PROVA 2 - TÓPICOS DE MATEMÁTICA APLICADA - MAP 2313

A prova é individual. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Boa Prova!

Exercício 1. (0,5 ponto) a) Ache soluções da forma $u(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, para o problema abaixo:

$$u''(x) + u'(x) - 2u(x) = 0.$$

(1,5 ponto) b) Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} u''(x) + u'(x) - 2u(x) &= f(x) \\ u(0) &= 0 \\ u'(0) &= 0 \end{aligned}$$

A solução desse problema pode ser escrita como $u(x) = \int_0^x G(x,y)f(y)dy$. Determine a função G.

Exercício 2. (0,5 ponto) a) Ache soluções da forma $u(x) = x^{\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, para o problema abaixo:

$$x^2u''(x) - 4xu'(x) + 6u(x) = 0 \quad .$$

(1,5 ponto) b) Considere o seguinte problema de valor no contorno:

$$\begin{aligned} x^2u''(x) - 4xu'(x) + 6u(x) &= f(x) \\ u(1) &= 0 \\ u(2) &= 0 \end{aligned}$$

A solução deste problema pode ser escrita como $u(x) = \int_1^2 G(x,y)f(y)dy$. Determine a função G.

Exercício 3. (1,5 ponto) a) Mostre que $\mathcal{F}\mathcal{F}f(x) = 2\pi f(-x)$. Similarmente, existem constantes a, b, c e d tais que $\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{F}f = a\hat{f}(b\xi)$ e $\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{F}f = cf(dx)$? Determine essas 4 constantes. (Dica: Use que $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = I$. Não é necessário fazer muitas contas!)

(1,5 ponto) b) Calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \in [-1,0] \\ 1-x, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [-1,1] \end{cases} \quad .$$

(1,0 ponto) c) Denote por $\mathcal{F}^{(n)}f$ a aplicação de n vezes da transformada de Fourier. Por exemplo: $\mathcal{F}^{(1)}f = \mathcal{F}f$, $\mathcal{F}^{(2)}f = \mathcal{F}\mathcal{F}f$, $\mathcal{F}^{(3)}f = \mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{F}f$, ... Calcule $\mathcal{F}^{(2020)}(f)$, ou seja, a aplicação de 2020 vezes de $\mathcal{F}$ na função f dada no item b). (Dica: Use o item a). São pouquíssimas contas!)

Exercício 4. (1,25 ponto) a) Considere a seguinte equação semelhante à de Laplace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) &= u(x,y),\ x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x),\ x \in \mathbb{R} \end{aligned} .$$

Aplique a transformada de Fourier na variável x e ache uma função $b : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}b(\xi,y)\hat{u}_0(\xi)d\xi.$$

(Observação: Ignore exponenciais que crescem muito rápido, assim como foi feito na aula para a equação de Laplace)

(0,75 ponto) b) Seja $c(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}b(\xi,y)d\xi$. Escreva a solução u como uma integral em $\mathbb{R}$ (não uma integral dupla!) cujo integrando depende de c e u_0 (não pode depender de $\hat{u}_0$ ou de b. Não precisa calcular explicitamente c).

Formulário

Fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)$, $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ e $\text{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

Abaixo todas as funções são bem comportadas, no sentido em que as operações abaixo estão bem definidas. (Por exemplo, as funções podem pertencer a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$).

Definição 5. A Transformada de Fourier $\mathcal{F}$ e a Transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}$ são definidas como

$$\begin{array}{c} \mathcal{F}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)dx \\ \mathcal{F}^{-1}\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)d\xi \end{array}.$$

Também denotamos a Transformada de Fourier por $\mathcal{F}f = \hat{f}$.

Definição 6. A convolução de duas funções é definida como

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

Proposição 7. *As seguintes propriedades da transformada de Fourier e da convolução são válidas:*

a) $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)) = f$

b) $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.

c) $\mathcal{F}^{-1}(fg) = \mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g)$.

d) $\mathcal{F}\left(\frac{df}{dx}\right)(\xi) = i\xi\mathcal{F}(f)(\xi)$.

e) $f * g = g * f$.

f) $\mathcal{F}(f(x-b))(\xi) = e^{-ib\xi}\mathcal{F}(f)(\xi)$, $b \in \mathbb{R}$.

g) $\mathcal{F}\left(e^{-icx}f(x)\right)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi + c)$, $c \in \mathbb{R}$.

Proposição 8. *(Funções de Green para Problemas de Valor Inicial)*

Considere o problema

$$\left\{\begin{array}{c} p_k(x)\frac{d^k u}{dx^k}(x) + p_{k-1}(x)\frac{d^{k-1}u}{dx^{k-1}}(x) + \ldots + p_0(x)u(x) = f(x) \\ u(0) = 0 \\ \vdots \\ u^{(k-1)}(0) = 0 \end{array}\right.,$$

em que $p_k(x) \neq 0$ para todo x e as funções p_j são contínuas.

Logo a função de Green do problema é dada por $G(x,y) = v_y(x)(H(x-y) - H(-y))$, em que v_y é solução de

$$\left\{\begin{array}{c} p_k(x)\frac{d^k v_y}{dx^k}(x) + p_{k-1}(x)\frac{d^{k-1}v_y}{dx^{k-1}}(x) + \ldots + p_0(x)v_y(x) = 0 \\ v_y(y) = 0 \\ \vdots \\ v_y^{(k-2)}(y) = 0 \\ v_y^{(k-1)}(y) = \frac{1}{p_k(y)} \end{array}\right..$$

Proposição 9. *(Funções de Green para Problemas de Valor de Contorno)*

Considere o problema

$$\left\{\begin{array}{c} p_2(x)\frac{d^2u}{dx^2}(x) + p_1(x)\frac{du}{dx}(x) + p_0(x)u(x) = f(x) \\ \alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0 \\ \beta u(b) + \beta' u'(b) = 0 \end{array}\right.,$$

em que $(\alpha,\alpha') \neq (0,0)$, $(\beta,\beta') \neq (0,0)$ e $p_2(y) \neq 0$ para todo y e as funções p_j são contínuas

Suponha que o problema satisfaça a condição (H) definida abaixo:

Condição (H): O problema $\left\{\begin{array}{c} p_2(x)\frac{d^2u}{dx^2}(x) + p_1(x)\frac{du}{dx}(x) + p_0(x)u(x) = 0 \\ \alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0 \\ \beta u(b) + \beta' u'(b) = 0 \end{array}\right.$ *não tem soluções não nulas.*

Logo a função de Green do problema é dada por $G(x,y) = \left\{\begin{array}{l} \frac{v_1(x)v_2(y)}{p_2(y)W(y)},\ x < y \\ \frac{v_1(y)v_2(x)}{p_2(y)W(y)},\ x > y \end{array}\right.$, *em que $W(y) = v_1(y)v_2'(y) - v_1'(y)v_2(y)$, v_1 e v_2 são soluções não nulas das equações abaixo:*

$$\left\{\begin{array}{c} p_2(x)\frac{d^2v_1}{dx^2}(x) + p_1(x)\frac{dv_1}{dx}(x) + p_0(x)v_1(x) = 0 \\ \alpha v_1(a) + \alpha' v_1'(a) = 0 \end{array}\right. \quad e \quad \left\{\begin{array}{c} p_2(x)\frac{d^2v_2}{dx^2}(x) + p_1(x)\frac{dv_2}{dx}(x) + p_0(x)v_2(x) = 0 \\ \beta v_2(b) + \beta' v_2'(b) = 0 \end{array}\right..$$