

Álgebra Linear e Aplicações

- *Método de Jacobi e Gauss-Seidel.*
 - *Convergência de A_k .*
 - *Critério de convergência para Jacobi e Gauss-Seidel.*
- 
- A decorative graphic element consisting of multiple parallel lines. On the left side, there are several horizontal lines. These lines transition into a series of diagonal lines that slope upwards from left to right, filling the bottom right portion of the page.

MÉTODO DE JACOBI E GAUSS-SEIDEL

OBJETIVO: ESTUDAR MÉTODOS ITERATIVOS PARA RESOLUÇÃO DE $Ax=b$. SÃO ÚTEIS PARA MATRIZES GRANDES E COM MUITOS ZEROS.

ABAIXO, CONSIDERAREMOS O SISTEMA DETERMINADO $Ax=b$, EM QUE

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \quad \text{Logo } Ax=b \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

VAMOS SUPOR QUE $a_{ii} \neq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$. LOGO x É SOLUÇÃO DE $Ax=b$ SE, E SOMENTE SE,

$$\begin{aligned} x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n)/a_{11} \\ x_2 &= (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n)/a_{22} \\ &\vdots \\ x_n &= (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1})/a_{nn} \end{aligned}$$

EXEMPLO: $2x_1 - x_2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = (1 + x_2)/2$
 $-x_1 + 2x_2 = 0 \quad x_2 = (0 + x_1)/2$

MÉTODO DE JACOBI

SUPONHA QUE $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ SEJA INVERSÍVEL E $a_{ii} \neq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

ALGORITMO:

- 1) ESCOLHA $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ E $N \in \mathbb{N}$ O NÚMERO DE ITERAÇÕES.
- 2) CALCULAMOS $x^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)})$, $k \in \{0, \dots, N-1\}$, POR

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - a_{i2}x_2^{(k)} - a_{i3}x_3^{(k)} - \dots - a_{in}x_n^{(k)})/a_{ii}$$

$$x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22}$$

$$x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)})/a_{nn}$$

$$x_j^{(k+1)} = (b_j - \sum_{i \neq j} a_{ji}x_i^{(k)})/a_{jj}$$

EXEMPLO 1: CONSIDEREMOS $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$. A SOLUÇÃO EXATA É $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

MÉTODO DE JACOBI: VAMOS ESCOLHER $x^{(0)} = (0, 0)$. O MÉTODO É $x_1^{(k+1)} = (1 + x_2^{(k)})/2$
 $x_2^{(k+1)} = (0 + x_1^{(k)})/2$

Assim,

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= (1 + x_2^{(0)})/2 = (1 + 0)/2 = \frac{1}{2} & x_1^{(2)} &= (1 + x_2^{(1)})/2 = (1 + 0)/2 = \frac{1}{2} & x_1^{(3)} &= (1 + x_2^{(2)})/2 = (1 + \frac{1}{4})/2 = \frac{5}{8} \\ x_2^{(1)} &= (0 + x_1^{(0)})/2 = (0 + 0)/2 = 0 & x_2^{(2)} &= (0 + x_1^{(1)})/2 = (0 + \frac{1}{2})/2 = \frac{1}{4} & x_2^{(3)} &= (0 + x_1^{(2)})/2 = \frac{1}{2}/2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

CONTINUANDO, TEMOS $x_1^{(10)} = 0.666015625$ (FEITO NO PYTHON)
 $x_2^{(10)} = 0.3330078125$

EXEMPLO 2 CONSIDEREMOS $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$ A SOLUÇÃO EXATA É $(0.3617..., -0.3404..., 0.0638...)$

MÉTODO DE JACOBI: VAMOS ESCOLHER $x^{(0)} = (0, 0, 0)$. O MÉTODO É $x_1^{(k+1)} = (1 - 2x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)})/5$
 $x_2^{(k+1)} = (-3x_1^{(k)} + x_3^{(k)})/3$
 $x_3^{(k+1)} = (-x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)})/5$

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= (1 - 2x_2^{(0)} + 2x_3^{(0)})/5 = \frac{1}{5} & x_1^{(2)} &= (1 - 2x_2^{(1)} + 2x_3^{(1)})/5 = \frac{1}{5} \\ x_2^{(1)} &= (-3x_1^{(0)} + x_3^{(0)})/3 = 0 & x_2^{(2)} &= (-3x_1^{(1)} + x_3^{(1)})/3 = -\frac{1}{5} \\ x_3^{(1)} &= (-x_1^{(0)} - 2x_2^{(0)})/5 = 0 & x_3^{(2)} &= (-x_1^{(1)} - 2x_2^{(1)})/5 = -\frac{1}{25} \end{aligned}$$

$$x_1^{(10)} = 0.355...$$

$$x_2^{(10)} = -0.332... \quad (\text{FEITO NO PYTHON}).$$

$$x_3^{(10)} = 0.0607...$$

MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

SUPONHA QUE $A \in M_n(\mathbb{R})$ SEJA INVERSÍVEL E $a_{ii} \neq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

ALGORITMO:

1) ESCOLHA $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ E $N \in \mathbb{N}$ O NÚMERO DE ITERAÇÕES.

2) CALCULAMOS $x^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)})$, $k \in \{0, \dots, N-1\}$, POR

$$x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11}$$

$$x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22}$$

$$x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - a_{n3}x_3^{(k)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)})/a_{nn}$$

$$x_j^{(k+1)} = (b_j - \sum_{i < j} a_{ji}x_i^{(k+1)} - \sum_{i > j} a_{ji}x_i^{(k)})/a_{jj}$$

EXEMPLO 1: CONSIDEREMOS $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$. A SOLUÇÃO EXATA É $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL: VAMOS ESCOLHER $x^{(0)} = (0, 0)$. O MÉTODO É $x_1^{(k+1)} = (1 + x_2^{(k)})/2$
 $x_2^{(k+1)} = (0 + x_1^{(k+1)})/2$

Assim,

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= (1 + x_2^{(0)})/2 = (1 + 0)/2 = \frac{1}{2} & x_1^{(2)} &= (1 + x_2^{(1)})/2 = (1 + \frac{1}{4})/2 = \frac{5}{8} & x_1^{(3)} &= (1 + x_2^{(2)})/2 = (1 + \frac{5}{16})/2 = \frac{21}{32} \\ x_2^{(1)} &= (0 + x_1^{(1)})/2 = (0 + \frac{1}{2})/2 = \frac{1}{4} & x_2^{(2)} &= (0 + x_1^{(2)})/2 = (0 + \frac{5}{8})/2 = \frac{5}{16} & x_2^{(3)} &= (0 + x_1^{(3)})/2 = \frac{21}{64} \end{aligned}$$

CONTINUANDO, TEMOS $x_1^{(10)} = 0.66666603$ (FEITO NO PYTHON)
 $x_2^{(10)} = 0.333333015$

EXEMPLO 2 CONSIDEREMOS $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$ A SOLUÇÃO EXATA É $(0.3617\dots, -0.3404\dots, 0.0638\dots)$

MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL: VAMOS ESCOLHER $x^{(0)} = (0, 0, 0)$. O MÉTODO É

$$x_1^{(k+1)} = (1 - 2x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)})/5$$

$$x_2^{(k+1)} = (-3x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)})/3$$

$$x_3^{(k+1)} = (-x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)})/5$$

Assim,

$$x_1^{(1)} = (1 - 2x_2^{(0)} + 2x_3^{(0)})/5 = \frac{1}{5}$$

$$x_2^{(1)} = (-3x_1^{(1)} + x_3^{(0)})/3 = -\frac{1}{5}$$

$$x_3^{(1)} = (-x_1^{(1)} - 2x_2^{(1)})/5 = \frac{1}{25}$$

$$x_1^{(2)} = (1 - 2x_2^{(1)} + 2x_3^{(1)})/5 = 0.296$$

$$x_2^{(2)} = (-3x_1^{(2)} + x_3^{(1)})/3 = -0.282\bar{6}$$

$$x_3^{(2)} = (-x_1^{(2)} - 2x_2^{(2)})/5 = 0.0538\bar{6}$$

$$x_1^{(10)} = 0.3616...$$

$$x_2^{(10)} = -0.340378... \text{ (FEITO NO PYTHON)}$$

$$x_3^{(10)} = 0.0638216...$$

ESCREVENDO OS MÉTODOS NA FORMA MATRICIAL

DADO $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, TEMOS $D = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$

PORTANTO $A = L + D + U$.

<u>JACOBI</u> TEMOS $\begin{aligned} a_{11} x_1^{(k+1)} &= b_1 - a_{12} x_2^{(k)} - a_{13} x_3^{(k)} - \dots - a_{1n} x_n^{(k)} \\ a_{22} x_2^{(k+1)} &= b_2 - a_{21} x_1^{(k)} - a_{23} x_3^{(k)} - \dots - a_{2n} x_n^{(k)} \\ &\vdots \\ a_{nn} x_n^{(k+1)} &= b_n - a_{n1} x_1^{(k)} - a_{n2} x_2^{(k)} - \dots - a_{nn-1} x_{n-1}^{(k)} \end{aligned}$	SE $S := D$, ENTÃO $Sx^{(k+1)} = Tx^{(k)} + b$ $T := -L - U$
--	---

Logo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix}}_D \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{-L-U} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

GAUSS-SEIDEL: TEMOS

$$a_{11}x_1^{(k+1)} = b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}$$

$$a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k+1)} = b_2 - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \dots + a_{nn}x_n^{(k+1)} = b_n$$

Logo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{:= D+L} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{:= -U} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

SE $S := D+L$ E $T := -U$, ENTÃO $Sx^{(k+1)} = Tx^{(k)} + b$

EXEMPLO SEJA $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \in b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Logo $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ E $U = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

JACOBI $S := D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $T := -L - U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Logo $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

GAUSS-SEIDEL $S := L+D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $T := -U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Logo $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

CONVERGÊNCIA DOS MÉTODOS

AMBOS OS MÉTODOS PODEM SER ESCRITOS COMO $Sx^{(k+1)} = Tx^{(k)} + b$.

NOTE QUE SE $a_{ii} \neq 0, \forall i$, ENTÃO S É INVERTÍVEL.

NOTE QUE $S - T = A$ PARA AMBOS OS MÉTODOS.

ASSIM, $Ax = b \Leftrightarrow Sx - Tx = b \Leftrightarrow Sx = Tx + b$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{SEJA } e^{(k)} = x - x^{(k)}. \text{ Logo } S_x = T_x + b \\ S_x^{(k+1)} = T_x^{(k+1)} + b \end{array} \right\} \Rightarrow S(x - x^{(k+1)}) = T(x - x^{(k+1)}) + b - b. \\ \Rightarrow S e^{(k+1)} = T e^{(k)}$$

$$\text{Assim, } e^{(k+1)} = S^{-1} T e^{(k)} = (S^{-1} T)^2 e^{(k-1)} = (S^{-1} T)^3 e^{(k-2)} = \dots = (S^{-1} T)^{k+1} e^{(0)} = (S^{-1} T)^{k+1} (x - x^{(0)}).$$

$$\text{CONCLUÍMOS QUE OS MÉTODOS CONVERGEM} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (S^{-1} T)^{k+1} (x - x^{(0)}) = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (S^{-1} T)^k y = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

CONVERGÊNCIA DE A^k

DEFINIÇÃO: SEJA $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ UMA SEQUÊNCIA DE MATRIZES EM $M_{m,n}(\mathbb{C})$. DIZEMOS QUE $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = 0$ SE $\lim_{k \rightarrow \infty} (A_k)_{ij} = 0, \forall i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$

PROPOSIÇÃO: SEJA $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ UMA SEQUÊNCIA DE MATRIZES EM $M_{m,n}(\mathbb{C})$. Logo $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} A_k v = 0, \forall v \in \mathbb{C}^n$.

DEMO: $(\Rightarrow)$ SE $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = 0$, ENTÃO $(A_k v)_i = \sum_{j=1}^n (A_k)_{ij} v_j \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, POIS $(A_k)_{ij} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Logo $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k v = 0, \forall v \in \mathbb{C}^n$.

$(\Leftarrow)$ SEJA $\{e_1, \dots, e_n\}$ A BASE CANÔNICA DE $\mathbb{C}^n$ E $j \in \{1, \dots, n\}$.

ASSIM, $C_{kj} = A_k e_j \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Logo $(A_k)_{ij} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \forall i \in \{1, \dots, m\}$

↳ COLUMNA j DE A_k

↗ A ELEVADO A k

DADO $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$, QUANDO É QUE A SEQUÊNCIA A^k VAI A ZERO?

PROPOSIÇÃO: SEJA $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$. ENTÃO $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \max_{\lambda, \text{ AUTOVALORES DE } A} |\lambda| < 1$

DEMO: $(\Leftarrow)$ SE EXISTE $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ E $|\lambda| \geq 1$ TAL QUE $Av = \lambda v$, ENTÃO $A^k v = \lambda^k v$.

SE $|\lambda| \geq 1$, ENTÃO $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^k \neq 0$ E, PORTANTO, $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k v \neq 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} A^k \neq 0$.

($\Rightarrow$) DEMO 1 (A DIAGONALIZÁVEL).

SEJA $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ BASE DE $\mathbb{C}^n$ TAL QUE $A\vec{e}_j = \lambda_j \vec{e}_j$. SE $v \in \mathbb{C}^n$, ENTÃO $v = \alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$.

LOGO $A^k v = \alpha_1 \lambda_1^k \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k \vec{e}_n \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, POIS $|\lambda_j| < 1$. LOGO $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$.

DEMO 2 (A QUALQUER)

NESTE CASO, $\exists P \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ INVERSÍVEL TAL QUE $P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_n \end{bmatrix}$, J_j BLOCOS DE JORDAN.

ASSIM, $A^k = (PJP^{-1})^k = PJ^kP^{-1} = PJ^kP^{-1}$. NOTE QUE $J^k = \begin{bmatrix} J_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_n^k \end{bmatrix}$

SUPONHA QUE $J_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I + N$, EM QUE $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

COMO $N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$, TEMOS

$$J_i^k = (\lambda I + N)^k \underset{N^0 = I}{=} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N^j = \sum_{j=0}^2 \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N^j = \lambda^k I + k \lambda^{k-1} N + \frac{k(k-1)}{2} \lambda^{k-2} N^2.$$

COMO $|\lambda| < 1$, TEMOS $\lim_{k \rightarrow \infty} J_i^k = 0$. A ANÁLISE DE J_j É FEITA DE FORMA ANÁLOGA.

CONCLUÍMOS QUE $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = \lim_{k \rightarrow \infty} PJ^kP^{-1} = 0$ SE $\max |\lambda_i| < 1$ ■

OBS: VEMOS QUE $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ MAIS RAPIDAMENTE SE $\max |\lambda_i|$ É PEQUENO.

COROLÁRIO (IMPORTANTE) O MÉTODO DE JACOBI (OU GAUSS-SEIDEL) CONVERGE $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$
OS AUTO-VALORES DE $S^{-1}T$ TÊM MÓDULO $\max |\lambda_i| < 1$.

DEMO: DE FATO $e^{(k,1)} = (S^{-1}T)^{k+1}(x - x^{(0)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \max |\lambda_i| < 1$, EM QUE
 λ_i SÃO OS AUTOVALORES DE $S^{-1}T$ ■

EXEMPLO 1) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

JACOBI $S^{-1}T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ TEM AUTOVALORES $\pm \frac{1}{2}$
JACOBI CONVERGE $\forall x^{(0)}$!

AUTOVALORES MENORES.
CONVERGÊNCIA MELHOR!

GAUSS-SEIDEL $S^{-1}T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ TEM AUTOVALORES 0 E $\frac{1}{4}$.
GAUSS-SEIDEL CONVERGE $\forall x^{(0)}$!