Experimento II - Óptica ondulatória - Análise de imagens

Objetivos do experimento

- Investigar a natureza ondulatória da luz através do estudo da difração e interferência
- Estudar a difração de objetos bi-dimensionais
- Estudar a difração como uma transformada de Fourier
- Construir um computador óptico

O que é um computador óptico?

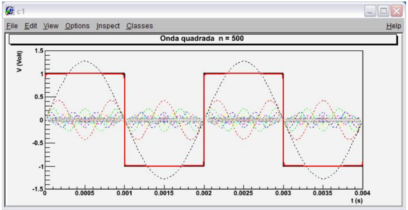
- Computador óptico é um dispositivo que permite a manipulação de uma imagem de maneira “analógica”, controlada, sem a necessidade de efetuar cálculos complicados
- Esse dispositivo pode e vai ser construído e estudado no laboratório: o desafio do experimento é entender os princípios de funcionamento e aplicá-los em alguns casos

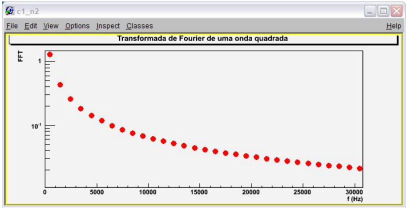
Transformada de Fourier unidimensional

- No caso unidimensional, a TF de uma função é:

$$y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-j\omega t} dt$$

- O gráfico de TF mostra a amplitude (y) para cada frequência que compõe o sinal unidimensional





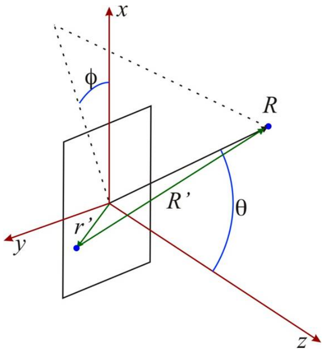
Generalizando a difração de Fraunhofer

- Atividade 1 do experimento II
- A expressão para o campo

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dxdy$$

- Com:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{cases} k_x = k\mathrm{sen}\theta\cos\phi \\ k_y = k\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\phi \end{cases}$$



Séries de Fourier

- Joseph Fourier, paper submetido em 1807
  - Referees: Lagrange, Laplace, Malus e Legendre
  - Funções trigonométricas podem ser combinadas de tal forma a representar qualquer função matemática

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_n \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right]$$

  - As constantes a_n e b_n podem ser obtidas a partir de

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx$$

Séries de Fourier

- Hoje em dia, usamos formalismos mais abrangentes

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_n \left[a_n \cos(nx) + b_n \mathrm{sen}(nx)\right]$$

- Substituindo a fórmula de Euler $e^{jx} = \cos x + j \mathrm{sen} x$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnx}$$

- com

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-jnx} dx$$

Séries de Fourier

- Hoje em dia, usamos formalismos mais abrangentes

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_n \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right]$$

- Substituindo a fórmula de Euler $e^{jx} = \cos x + j \operatorname{sen} x$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnx}$$

- com

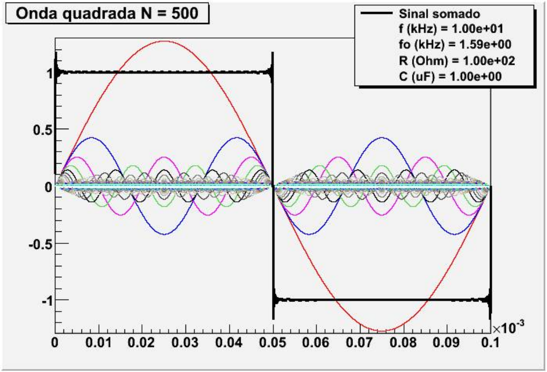
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-jnx} dx$$

- As constantes a_n e b_n da expressão tradicional podem ser obtidas como:

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad \text{e} \quad b_n = j(c_n - c_{-n}) \quad \text{com} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Exemplo: onda quadrada

$$V(t) = V_0 \left[\frac{4}{\pi} \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{4}{3\pi} \operatorname{sen}(3\omega t) + \frac{4}{5\pi} \operatorname{sen}(5\omega t) + \cdots \right]$$



Séries de Fourier em 2D

- Transformada de fourier em 2D

$$f(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{j(nx+my)}$$

$$c_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) e^{-j(nx+my)} dxdy$$

Séries de Fourier em 2D

- Transformada de fourier em 2D

$$f(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{j(nx+my)}$$

$$c_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) e^{-j(nx+my)} dxdy$$

- Vamos comparar com a difração

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x,y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dxdy$$

Séries de Fourier em 2D

- Transformada de fourier em 2D

$$f(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{j(nx+my)}$$

$$c_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) e^{-j(nx+my)} dxdy$$

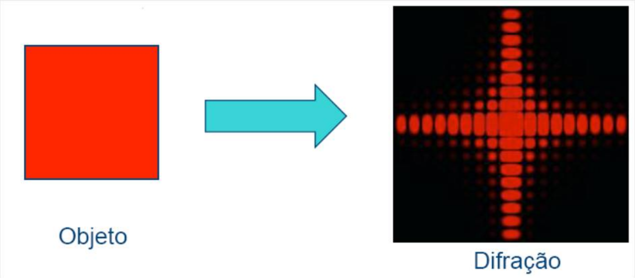
- Vamos comparar com a difração

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x,y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dxdy$$

Difração e transformada de Fourier

- A figura de difração está relacionada à TF do objeto iluminado

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x,y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dxdy$$



Frequências espaciais

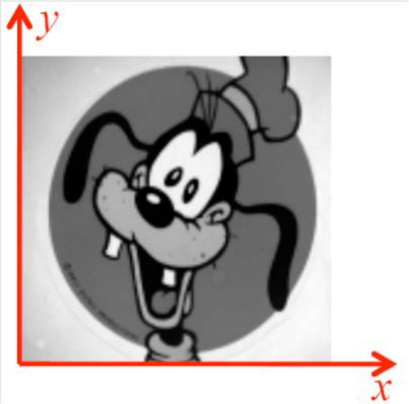
- A intensidade luminosa em uma dada posição está relacionada às intensidades para cada frequência espacial

$$\hat{E}(\vec{R}) \rightarrow E(R_x, R_y) \rightarrow E(k_x, k_y)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \begin{cases} k_x = k\mathrm{sen}\theta\cos\phi \\ k_y = k\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\phi \end{cases}$$

Transformada de Fourier de uma imagem

- Seja uma imagem bidimensional qualquer. Para simplificar, vamos pensar em uma imagem monocromática
- Podemos representar qualquer ponto na imagem por uma intensidade luminosa $I(x, y)$

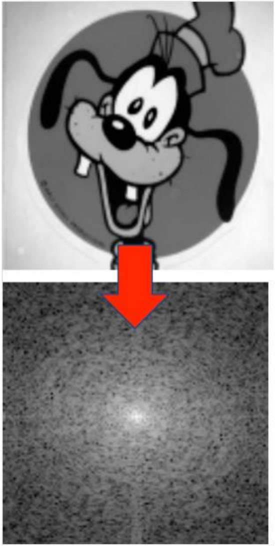


Transformada de Fourier de uma imagem

- No caso bidimensional, basta decompor em duas frequências, uma para cada dimensão da imagem

$$c_{nm} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} I(x,y)\mathrm{e}^{-j(nx+my)}\,dx\,dy$$

- Neste caso, ao invés de fazer um gráfico unidimensional, a transformada de Fourier corresponde a um gráfico bidimensional cujo valor no 3º eixo corresponde a c_{nm}.

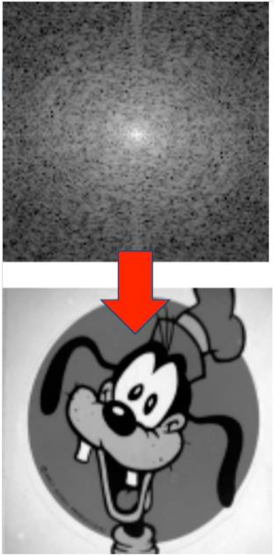


Transformada de Fourier inversa

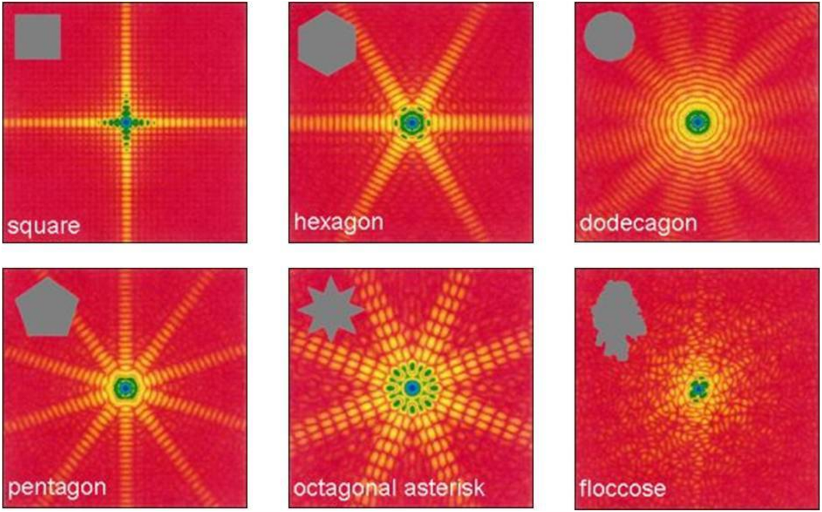
- Se conhecemos c_{nm}, podemos recuperar a informação de intensidade espacial através de

$$I(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{j(nx+my)}$$

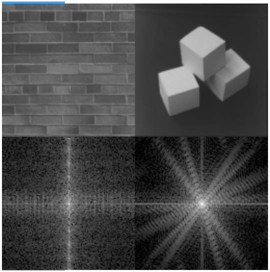
- Isto é chamado transformada de Fourier inversa e nada mais é que a transformada da transformada de Fourier (mas note o sinal trocado na exponencial)

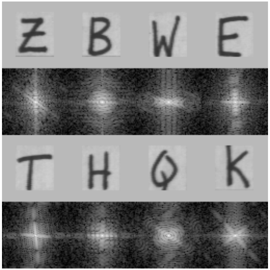


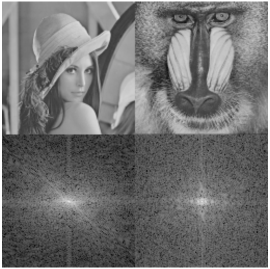
Difração em orifícios = Transformada de Fourier do orifício



Mais algumas transformadas de Fourier



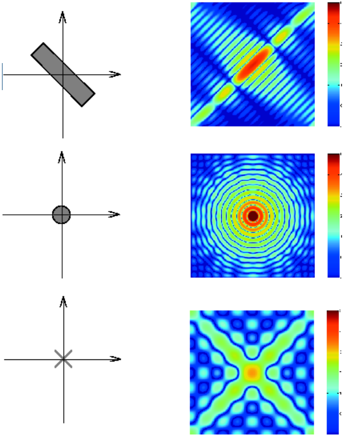




Imagens do site: http://www.cs.unm.edu/~brayer/vision/fourier.html

Padrões possuem estruturas evidentes

- Em uma foto, em geral, há padrões bem definidos que aparecem de forma clara na TF
- Dependendo da imagem, é mais fácil remover o padrão da TF do que da própria foto

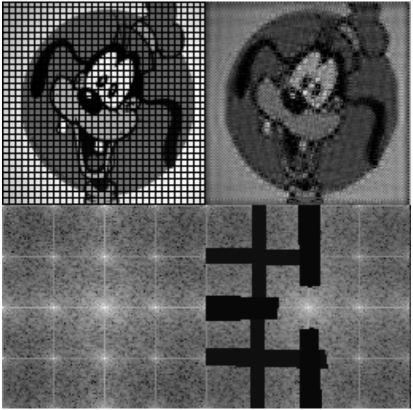


Uso de transformadas de Fourier como método de edição de imagens

- Em algumas circunstâncias, o uso da TF pode ser bastante útil na edição de imagens
- Por exemplo:
  - Remoção de ruídos e artefatos
    - Quando estes possuem frequência muito bem definida, sendo bem localizada na TF
  - Remoção de padrões
    - Por exemplo, uma cerca pode ter um padrão de frequências bem definido
  - Filtros de efeitos especiais
    - A remoção de algumas frequências pode criar efeitos interessantes

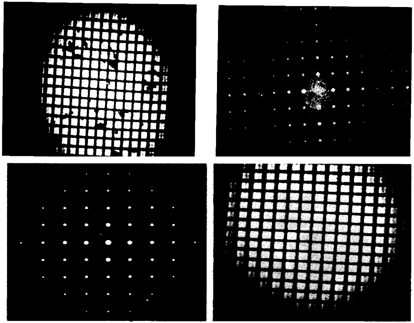
Alguns exemplos

- Filtro para fazer contorno
  - Removem-se as baixas frequências
- Aumento de contraste
  - Ampliam-se as altas frequências, que amplificam as bordas
- Remoção de sombras
  - A sombra possui estrutura muito característica em frequência
- Outros métodos
  - Por exemplo, remoção de uma estrutura espúria



Um outro exemplo: impurezas em uma grade

- Grade com sujeiras
- Filtro para observar somente a grade



Um outro exemplo: impurezas em uma grade

- Grade com sujeiras
- Filtro para observar somente a sujeira

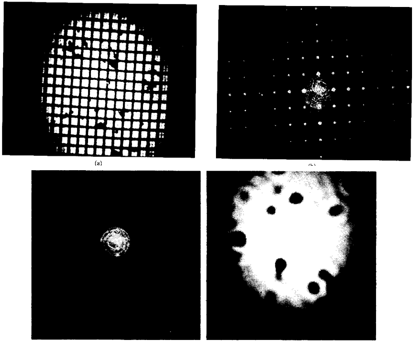
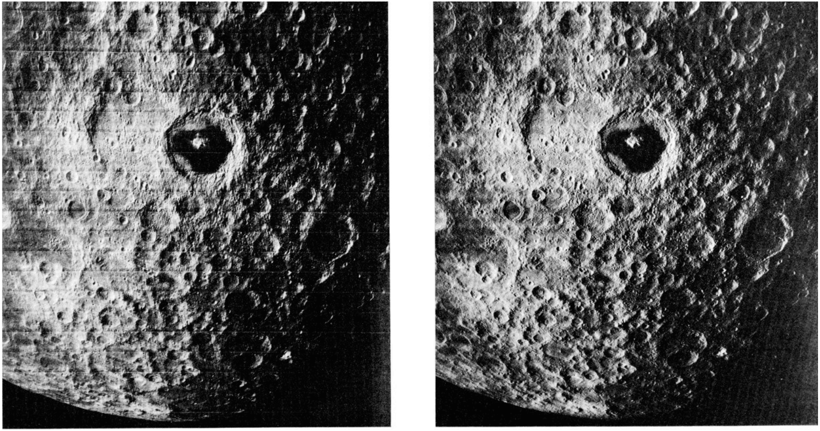


Foto da lua antes e depois de filtragem



Atividades do experimento

- Utilizar o programa ImageJ para o processamento das imagens
  - Obter a transformada de Fourier dos objetos propostos, e, através dela, determinar as dimensões dos mesmos
  - Usando filtros apropriados na transformada de Fourier, processar a imagem de alguns objetos com a finalidade de obter os efeitos desejados nas imagens finais.

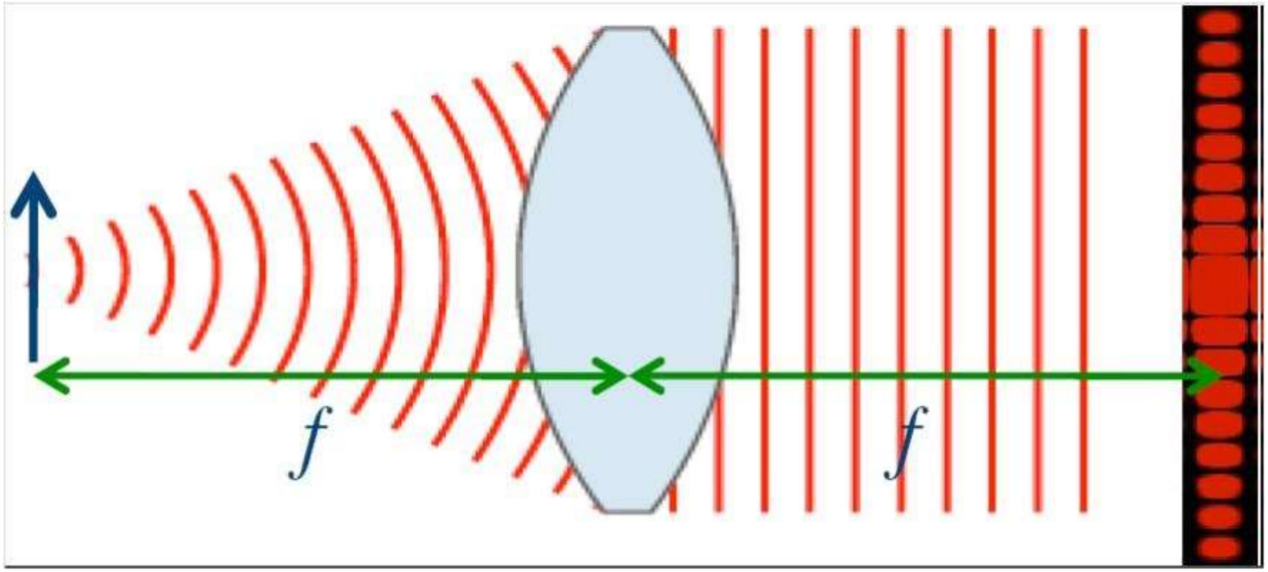
Atividades do experimento

Para cada atividade deve ser apresentado

- A imagem inicial
- A transformada de Fourier da imagem
- Nos casos quantitativos
  - Indicar os pontos que foram utilizados para determinar as dimensões pedidas e como foi feita a análise
- No caso de filtragem de imagens
  - A imagem do filtro e porque esse filtro será adequado para o que se quer
  - A imagem depois do filtro
- Comente os resultados
- Será levada em conta a qualidade das imagens filtradas, quando for o caso.

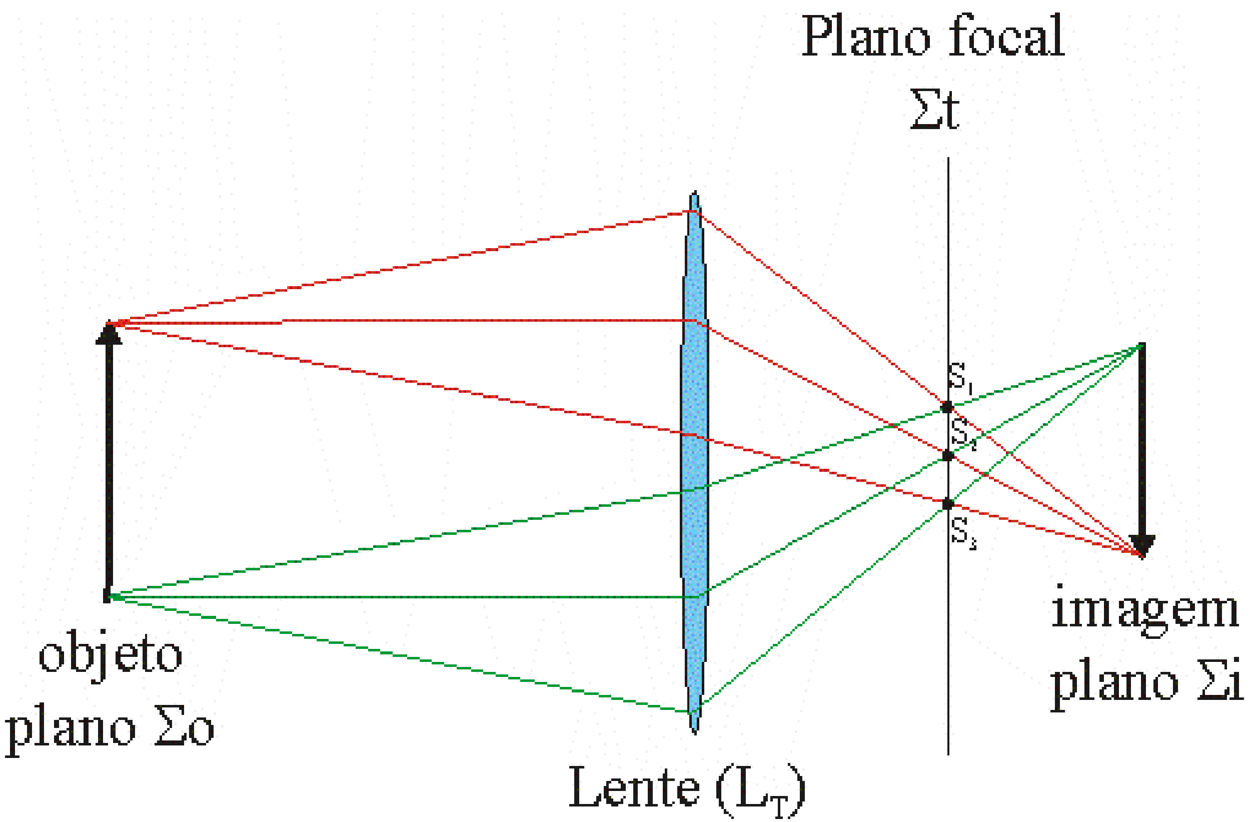
A lente no formalismo de Fourier

- No formalismo de Fourier, colocando um objeto no plano focal de uma lente, a figura no plano focal corresponde `a transformada de Fourier (figura de difração) do objeto



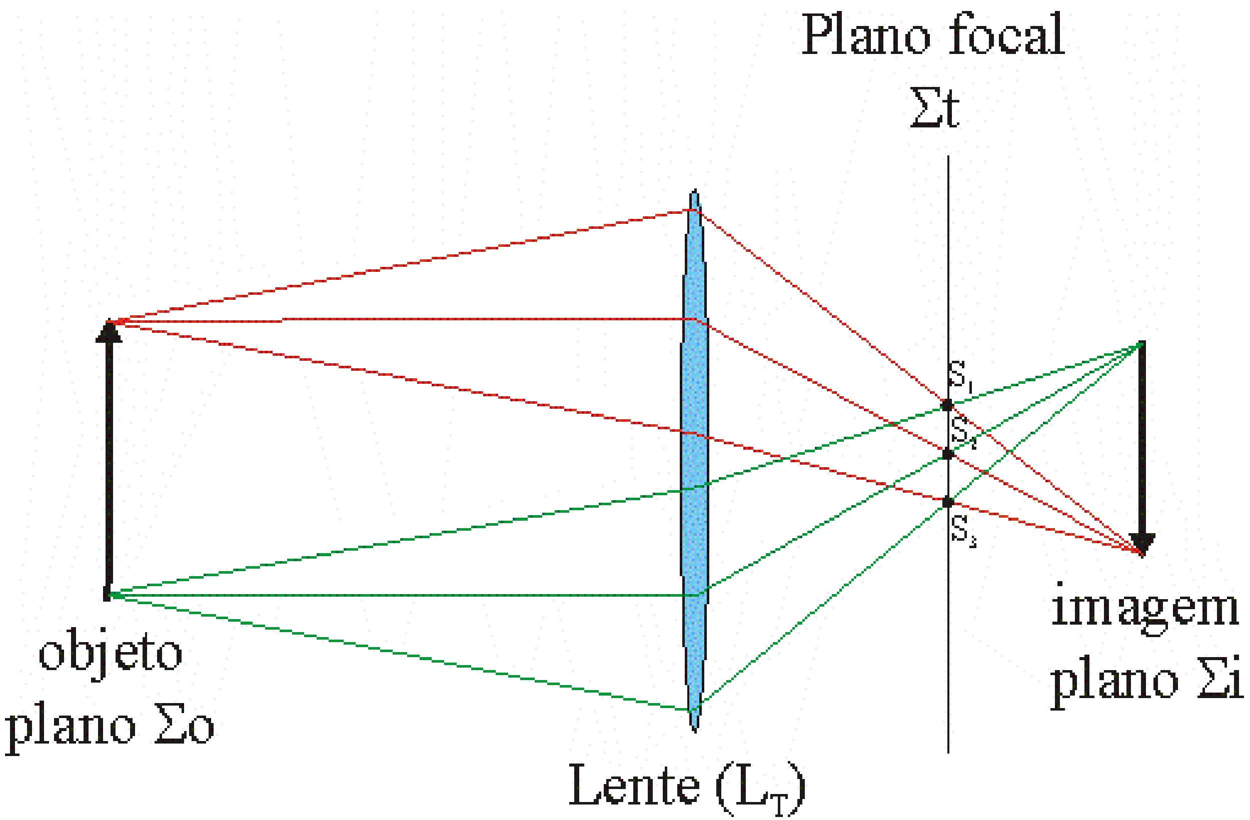
Princípios do computador óptico: Formação da imagem de uma lente

- Seja a imagem formada por uma lente simples. Definimos três planos, conforme a figura abaixo:



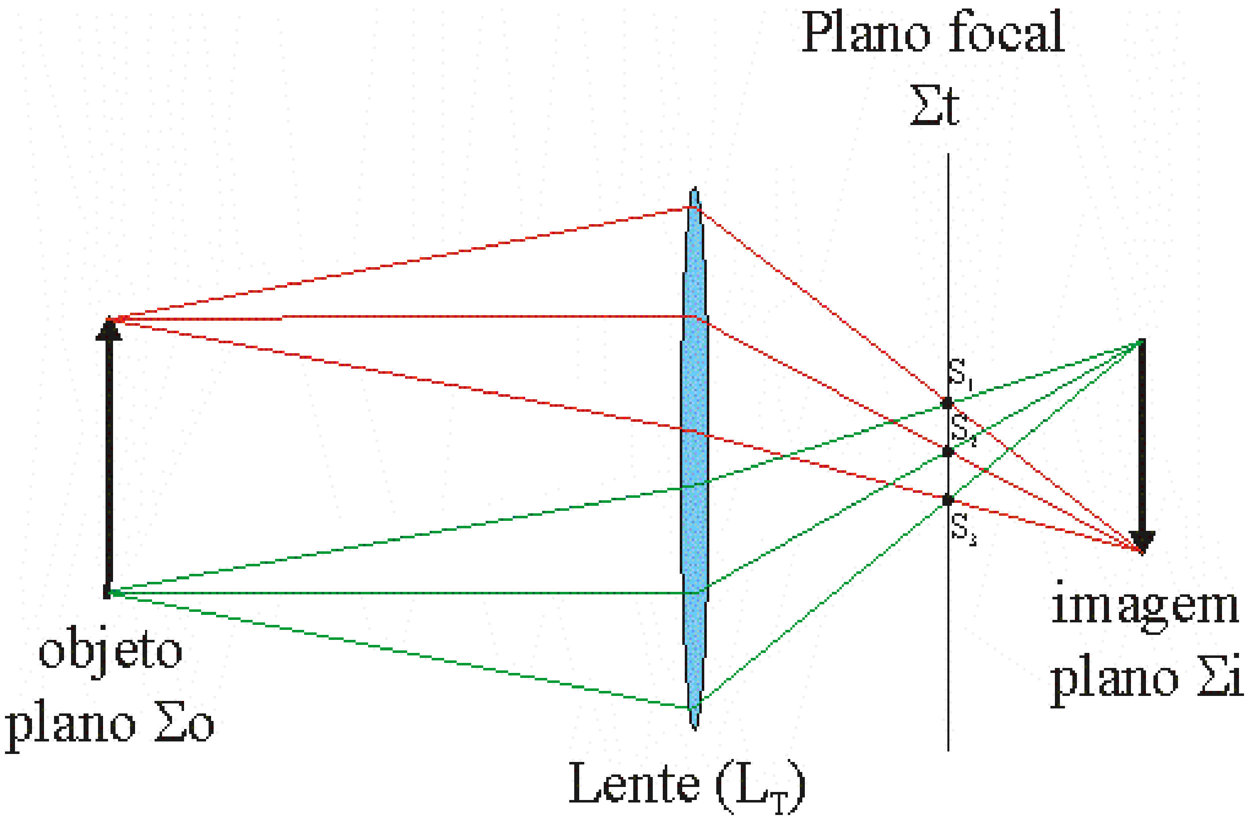
Princípios do computador óptico: Formação da imagem de uma lente

- Se imaginarmos cada ponto (S_i) como uma fonte esférica pontual, então a imagem formada no plano Σ_i corresponde \`a interferência de todas as fontes S_i



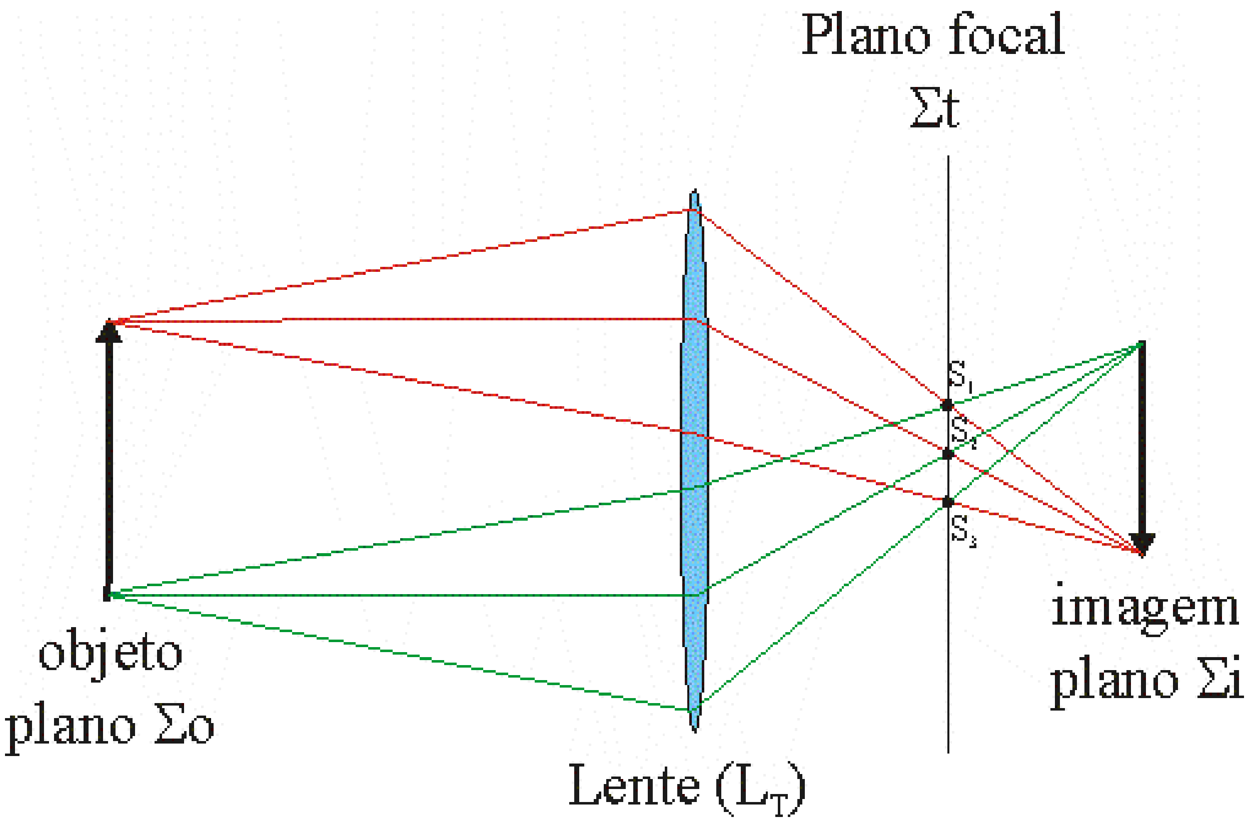
Princípios do computador óptico: Formação da imagem de uma lente

- Como a figura de interferência corresponde `a TF, então a imagem no plano $\Sigma_i$ corresponde `a TF da figura no plano focal Σ_t



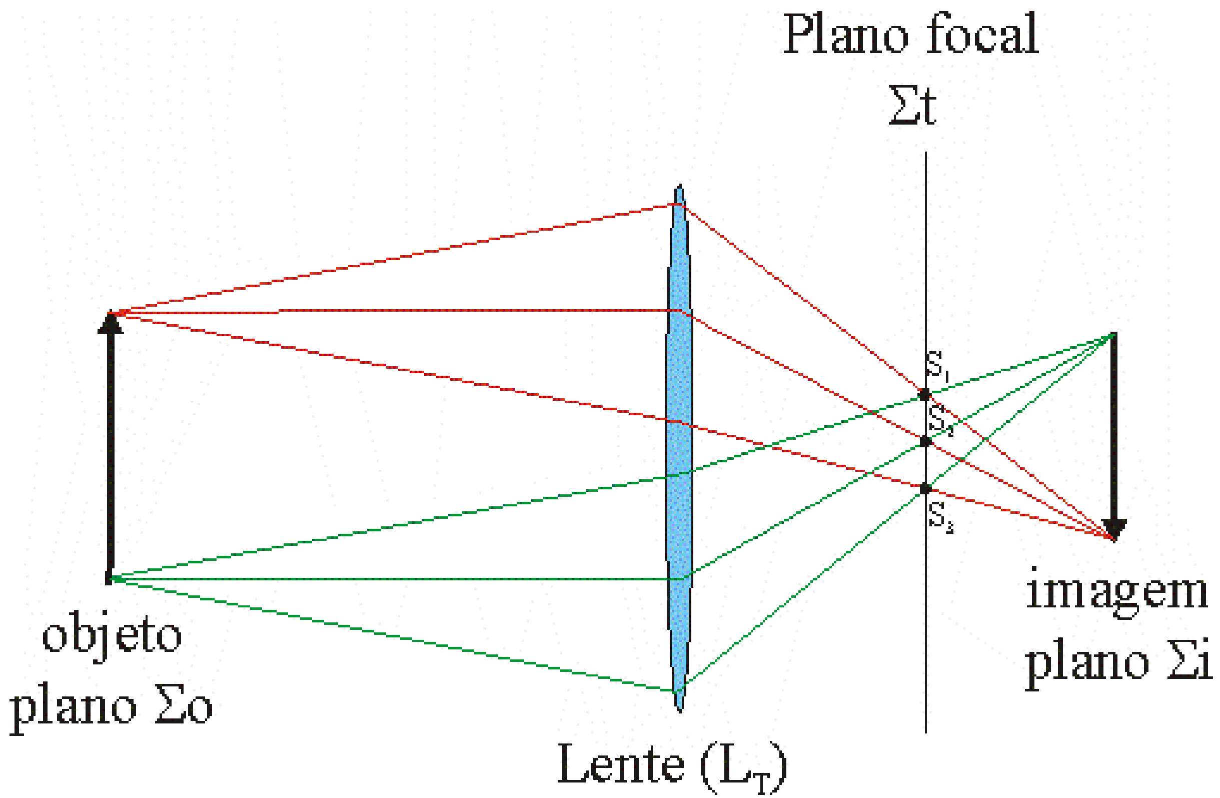
Princípios do computador óptico: Formação da imagem de uma lente

- Como a imagem no plano Σ_i tem a mesma forma do objeto no plano Σ_o, então a figura no plano Σt tem que ser a TF do objeto no plano Σ_o



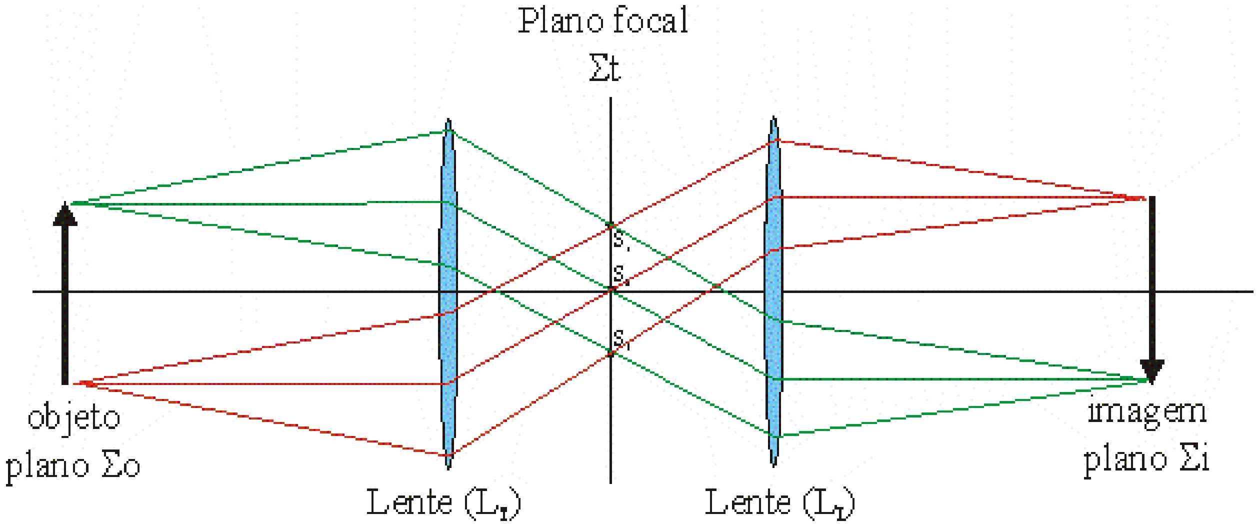
Princípios do computador óptico: Formação da imagem de uma lente

- Assim, em uma lente convergente, a figura formada no plano Σt é sempre a TF do objeto (invertida)
- Pode-se utilizar isso para manipular a imagem (= construção de um computador óptico)

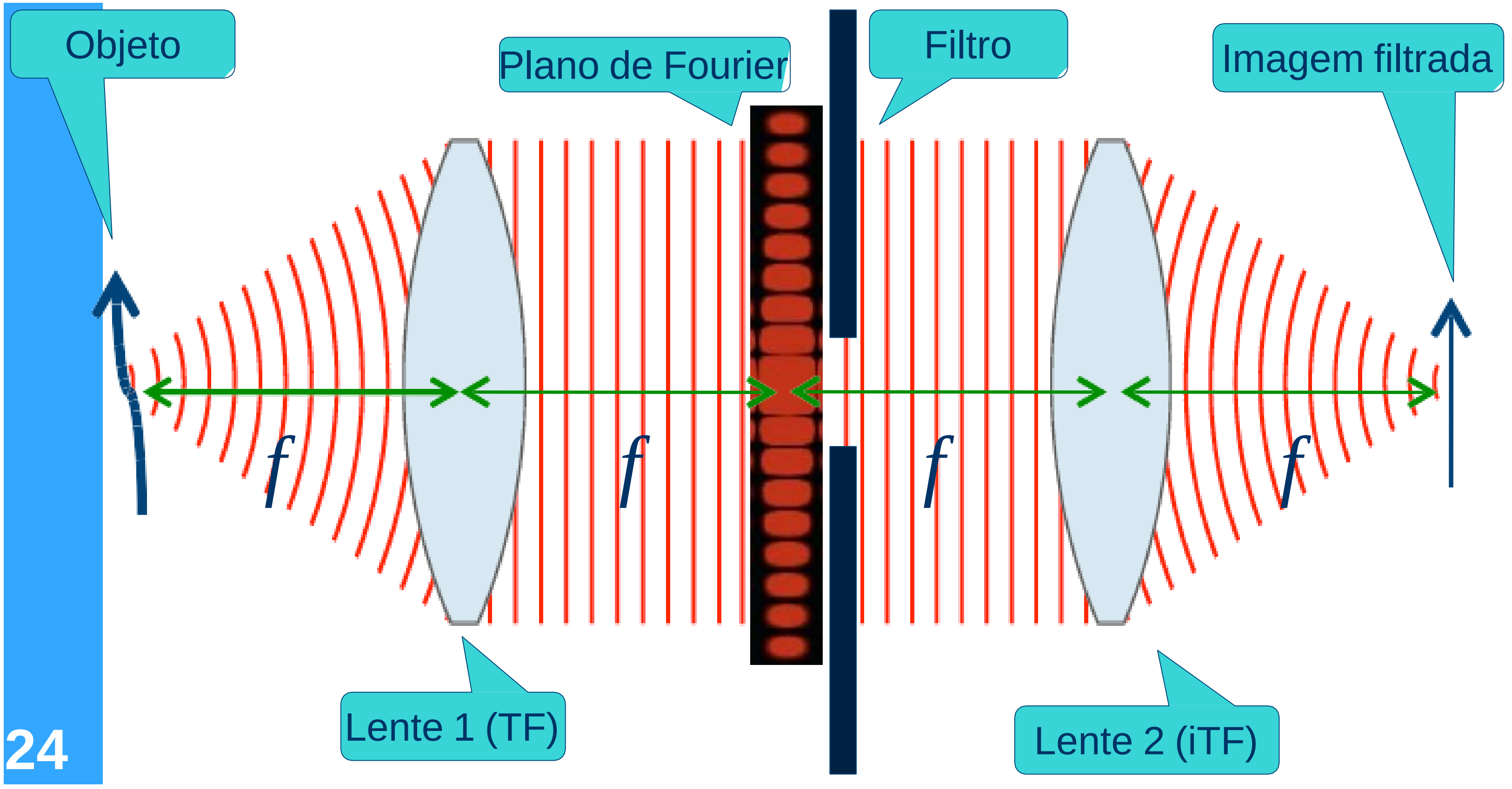


O computador óptico

- O computador óptico tradicional consiste de duas lentes posicionadas em pontos estratégicos
  - A segunda lente serve apenas para fazer uma imagem mais próxima
  - No nosso caso, vamos fazer com somente uma lente, por simplicidade



O computador óptico

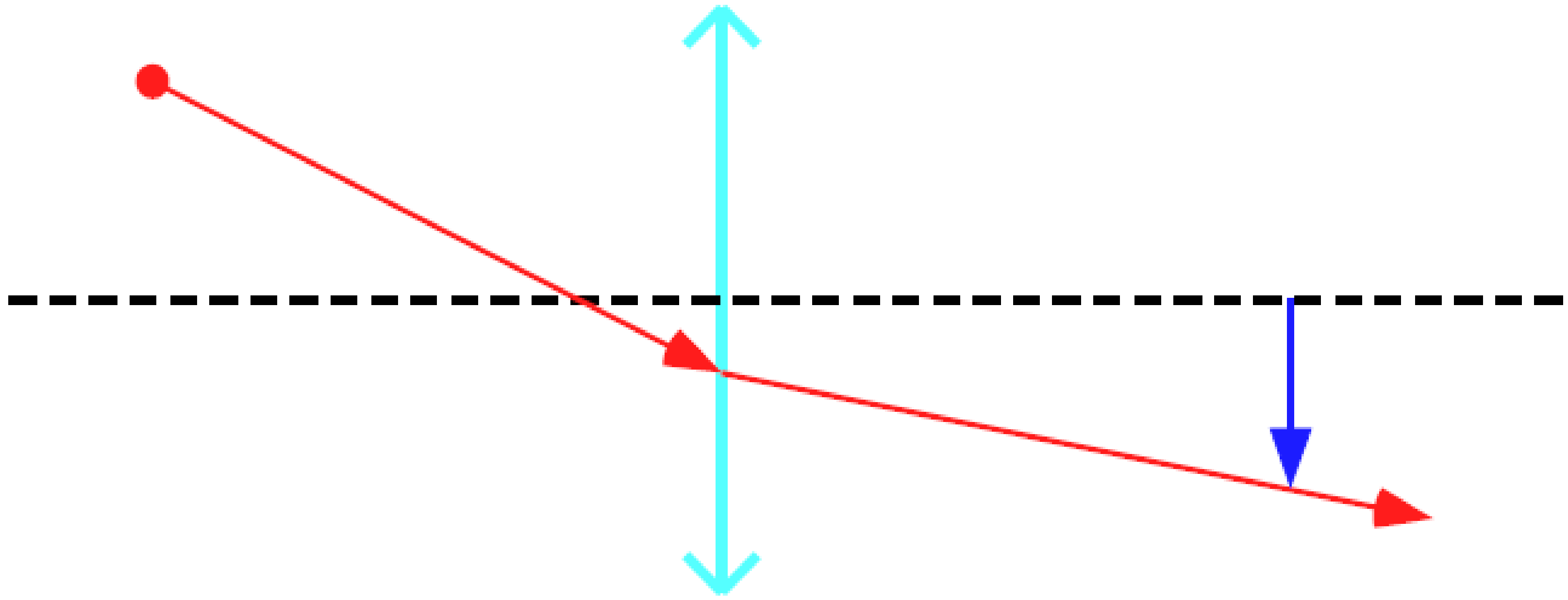


O que as lentes fazem

- Então, como fazer a transformada de Fourier da imagem do nosso objeto macroscópico?
- Sabemos que quando a lente forma a imagem do objeto, em algum lugar do lado imagem, vai ter uma intensidade luminosa que é o quadrado de $E(k_x, k_y)$, que, por sua vez, é a transformada de Fourier do objeto descrito por $\varepsilon(x, y)$ (chamada de função da abertura).
- Para saber o que vai acontecer exatamente, é preciso considerar como a lente modifica a amplitude e a fase de E_0 em cada ponto (x, y).
- O que acontece é que a transformada de Fourier aparece no plano focal da lente

Lente delgada convergente

- Seja uma fonte pontual em um sistema óptico do tipo



- Vamos relembrar como tratamos as lentes

O método matricial

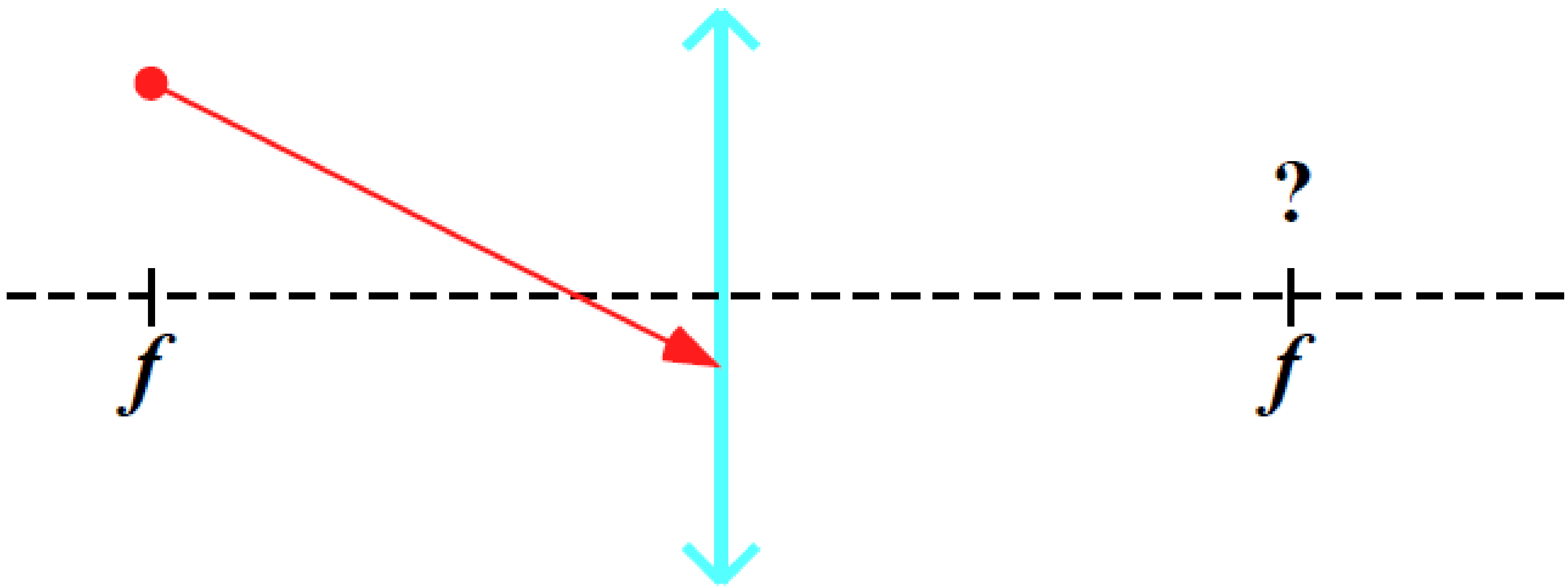
- Seja uma transformação do tipo:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r_2 = Ar_1 + B\varphi_1 \\ \varphi_2 = Cr_1 + D\varphi_1 \end{cases}$$

- Se $A = 0$, todos os raios de mesmo ângulo passam pelo mesmo ponto r_2
- Se $D = 0$, todos os raios de mesmo ponto de origem emergem com o mesmo ângulo do sistema óptico.

Lente delgada convergente

- Agora vamos considerar uma fonte pontual no plano focal da lente



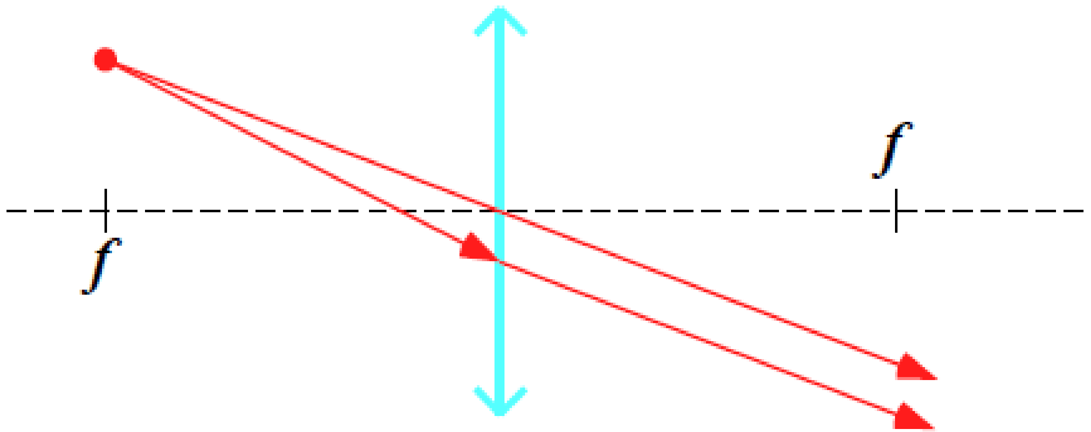
- O que acontece no ponto a uma distância f da lente?

Calculando a matriz de tranformação

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & f \\ -\frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r_2 = f\varphi_1 \\ \varphi_2 = -\frac{1}{f} r_1 \end{cases}$$

- O ângulo no qual o raio de luz emerge depende apenas da posição da fonte, ou seja, os raios emergem todos paralelos $\Rightarrow$ onda plana

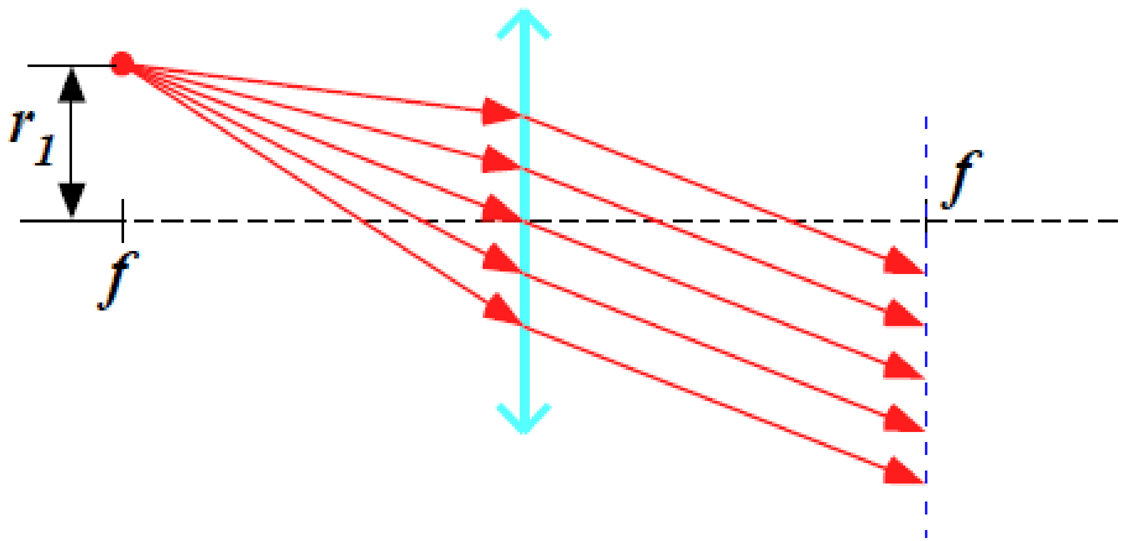


Lente convergente: caso especial

- Fonte pontual no plano focal
  - Todos os raios emergem com o mesmo ângulo $\Rightarrow$ saída é uma onda plana

$$r_2 = f\varphi_1$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{f} r_1$$



- O que está acontecendo? Porque uma fonte pontual se transforma em uma onda plana?

Transformada de Fourier: função delta

- Uma fonte pontual pode ser representada por uma função delta

$$f(r) = \delta(r - b)$$

- Cuja transformada de Fourier é:

$$FT\{\delta(r - b)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(r - b) e^{-i2\pi kr} dr = e^{-i2\pi kb}$$

  - Que é uma onda plana
- Consequentemente, a transformada de Fourier de uma onda plana será uma função delta!

Onda plana

- Onda plana de direção bem definida (não necessariamente no eixo óptico do sistema):

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{ikr\,\mathrm{sen}\varphi} \sim e^{i\frac{2\pi}{\lambda}r\varphi} = e^{i2\pi\mu r}$$

  - $\mu = \frac{\varphi}{\lambda}$ - trocamos k por μ que tem dimensão de frequência: é a frequência espacial

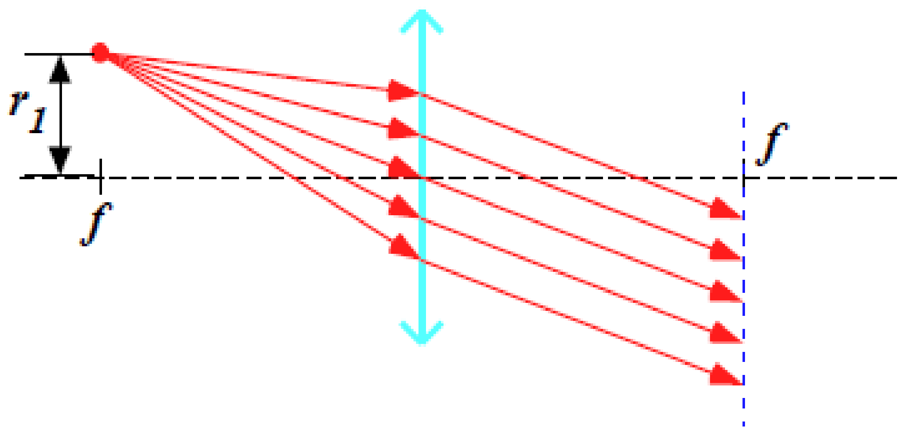
- A transformada de Fourier é:

$$FT\{e^{i2\pi\mu r}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\mu r} e^{-i2\pi\xi r} dr = \delta(\mu - \xi)$$

  - A transformada de Fourier de uma onda plana é uma função delta localizada em ξ.

Lente simples: objeto no plano focal

- Fonte pontual no plano focal: a lente está fazendo uma distribuição de intensidade luminosa que é proporcional à transformada de Fourier do campo elétrico incidente!



$$e^{ikr\varphi} = e^{i2\pi\mu r} \qquad \mu = \frac{r_1}{f\lambda}$$

  - NOTA: colocamos todas as distâncias $= f$, por isso aparece a transformada de Fourier exata. Se uma das distâncias fosse diferente, apareceria uma fase. Mas como estamos medindo apenas o quadrado da amplitude, não percebemos isso no laboratório.

O reverso se aplica

- Se um conjunto de raios paralelos atinge uma lente em um ângulo bem definido, eles se cruzam em algum ponto do plano focal de tal modo que essa posição vale:

$$r_2 = f\lambda\mu = f\varphi_1$$

- Como μ é uma frequência espacial, com dimensão de $1/[\text{comprimento}]$, podemos escrever:

$$\lambda\mu = \varphi_1 \;\Rightarrow\; \frac{\lambda}{d} = \varphi_1 \;\Rightarrow\; d\varphi_1 = \lambda$$

- d = dimensão característica do objeto

Finalmente...

- A equação de primeira ordem de um objeto difrator é:

$$d\varphi_1 = \lambda$$

  - Lembrar da equação da difração de fenda simples: $d\mathrm{sen}\theta = m\lambda$
- Como o padrão de difração é proporcional à transformada de Fourier do campo elétrico, a lente funciona como um elemento que permite obter essa TF.

Atividades

-- Utilizando lentes convergentes de distâncias focais 1 e 20 cm, monte um sistema que aumente o diâmetro do laser de um fator 20x.

-- Utilize os resultados da atividade preparatória para montar o sistema. O feixe do laser possui uma pequena divergência, o que faz com que a distância entre as lentes calculada na atividade preparatória tenha que ser ajustada para que o feixe depois de passar pela lente de foco 20 cm tenha a menor divergência possível. Meça o diâmetro do feixe em alguns pontos e certifique-se que a divergência seja mínima.

-- Ilumine a grade com o feixe de laser paralelo.

Atividades

-- Utilize a lente de distância focal 40 cm. Observe a transformada de Fourier da grade no plano de Fourier. Fotografe.

-- Observe a imagem recomposta num anteparo distante. Fotografe.

-- Descubra um filtro a ser aplicado no plano de Fourier capaz de eliminar as linhas verticais da grade. Fotografe.

-- Depois elimine as linhas horizontais. Fotografe.

Discuta os resultados.