Aula 22: Componentes e conexidade por caminhos

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1^o **Semestre de 2023 - Curso de Topologia**

Um conceito que ajuda bastante na hora de trabalhar com conexos é a componente conexa.

Definição 1

Sejam (X, τ) espaço topológico e $x \in X$. Definimos a componente conexa de x como $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ onde $\mathcal{A} = \{A \subset X : x \in A$ e A é conexo $\}$.

Note que todo conjunto unitário é conexo.

Pela Proposição 12 da Aula 18, temos que a componente conexa de x é sempre conexa.

Desta forma, é fácil ver que a componente conexa de x é o maior (no sentido da inclusão) subconjunto conexo de X contendo x.

Algo que não é tão óbvio a partir da definição é que as componentes conexas são sempre fechadas. Isto é tratado na proposição a seguir.

Proposição 2

Componentes conexas são fechadas.

Demonstração. Seja C_x componente conexa para $x \in X$. Temos por definição $C_x \subset \overline{C_x}$. Como C_x é conexo, temos que $\overline{C_x}$ é conexo (e contém x). Logo $\overline{C_x} \subset C_x$

Uma ideia que se poderia ter para se definir conexidade seria a "existência de caminhos" entre pontos. Essa ideia pode ser formalizada da seguinte maneira.

Definição 3

Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que (X, τ) é conexo por caminhos se, para quaisquer $x, y \in X$, existir $f : [0, 1] \to X$ contínua tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$. Neste caso, dizemos que f é um caminho de x para y.

A conexidade por caminhos implica na conexidade.

Proposição 4

Se (X, τ) é conexo por caminhos, então (X, τ) é conexo.

Demonstração. Pela Proposição 12 da Aula 18, basta mostrarmos que, para quaisquer $x, y \in X$, existe C conexo tal que $x, y \in C$. De fato, sejam $x, y \in X$ distintos. Como X é conexo por caminhos, existe $f : [0, 1] \to X$ contínua tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$. Note que $f\Big([0, 1]\Big)$ é conexo (por f ser contínua e $[0, 1]$ ser conexo) e $x, y \in f\Big([0, 1]\Big)$.

A volta do resultado anterior não vale em geral.

Exemplo 5 (Espaço Pente)

Espaço conexo que não é conexo por caminhos.

Considere $A = \left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}_{\geq 0}, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}_{>0}\}$ e $B = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}_{>0}\}$.

Note que tanto A quanto B são conexos por caminhos, logo, A e B são conexos.

Considere $X = A \cup B$.

Fato: X é conexo.

Note que $B \subset \bar{A}$ e, portanto, $A \subset A \cup B \subset \bar{A}$. Logo, como A é conexo, temos o resultado pela Proposição 13 da Aula 18.

Fato: X não é conexo por caminhos.

Suponha que exista $f : [0,1] \to X$ contínua tal que $f(0) = (0,1)$ e $f(1) = (1,1)$. Considere $\alpha = \sup\{x \in [0,1] : f\Big([0,x]\Big) \subset B\}$. Temos dois casos:

- $f(\alpha) \in A$.

  Seja $r > 0$ tal que $B_r(f(\alpha)) \cap B = \emptyset$ (o que é possível pois $B \cup \{(0,0)\}$ é fechado em $\mathbb{R}^2$). Como f é contínua, existe V vizinhança de α tal que $f(V) \subset B_r(f(\alpha))$. Note que existe $\varepsilon > 0$ tal que $(\alpha - \varepsilon, \alpha) \subset V$. Pela definição de α, $f\Big((\alpha - \varepsilon, \alpha) \Big) \cap B \neq \emptyset$, contradição.

- $f(\alpha) \in B$.

  Seja $r > 0$ tal que $(0,0) \notin B_r(f(\alpha))$. Note que $\alpha < 1$. Como f é contínua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f\Big([\alpha, \alpha + \varepsilon)\Big) \subset B_r(f(\alpha))$. Pela definição de α, existe $\beta \in (\alpha, \alpha + \varepsilon)$ tal que $f(\beta) \in A$. Assim:

  - $f\Big([\alpha, \alpha + \varepsilon)\Big)$ é um conexo.
  - A e B são abertos de X.
  - $U = f\Big([\alpha, \alpha + \varepsilon)\Big) \cap A$ e $V = f\Big([\alpha, \alpha + \varepsilon)\Big) \cap B$ são dois abertos de $f\Big([\alpha, \alpha + \varepsilon)\Big)$.
  - $f(\alpha) \in B$ e $f(\beta) \in A$
  - $f\Big([\alpha, \alpha + \varepsilon)\Big) = U \cup V$

  Contradição!

Proposição 6

Sejam $(X,\tau),(Y,\sigma)$ espaços topológicos e $f : X \to Y$ função contínua e sobrejetora. Se (X,τ) é conexo por caminhos, então (Y,σ) é conexo por caminhos.

Demonstração. Sejam $a, b \in Y$ e $\alpha, \beta \in X$ tais que $f(\alpha) = a$ e $f(\beta) = b$. Seja $h : [0,1] \to X$ contínua tal que $h(0) = \alpha$ e $h(1) = \beta$. Então $f \circ h : [0,1] \to Y$ é uma função contínua tal que $(f \circ h)(0) = a$ e $(f \circ h)(1) = b$.

Exercícios - Componentes e conexidade por caminhos

1. Mostre que "ser conexo por caminhos" é um invariante topológico.
2. Mostre que se existe um caminho de x para y, existe um caminho de y para x.
3. Mostre que se existe um caminho de x para y e um caminho de y para z, então existe um caminho de x para z.
4. Considere a relação $x \sim y$ dada por "existe um caminho de x para y".
   (a) Mostre que tal relação é uma relação de equivalência. Note que, fixado x, o conjunto $\{y :$ existe um caminho de x para $y\}$ é exatamente o conjunto dos y 's equivalentes a x por $\sim$. Chamamos tal conjunto de componente conexa por caminhos de x.
   (b) A componente conexa por caminhos de um ponto é sempre fechada? Não. Veja o Espaço Pente.
5. Mostre que, dado $q \in \mathbb{Q}$, a componente conexa de q é $\{q\}$ (dentro do espaço $\mathbb{Q}$ com a topologia induzida).
6. Mostre que se um espaço tem uma quantidade finita de componentes conexas, então cada componente conexa é aberta.