

Aula 26: Metrizabilidade

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1º Semestre de 2023 - Curso de Topologia

Normalmente, saber que um determinado espaço topológico na verdade é um espaço métrico é muito útil: espaços métricos costumam ter propriedades bem mais específicas que espaços topológicos gerais.

Existem critérios gerais para se dizer se um espaço topológico admite ou não uma métrica.

Para nos manter no caso mais simples (e mais usado), vamos apresentar uma caracterização para os espaços separáveis que admite uma métrica.

Teremos também algumas condições para que exista uma métrica sobre o espaço que seja completa.

Finalmente, vamos mostrar que uma classe de espaços que num primeiro momento poderia parecer ampla, na verdade se reduz aos espaços homeomorfos a um bem conhecido exemplo:

$\mathbb{Q}$.

Definição 1

Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que (X, τ) é metrizável, se existe uma métrica d sobre X de forma que τ e a topologia induzida por d são iguais.

Vamos começar com alguns casos simples de quando podemos concluir que um espaço topológico tem uma métrica associada. Também vamos ver alguns critérios para ver se podemos tomar tal métrica completa.

No que se segue, convém lembrar do resultado do Exercício 1.4.15 que diz que, para todo espaço métrico completo (X, d) , existe $\bar{d}$ métrica completa limitada por 1 que é equivalente a d ($\bar{d}(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$).

O próximo resultado basicamente diz que existe uma métrica no produto enumerável de métricos que induz a topologia produto. Além disso, podemos tomar tal métrica completa se cada um dos espaços for completo:

Proposição 2

Sejam $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$ espaços métricos tais que cada d_n é limitada por 1. Então

$d : \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$$

é uma métrica sobre $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ que induz a topologia produto sobre $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Além disso, se cada d_n for completa, então d é completa.

Demonstração. Exercício.

Corolário 3

Existe uma métrica completa sobre $[0, 1]^{\mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} [0, 1]$ que induz a topologia produto deste espaço.

Demonstração. Segue diretamente da proposição anterior e do fato de $[0, 1]$ com a métrica usual ser completo.

Teorema 4

Seja (X, τ) espaço T_1 . São equivalentes:

- (a) X é T_3 e tem base enumerável;
- (b) X é separável e metrizável;
- (c) X é homeomorfo a um subespaço de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Demonstração. Claramente $(b \Rightarrow a)$, já que X ser metrizável implica em ser regular e, para espaços métricos, ser separável implica a existência de base enumerável.

$(c \Rightarrow a)$ – não é preciso Note que $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ tem base enumerável (pois é produto enumerável de espaços com base enumerável) e é regular (produto de regulares é regular). Logo, (X, τ) tem tais propriedades, pois ambas são preservadas para subespaços.

($c \Rightarrow b$) Como $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ tem base enumerável, X também tem. Logo X é separável. Note que subespaço de métrico é metrizável.

($a \Rightarrow c$) Sejam $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base para X e $C = \{(m, n) : \overline{B_m} \subset B_n\}$. Note que (X, τ) é normal (espaço regular com base enumerável é normal). Para cada $(m, n) \in C$, seja $f_{m,n} : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f_{m,n}(\overline{B_m}) = \{0\}$ e $f_{m,n}(X \setminus B_n) = \{1\}$ (cuja existência se deve à normalidade). Seja $\mathcal{F} = \{f_{m,n} : (m, n) \in C\}$. Note que $\mathcal{F}$ separa pontos de fechados. De fato, seja $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tal que $x \notin F$. Seja B_n um aberto da base tal que $x \in B_n \subset X \setminus F$. Como X é regular, existe B_m tal que $x \in B_m \subset \overline{B_m} \subset B_n$. Note que $f_{m,n}$ é tal que $f_{m,n}(x) = 0$ e $f_{m,n}(F) = \{1\}$. Pelo Teorema da Imersão, X é homeomorfo a um subespaço de $[0, 1]^{\mathcal{F}}$, mas como $\mathcal{F}$ é enumerável, segue que X é homeomorfo a um subespaço de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Agora vamos analisar quando a métrica encontrada pode ser completa. Aqui vamos fazer um processo diferente do completamento de espaços métricos.

Lá, estendemos o espaço e a métrica até fazer com que o total fique completo. Aqui, vamos trocar a métrica por uma equivalente, mas que seja completa.

Definição 5

Seja (X, τ) espaço topológico. Dizemos que (X, τ) é completamente metrizável se ele é homeomorfo a um espaço métrico completo. Dito de outra forma, se existe uma métrica completa d sobre X , de forma que τ é a topologia induzida por d .

Exemplo 6

O espaço $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ com a métrica usual não é completo, mas é um espaço completamente metrizável pois a métrica discreta (que é equivalente à usual) é equivalente a esta.

Enquanto subespaços fechados de métricos completos são métricos completos (ver Exercício 2 a seguir), os subespaços abertos são completamente metrizáveis:

Proposição 7

Sejam (X, d) espaço métrico completo e $A \subset X$ aberto. Então A é completamente metrizável.

Demonstração. Considere $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = d(x, X \setminus A)$. Note que g é contínua e, para todo $a \in A$, $g(a) > 0$ (pois A é aberto). Assim, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(a) = \frac{1}{g(a)}$ é contínua e positiva. Considere então $G = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset X \times \mathbb{R}$. Vamos mostrar que G é completo. Para isso, basta mostrar que G é fechado em $X \times \mathbb{R}$. Definindo $l : X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $l(x, y) = y \cdot g(x)$ (que é contínua), vemos que

$$G = \{(x, y) : y \cdot g(x) = 1\} = l^{-1}(\{1\}).$$

Isto é, G é a imagem inversa de um fechado via função contínua, logo G é fechado, como queríamos.

Por fim, note que $h : A \rightarrow G$ definida por $h(x) = (x, f(x))$ é um homeomorfismo:

h é claramente bijetora; por ser contínua nas coordenadas, segue que h é contínua; a inversa de h é a projeção $\pi : G \rightarrow A$ dada por $\pi((x, f(x))) = x$, que é contínua por ser restrição de π_X . Portanto, A é completamente metrizável.

Podemos melhorar ainda mais o resultado anterior:

Teorema 8

Todo G_δ (interseção enumerável de abertos) num espaço métrico completo é completamente metrizável.

Demonstração. Sejam (X, d) espaço métrico completo e $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, onde cada A_n é aberto em X . Seja d_n métrica completa equivalente a d sobre A_n (métricas são equivalente se induzem a mesma topologia). Podemos supor d_n limitada por 1. Assim, existe uma métrica completa sobre $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$ que induz a topologia produto. Considere

$$\Delta = \left\{ (a, \dots, a, \dots) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n : a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right\}.$$

Note que Δ é fechado em $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$ (por ser T_2). Logo, Δ é métrico completo. Note que $f : \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \rightarrow \Delta$ dada por $f(a) = (a)_{n \in \mathbb{N}}$ é um homeomorfismo. Portanto, G é completamente metrizável.

Com isso, obtemos facilmente um resultado bastante contra intuitivo:

Corolário 9

Existe uma métrica completa equivalente à usual sobre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Demonstração. Note que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{R} \setminus \{q\}$ é um G_δ e, portanto o resultado segue pelo teorema anterior.

Exercícios

1. Sejam $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ espaços métricos completos. Mostre que $X_1 \times X_2$ com a métrica $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$ é métrico completo.
2. Seja (X, d) um espaço métrico completo. Mostre que $F \subset X$ é completo se, e somente se, é fechado.
3. Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos completos. Seja $F \subset X$ fechado e $A \subset Y$ aberto. Mostre que $F \times A$ é completamente metrizável.
4. Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é uma isometria se, para todo $a, b \in X$, $d(a, b) = d'(f(a), f(b))$.
 - (a) Mostre que toda isometria é um homeomorfismo sobre sua imagem.
 - (b) Considere $\mathbb{P} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Considere d a métrica usual em $\mathbb{P}$ e considere d' a métrica obtida a partir do Corolário 9. Mostre que a função identidade id de $(\mathbb{P}, d)$ em $(\mathbb{P}, d')$ é um homeomorfismo mas não é uma isometria.
5. Mostre que todo métrico separável (X, d) está contido num métrico compacto (Y, d') (não necessariamente a métrica d é uma restrição de d' , mas essas duas métricas são equivalentes em X).

6. Mostre que “ser metrizável” é um invariante topológico.
7. Mostre que “ser completamente metrizável” é um invariante topológico.

Existem poucos métricos enumeráveis

O objetivo dessa seção é mostrar que, do ponto de vista topológico, só existe um único espaço métrico enumerável sem pontos isolados. Vamos obter tal resultado como consequência de um teorema mais geral.

Lembremos que $B_{q,k} = [q - \varepsilon_k, q + \varepsilon_k] \cap \mathbb{Q} = (q - \varepsilon_k, q + \varepsilon_k) \cap \mathbb{Q}$, com $q \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon_k = \frac{\sqrt{2}}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, formam uma base de abertos fechados para $\mathbb{Q}$ (com a topologia usual, aquela induzida de $\mathbb{R}$).

No teorema a seguir, considere $A = X = \mathbb{Q}$ e $B = Y$ um espaço T_0 sem pontos isolados, zerodimensional, com base enumerável, e também enumerável. O teorema a seguir garante que Y é homeomorfo a $\mathbb{Q}$.

Teorema 10

Sejam X e Y dois espaços T_0 , sem pontos isolados, zero-dimensionais (base formada por abertos fechados) e com bases enumeráveis. Sejam A, B densos enumeráveis de X e Y respectivamente. Então existe $f : A \rightarrow B$ homeomorfismo. Além disso, se Y for compacto, f admite uma (única) extensão $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ injetora. Finalmente, se X também for compacto, $\tilde{f}$ é um homeomorfismo.

Demonstração. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases enumeráveis para X e Y formadas por abertos fechados. Podemos supor que tais bases são fechadas por uniões finitas e por complementares. Dado um conjunto W qualquer, vamos dizer que P é uma partição se P é uma cobertura de W feita por conjuntos dois a dois disjuntos. Dado $w \in W$, vamos indicar por $P(w)$ o único conjunto de P que contém w . Um subconjunto $E \subset W$ é uma escolha de P se para todo $J \in P$ existe um único $w \in E$ tal que $w \in J$.

Vamos chamar de uma condição uma tripla (P, Q, f) satisfazendo:

- (a) P é uma partição finita de X feita por abertos fechados de $\mathcal{B}$;
- (b) Q é uma partição finita de Y feita por abertos fechados de $\mathcal{C}$;
- (c) f é uma função finita com domínio contido em A e contradomínio B ;
- (d) $\text{dom}(f)$ é uma escolha para P ;
- (e) $\text{Im}(f)$ é uma escolha para Q .

Vamos dizer que (P_2, Q_2, f_2) estende (P_1, Q_1, f_1) se

- (a) P_2 refina P_1 ;
- (b) Q_2 refina Q_1 ;
- (c) f_2 estende f_1 ;
- (d) dados $x, y \in \text{dom}(f_2)$, $x \in P_1(y)$ se, e somente se, $f_2(x) \in Q_1(y)$.

De forma bastante parecida com o que foi feito no Teorema 3.4.12, usamos o seguinte lema para encontrar a função desejada:

Teorema 3.4.12. *Todo conjunto enumerável, totalmente ordenado com uma ordem densa e sem maior nem menor elementos é isomorfo (e, portanto, homeomorfo) a $\mathbb{Q}$.*

Lema 11

Dada uma condição (P_1, Q_1, f_1) , podemos fazer as seguintes extensões:

1. *dado $a \in A$, existe uma condição (P_2, Q_2, f_2) tal que $a \in \text{dom}(f_2)$;*
2. *dado $b \in B$, existe uma condição (P_2, Q_2, f_2) tal que $b \in \text{Im}(f_2)$;*
3. *dado $B \in \mathcal{B}$, existe uma condição (P_2, Q_2, f_2) tal que B é união de elementos de P_2 ;*
4. *dado $C \in \mathcal{C}$, existe uma condição (P_2, Q_2, f_2) tal que C é união de elementos de Q_2 .*

A demonstração do lema fica como exercício.

Enumere $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}, \mathcal{C} = \{C_n : n \in \mathbb{N}\}, A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Fixe a condição $(\{X\}, \{Y\}, f)$ onde $f : \{a\} \rightarrow B$ é dada por $f(a) = b$ ($a \in A, b \in B$ fixados arbitrariamente). Note que aplicando o lema, podemos construir indutivamente uma sequência de condições de forma que, para todo $n \in \mathbb{N}$:

- (a) (P_1, Q_1, f_1) estende (P, Q, f) ;
- (b) $(P_{n+1}, Q_{n+1}, f_{n+1})$ estende (P_n, Q_n, f_n) ;
- (c) $a_n \in \text{dom}(f_n), b_n \in \text{Im}(f_n)$;
- (d) B_n é união de elementos de P_n ;
- (e) C_n é união de elementos de Q_n .

Como $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formam uma cadeia de funções parciais de A em B compatíveis entre si, existe uma extensão f comum a todas. Tal extensão é uma função bijetora entre A e B . Pela construção, também temos que, dados $U \in \mathcal{B}$ e $V \in \mathcal{C}$, existem m, n tais $f^{-1}(V \cap B) = B_n \cap A$ e $f(U \cap A) = C_m \cap B$. Assim, f é um homeomorfismo.

Pela construção acima, note que na verdade temos uma função $H : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ bijetora tal que $H(U) = V$, onde $f(U \cap A) = V \cap B$. Suponha agora que Y é compacto. Para cada $x \in X$ considere

$$T_x = \{H(U) : x \in U, U \in \mathcal{B}\}$$

Note que cada $H(U)$ é compacto. Pode-se mostrar que $\bigcap_{H \in T_x} H$ é um unitário $\{y\}$ (a parte do não vazio é por ser intersecção de compactos com a propriedade da intersecção finita - já a parte de ter no máximo um ponto segue de ser T_0). Defina $\tilde{f}(x) = y$. Essa função é contínua e injetora (exercício). Se tivermos que X também é compacto, como a imagem de $\tilde{f}$ também será compacta, tal imagem terá que ser Y , pois contém o denso C .

Corolário 12

A menos de homeomorfismos, existe um único espaço métrico enumerável sem pontos isolados — o espaço $\mathbb{Q}$.

Demonstração. Se tivermos que os espaços em questão são zerodimensionais, basta aplicar o teorema anterior. Mas isso é exatamente a consequência do Exercício 1 a seguir.

1. Seja (X, d) um espaço métrico enumerável sem pontos isolados. Mostre que para $x \in X$ existe uma sequência (r_n) de números positivos, estritamente decrescente, convergente para zero, tal que $B(x, r_n) = B[x, r_n]$. Portanto, (X, d) é zero-dimensional.
2. Mostre que todo espaço compacto, zero-dimensional, com base enumerável e sem pontos isolados é homeomorfo a $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (considere $\{0, 1\}$ com a topologia discreta) (Note que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ é não enumerável).
3. Mostre que o conjunto A das sequências $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ essencialmente constantes (a partir de um certo índice é constante igual a zero ou constante igual a 1) é um subconjunto enumerável e denso de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.