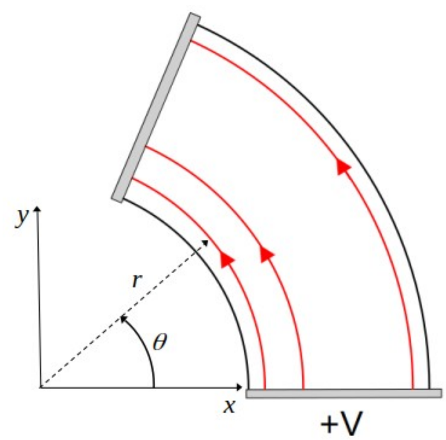
2) Um resistor de baixa condutividade σ consiste de um anel partido (vide figura) de raio interno R_1, raio externo R_2, ângulo θ_0 e espessura H. A tensão V é aplicada entre dois eletrodos (cinza claro) de alta condutividade.





a) [1,0] Esboce as linhas de campo elétrico que são formadas no interior do resistor (na vista da figura do lado direito).
b) [0,5] Determine a expressão para o campo elétrico $\vec{E}(r,\theta,z)$ em coordenadas cilíndricas para uma dada tensão V.
c) [1,0] Determine a resistência elétrica deste resistor, como função de seus parâmetros geométricos.

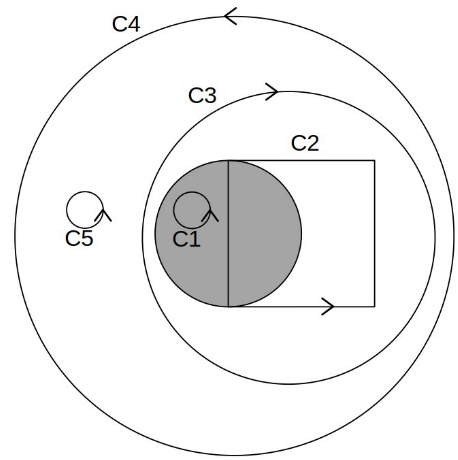
Resp.:
a) Como na condição estacionária o divergente da densidade de corrente é nulo no interior do condutor. As superfícies planas dos eletrodos são equipotenciais, portanto as linhas de campo são perpendiculares à elas, e devem seguir equidistantes das superfícies cilíndricas do condutor. Serão portanto arcos de círculo. Sendo o arco de raio maior de maior comprimento, a intensidade do campo elétrico deve ser menor para manter a mesma diferença de potencial, portanto a densidade de linhas será menor para raios maiores.



b) $\int_0^{\theta_0} \vec{E}.\hat{\theta} r d\theta = -\Delta V = V$, $\vec{E}(r) = \frac{V}{r\theta_0}\hat{\theta}$

c) $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, $I = \int_S \vec{J}.\hat{n}\,ds = \int_0^H dz \int_{R_1}^{R_2} \sigma\vec{E}.\hat{\theta}\,dr = H\sigma \ln(\frac{R_1}{R_1})\frac{V}{\theta_0}$ $R = \frac{V}{I} = \frac{\theta_0}{\sigma H \ln(\frac{R_2}{R_1})}$

3) [2,5] A figura representa um condutor metálico cilíndrico longo de raio R visto em corte (cinza) que porta uma corrente I na direção axial, com sentido para fora da página. São indicados na figura quatro caminhos fechados: C1, C2, C3 e C4, sendo C1 um círculo de raio $\frac{R}{4}$, C2 um quadrado de lado $2R$, C3 um círculo de raio $2R$, e C4 um círculo de raio $3R$, centrado no eixo do condutor, e C5 também um círculo de raio $\frac{R}{4}$. O sentido de percurso de cada caminho está indicado por uma seta.



Seja $\Gamma_i = \oint_{Ci} \vec{B}.d\vec{l}$ a integral de linha (circulação) do campo magnético gerado pela corrente que passa pelo condutor por cada caminho Ci $(i=1,2,3,4$ ou 5).

a) [1,0] Coloque em ordem CRESCENTE as circulações $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$. Justifique.

b) [1,0] Calcule as razões entre cada uma das circuitações e a de C4: $\frac{\Gamma_i}{\Gamma_4}$.

c) [0,5] Para qual (ou quais) das circuitações poderíamos escrever: $|\vec{B}| = \frac{\Gamma}{2\pi r}$?

Resp.:

a) No interior do condutor longo a densidade de corrente é constante, e a corrente que contribui para a circuitação é proporcional à área do condutor contida no interior do caminho plano delimitado por cada caminho Ci. $\Gamma_i = \oint_{C_i} \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 \int_{S(C_i)} \vec{J}.\hat{n}\,dS = \mu_0 \vec{J}.\hat{n} A_{Ci}$. Somente a normal do caminho C3 (percorrido no sentido horário) tem sentido oposto ao da corrente, portanto: $\Gamma_3 < 0 < \Gamma_5 < \Gamma_1 < \Gamma_2 < \Gamma_4$.

b)

i	A_{Ci}	$\frac{\Gamma_i}{\Gamma_4}$
1	$\pi(\frac{R}{4})^2$	1/16
2	$\frac{\pi R^2}{2}$	1/2
3	πR^2	-1
4	πR^2	1
5	0	0

c) Somente C4 pois é a única cujo caminho segue as linhas de campo magnético circulares, centradas no eixo do cilindro. O campo magnético é tangencial e de magnitude constante, portanto a integral de linha é igual ao comprimento do caminho multiplicado pela magnitude de B.

4) Um cilindro muito longo de material isolante e raio R está carregado com um densidade volumétrica de carga dada em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) por:

$$\rho = \rho_0 [1 - (\frac{r}{R})^2]$$

O cilindro desloca-se com velocidade constante $\vec{v} = v\hat{k}$ na direção do próprio eixo (eixo *z*), sendo ρ_0 uma constante positiva.

a) [1,0] Apresente a expressão para a densidade de corrente elétrica em todo o espaço.
b) [1,5] Obtenha a expressão para o campo magnético em todo o espaço (dentro e fora do cilindro).

Resp.:

a) $\vec{J} = \rho \vec{v}$. Para $r \leq R$: $\vec{J} = \rho_0 [1 - (\frac{r}{R})^2] v\hat{k}$. Para r>R: $\vec{J} = 0$.

b) Da simetria cilíndrica $\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 \int_{S(C)} \vec{J}.\hat{n}\, dS = \mu_0 I_C$, sendo $\vec{B} = B\hat{\theta}$.

Para $r \leq R$: $I_C = 2\pi \int_0^r \rho_0 [1 - (\frac{r}{R})^2] v\, r\, dr$, $I_C = 2\pi \rho_0 v (\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2})$

Para $r > R$: $I_C = 2\pi \int_0^R \rho_0 [1 - (\frac{r}{R})^2] v\, r\, dr$, $I_C = 2\pi \rho_0 v \frac{R^2}{4}$

Portanto:

Para $r \leq R$: $\vec{B} = \mu_0 \rho_0 v (\frac{r}{2} - \frac{r^2}{4R^2}) \hat{\theta}$

Para $r > R$: $\vec{B} = \mu_0 \rho_0 v \frac{R^2}{4r} \hat{\theta}$