

# Óptica Geométrica - Lentes

## 1 Introdução

As evidências experimentais e o trabalho de J. Clerk Maxwell estabeleceram que a natureza da luz é eletromagnética. A teoria eletrodinâmica clássica descreve a luz como uma transferência contínua de energia através de ondas eletromagnéticas. Entretanto, a visão atual da eletrodinâmica quântica descreve as interações eletromagnéticas e o transporte de energia em termos de partículas de massa zero, os fótons. Contudo, a natureza quântica da luz não é sempre aparente, nem esse tratamento é de utilidade prática na descrição de muitos fenômenos ópticos. Existem situações nas quais os equipamentos de detecção não são sensíveis aos quanta individuais e é desejável que isso ocorra para que se possa estudar fenômenos induzidos por um número enorme de fótons. Nesses casos a representação da luz através de campos eletromagnéticos tem sido e vai continuar a ser de grande utilidade.

Nesse experimento vamos considerar a luz como uma onda eletromagnética sem esquecer que existem situações para as quais essa descrição é inadequada.

A aproximação que permite considerar a propagação da luz como retilínea simplifica tanto o estudo do comportamento da luz, em certos casos, que compensa de sobra as imprecisões que dela decorrem. O domínio da “óptica geométrica” é o conjunto de fenômenos para os quais essa aproximação é válida e é aquela em que os efeitos de difração (ou da natureza ondulatória da luz) podem ser desprezados. Isso ocorre quando o comprimento de onda da energia radiante é pequeno se comparado às dimensões físicas do sistema óptico com o qual ela interage.

Em outras palavras, a óptica geométrica é válida no limite em que o comprimento de onda da luz tende a zero. Além disso, ela permite a descrição da alteração controlada das frentes de onda pela interposição de aparatos que refletem e/ou refratam a luz, de uma maneira bem mais simplificada, desde que seja possível desprezar efeitos de interferência e difração.

## 2 Lentes

A lente é, certamente, o dispositivo óptico mais utilizado em nosso cotidiano. Nós mesmos vemos o mundo através de um sistema de lentes.

A lente é um dispositivo refrator, isto é, que reconfigura a distribuição de energia que transmite, quer se trate de ondas eletromagnéticas (luminosas visíveis, ultravioleta, infravermelho, micro-onda, ondas de rádio), ou até de ondas sonoras.

A configuração de uma lente é determinada pela mudança que se pretende introduzir na forma da frente de onda.

Existe uma vasta variedade de lentes. Além das lentes para radiação eletromagnética (luz visível, ondas de rádio, micro-ondas), há lentes acústicas e lentes para feixes de partículas carregadas. Portanto, lentes podem ter as mais variadas formas que, muitas vezes, podem ser bem diferentes da forma convencional das lentes para luz visível.

As lentes para radiação eletromagnética na faixa de frequência da luz visível têm, em geral, duas ou mais superfícies refratoras com uma ou mais superfícies curvas. As superfícies curvas têm, na grande maioria dos casos, um eixo comum que é chamado de eixo óptico da lente. Nosso estudo estará restrito a lentes ou sistemas de lentes com essa característica, ou seja, para os quais todas as superfícies são simétricas por rotação em torno de um eixo comum, que é o eixo óptico.

O material com que as lentes são feitas é um dielétrico transparente com índice de refração diferente do índice de refração do meio onde a onda vinha se propagando. Nos casos que vamos estudar, esse índice de refração (do dielétrico) será sempre maior que o do meio que é o ar.

As lentes são classificadas segundo várias características e possuem uma nomenclatura convencional:

- lentes que consistem de um único elemento são chamadas de lentes simples e quando possuem mais de um elemento são lentes compostas.
- lentes podem ser grossas ou delgadas. As delgadas são aquelas cuja espessura pode ser desprezada quando se prevê seu comportamento; nas lentes grossas essa espessura deve ser levada em conta.
- lentes também são classificadas quanto à maneira como alteram as frentes de onda que as atravessam: as lentes podem ser divergentes quando fazem com que um feixe incidente de raios paralelos ao eixo óptico, saia das mesmas divergindo; ou convergentes quando atuam de modo a fazer convergir para um ponto um feixe de raios incidentes paralelo ao eixo óptico.

Um estudo mais detalhado sobre lentes, seu funcionamento e usos pode ser encontrado nos capítulos 5 e 6 do livro *Optics* de E. Hecht [1] e também em outros livros de física básica.

## 2.1 Funcionamento de uma Lente

A superfície de qualquer objeto que seja luminoso ou iluminado externamente comporta-se como se fosse constituído de um número muito grande de fontes radiativas pontuais,  $\mathbf{S}$ , que

emitem, cada uma delas, ondas esféricas. À direção em que a energia é transportada, ou seja, à direção do vetor de Poynting, vamos associar linhas que chamaremos de raios (ter em mente que raio não é uma entidade física, mas uma construção matemática que simplifica o estudo de dispositivos ópticos). Nesse caso, então, podemos dizer que raios divergem de cada uma das fontes pontuais,  $\mathcal{S}$ , que compõem a superfície do objeto. O ponto do qual uma porção de uma onda esférica diverge, ou o ponto para o qual ela converge é chamado de foco do conjunto de raios que a representam.

Para ver como uma lente funciona vamos colocar no caminho de uma onda luminosa uma substância transparente na qual a onda vai se propagar com uma velocidade diferente da que possuía antes de penetrar na substância. Vamos supor que a velocidade de propagação da onda nesse meio é menor que a velocidade de propagação no meio onde ela se encontrava, o que quer dizer que o índice de refração,  $n_{transp} = c/v_{transp}$ , do meio transparente é maior que o índice do meio onde a onda se encontrava,  $n_{inicial} = c/v_{inicial}$  e  $n_{transp} > n_{inicial}$ .

Para facilitar o entendimento, vamos supor que:

- a frente de onda, ao atingir o meio, é esférica, vindo de uma fonte pontual e, portanto, divergente
- a superfície de separação entre os meios é convexa, ou seja, mais espessa no centro que nas bordas.

Vai ocorrer que a área central da frente de onda atinge a superfície do meio antes que as áreas periféricas, e, portanto vai começar a se propagar mais lentamente antes das áreas periféricas da frente de onda. O efeito disso é que as extremidades da onda vão tender a “ultrapassar” a parte central aplainando a frente de onda. Se a interface entre o meio onde a onda se originou e o meio em que ela vai penetrar, é configurada de maneira apropriada, pode-se transformar uma onda esférica divergente em uma onda plana.

O mesmo raciocínio pode ser feito para uma frente de onda esférica, que encontre em seu caminho uma superfície de separação côncava (mais fina no centro que nas bordas): a área periférica da frente de onda atinge a superfície de separação entre os dois meios antes que a parte central, e, portanto vai se propagar mais lentamente que a região central da frente de onda, o efeito disso é que o raio de curvatura da frente de onda diminui, ou seja, ela se torna ainda mais divergente.

A conclusão é que projetando as interfaces entre dois meios de índices de refração diferentes, de maneira adequada, podemos modificar controladamente a frente de onda, fazendo com que os raios que a representam possam convergir para um ponto ou divergir de um ponto, ou ainda se tornarem paralelos. Esses pontos são chamados de pontos focais; para raios paralelos o ponto focal se encontra no infinito.

A figura 1 a seguir mostra graficamente esse comportamento, com os desenhos das frentes de onda e dos raios.

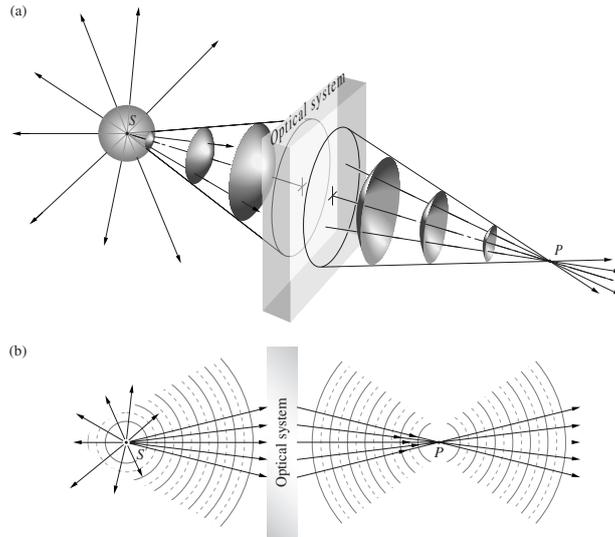


Figura 1. Comportamento de uma frente de onda esférica divergente e dos raios que a representam ao passar numa interface ar  $\rightarrow$  vidro ( $n_{vidro} > n_{ar}$ ) convexa. Extraída da figura 5.1 de [1].

Com o raciocínio feito acima é possível verificar que uma lente é convergente quando ela é mais espessa no centro que nas bordas, e, uma lente divergente, pelas mesmas razões é mais fina no centro que nas bordas.

Vamos estudar o que acontece quando se observa uma fonte pontual através de alguns tipos de lentes. Na figura 2 a seguir, está desenhado o traçado dos raios provenientes da fonte ao atravessar essas lentes. O feixe de raios luminosos emitidos por uma fonte pontual é um feixe divergente.

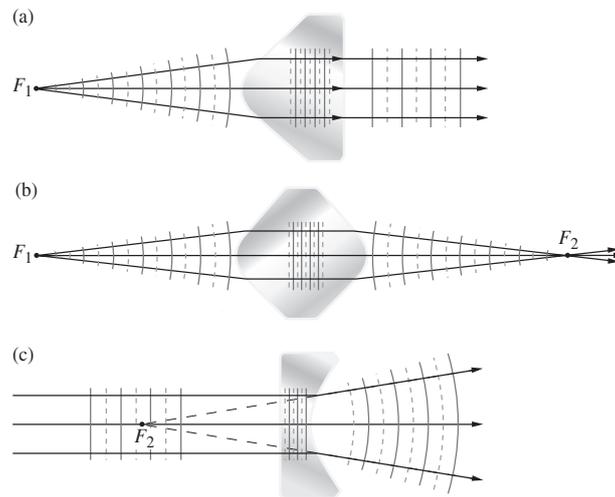


Figura 2. Comportamento de uma lente convergente (plano-convexa) (a); de uma lente convergente (bi-convexa) (b); e de uma lente divergente (plano-côncava) (c). Extraída da figura 5.5 de [1].

Na figura 2(a) é representada uma lente plano-convexa, que pela definição, é uma lente convergente. A distância da fonte pontual à lente foi ajustada de tal maneira que o

feixe de raios divergentes que atinge a lente saia dela como um feixe de raios paralelos ao eixo óptico. Quando isso ocorre, a distância da fonte à lente é chamada de distância focal ou foco,  $f_1$ , da lente convergente. Como os raios são reversíveis, se um feixe de raios paralelos ao eixo óptico entra na lente pela direita, eles vão convergir para o ponto focal  $F_1$ , à esquerda da lente. O princípio da reversibilidade dos raios luminosos deriva do princípio de Fermat. Para maiores detalhes veja o capítulo 4, seção 4.5 de [1].

Na figura 2(b) temos uma lente convergente construída pela justaposição de duas lentes plano-convexas como a da figura 2(a). A fonte pontual é colocada no ponto  $F_1$  a uma certa distância da lente de maneira que o feixe de raios emergente irá convergir para um ponto do outro lado da lente,  $F_2$ . Esses dois pontos são chamados de pontos conjugados da lente. Como consequência da reversibilidade dos raios luminosos, se a fonte for colocada no ponto  $F_2$  os raios emergentes vão convergir para o ponto  $F_1$ .

Finalmente, na figura 2(c) é representada uma lente plano-côncava (divergente) e vamos supor que raios paralelos ao eixo óptico atinjam a lente vindos da esquerda. Eles vão sair da lente divergentes, mas parecem divergir de um ponto situado à esquerda da lente,  $F_2$ . A distância desse ponto à lente é chamada de distância focal ou foco  $f_2$  da lente divergente.

A posição do objeto em relação à lente é chamada de ponto objeto e a posição da imagem em relação à lente é conhecida como ponto imagem.

O tipo de lente que se pretende estudar é construído de tal maneira que tanto o ponto objeto (posição do objeto em relação à lente), como o ponto imagem (posição da imagem em relação à lente) se encontram fora do meio da lente. Vamos restringir nosso estudo a lentes e sistemas de lentes imersos no ar, cujo índice de refração é considerado igual a 1 (o valor tabelado é igual a  $n_{ar} = 1,000293$ , a 1 atm e 0 °C, medida realizada com luz de sódio  $\lambda = 589,29$  nm, dados obtidos de [1]).

Observando mais uma vez a figura 2(b) vemos que os raios provenientes da fonte pontual em  $F_1$  vão convergir para o ponto chamado conjugado  $F_2$ , então, se for colocado um anteparo no ponto  $F_2$  vai aparecer nesse anteparo uma imagem luminosa da fonte que está em  $F_1$ . Por essa razão a imagem é dita real. A imagem real pode ser projetada em um anteparo.

Por outro lado, na figura 2(c), como os raios que chegam à lente são paralelos, ou seja, a fonte está no infinito, os raios que emergem são divergentes, mas parecem se originar num ponto  $F_2$ . Entretanto, se for colocado um anteparo no ponto  $F_2$ , nenhuma imagem luminosa da fonte aparecerá no anteparo, apesar de que essa imagem pode ser percebida através da lente. Essa imagem é dita virtual, como as imagens formadas por espelhos planos. Imagens virtuais não podem ser projetadas em anteparos.

Este estudo que estamos propondo se restringirá aos raios que atingem a lente obedecendo a aproximação paraxial. Essa aproximação considera que os raios chegam à lente com ângulos ( $\varphi$ ), em relação ao eixo óptico da lente, pequenos o suficiente para que a apro-

ximação em primeira ordem,  $\sin \varphi \approx \varphi$  e  $\cos \varphi \approx 1$  ( $\varphi$  em radianos), seja válida (ela é uma aproximação razoável até  $\varphi \approx 10^\circ$ ).

Relembrando que o seno e o cosseno de  $\varphi$  podem ser expandidos em séries de potência:

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \quad (1)$$

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots \quad (2)$$

A aproximação paraxial é também chamada de primeira ordem porque ela considera somente o primeiro termo na aproximação acima. Por essa razão, a teoria que admite essa aproximação é chamada de Óptica de Primeira Ordem ou Óptica Paraxial ou, ainda, Óptica Gaussiana. Este último nome se deve ao fato de ter sido o matemático alemão Karl Friederich Gauss, em 1841, quem primeiro fez uma formulação sistemática da formação de imagens sob essa aproximação.

## 2.2 Lentes Delgadas

A lente delgada é aquela cujo comportamento pode ser previsto desprezando sua espessura. No tratamento que vai ser realizado será considerada válida a aproximação paraxial e vai-se estudar somente o caso em que o índice de refração da lente é maior que o índice de refração do meio onde ela se encontra, que será o ar ( $n_{ar} = 1$ ).

Lentes delgadas, divergentes ou convergentes podem ter duas superfícies curvas ou uma curva e uma plana, como se vê na figura 3 a seguir. Cada lente recebe um nome de acordo com sua geometria.

CONVEX	CONCAVE
 $R_1 > 0$ $R_2 < 0$ Biconvex	 $R_1 < 0$ $R_2 > 0$ Biconcave
 $R_1 = \infty$ $R_2 < 0$ Planar convex	 $R_1 = \infty$ $R_2 > 0$ Planar concave
 $R_1 > 0$ $R_2 > 0$ Meniscus convex	 $R_1 > 0$ $R_2 > 0$ Meniscus concave

Figura 3. Diferentes lentes convergentes e divergentes e os seus raios de curvatura. Extraída da figura 5.12 de [1].

Lentes convexas ou convergentes (mais espessas no centro que nas extremidades) fazem diminuir o raio de curvatura das frentes de onda que as atingem, ou, utilizando o conceito de raios, altera o ângulo de saída dos raios tornando-os mais convergentes. Elas também são chamadas de lentes positivas porque se convencionou que a distância focal de uma lente convergente é positiva.

Lentes côncavas ou divergentes (mais finas no centro que nas extremidades) fazem aumentar o raio de curvatura das frentes de onda que incidem sobre ela. Ou, em termos de raios, torna-os mais divergentes ao saírem que quando entraram. São também chamadas de lentes negativas porque se convencionou que a distância focal de lentes divergentes é negativa.

Há mais algumas convenções que se adotam no tratamento do funcionamento das lentes:

- o foco objeto,  $f_o$ , de uma lente é o ponto focal do lado onde está colocado o objeto, esse ponto se encontra sobre o eixo óptico da mesma
- o foco imagem,  $f_i$ , é o ponto focal do lado da lente onde se forma a imagem, esse ponto se encontra sobre o eixo óptico da mesma
- para uma lente delgada,  $f_o = f_i = f$
- o meio de entrada do raio na lente é chamado de espaço objeto
- a distância  $o$  é a distância do objeto ao plano que passa pelo centro da lente (essa definição é válida apenas para lentes delgadas)
- a posição do objeto em relação à lente é chamada de ponto objeto
- o meio em que o raio emerge da lente é chamado de espaço imagem
- a distância  $i$  é o intervalo entre a imagem e o plano que passa pelo centro da lente (essa definição é válida apenas para lentes delgadas)
- a posição da imagem em relação à lente é chamada de ponto imagem
- $h_o$  é a altura do objeto, que é a sua dimensão perpendicular ao eixo óptico
- $h_i$  é altura da imagem ou sua dimensão perpendicular ao eixo óptico.

A seguir, a convenção de sinais adotada para essas variáveis, considerando o feixe de luz entrando na lente pela esquerda:

- a distância do objeto à lente,  $o$ , é positiva se o objeto estiver à esquerda da lente (lado pelo qual o feixe entra na lente) e negativa se o objeto estiver à direita da lente (lado pelo qual o feixe sai da lente)

- a distância da imagem à lente,  $i$ , é positiva se a imagem estiver à direita da lente (lado pelo qual o feixe sai da lente) e negativa se a imagem estiver à esquerda da lente (lado pelo qual o feixe entra na lente)
- a distância focal  $f$  é positiva se a lente é convergente e negativa se a lente é divergente
- a altura  $h_o$  do objeto e  $h_i$  da imagem são positivas se estão acima do eixo óptico e negativas se estiverem abaixo do eixo óptico
- a altura  $h_i$  da imagem está para a altura  $h_o$  do objeto assim como a distância  $i$  da imagem à lente está para a distância  $o$  do objeto à lente. E a relação entre  $h_i$  e  $h_o$  é chamada de magnificação linear transversal da lente,  $m$ . Se  $m$  é negativa significa que a imagem está invertida.

$$\frac{i}{o} = \frac{h_i}{h_o} = m \quad (3)$$

A figura 4 a seguir mostra como uma lente delgada convergente forma a imagem de um objeto de altura  $h_o$ .

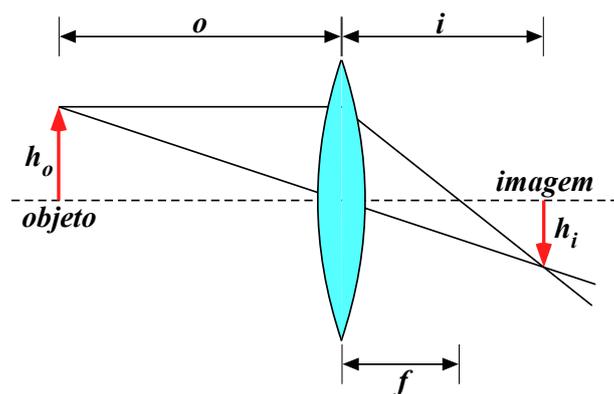


Figura 4. Formação de imagem por uma lente convergente.

Essa imagem é uma imagem real e invertida, portanto, pode ser projetada em um anteparo. Tanto a posição,  $i$ , como a altura,  $h_i$ , ou magnificação dessa imagem podem ser previstas. Essa previsão será o objeto das próximas seções.

### 2.3 Método Matricial Aplicado à Análise de Lentes

Há um método interessante que permite resolver o problema de traçar o caminho dos raios luminosos através de uma lente ou sistemas de lentes. Esse método é particularmente útil para sistemas de lentes em que a resolução analítica convencional fica muito trabalhosa. Esse método utiliza matrizes para prever o caminho de um raio luminoso através de um sistema óptico.

Supondo que um raio de luz paraxial incida sobre um sistema óptico, vamos caracterizá-lo por dois parâmetros: a distância  $r$  que ele está do eixo óptico do sistema e o ângulo  $\varphi$  que ele faz com esse eixo. O sistema óptico, qualquer que seja ele, terá um plano de entrada e um plano de saída do raio de luz. Vamos supor que os valores dos parâmetros  $r$  e  $\varphi$  nesses planos sejam  $(r_1, \varphi_1)$  e  $(r_2, \varphi_2)$  respectivamente, como se vê na figura 5 a seguir.

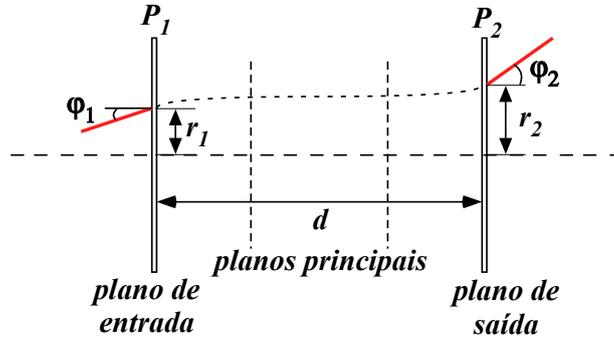


Figura 5. Diagrama esquemático de um sistema óptico de espessura  $d$ , mostrando um raio paraxial típico e seus parâmetros nos planos de entrada ( $r_1$  e  $\varphi_1$ ) e e saída ( $r_2$  e  $\varphi_2$ ) do sistema.

Na aproximação paraxial há uma relação linear entre esses parâmetros da forma (essas relações vem da aplicação da Lei de Snell nas interfaces de separação entre os meios):

$$r_2 = Ar_1 + B\varphi_1 \quad (4)$$

$$\varphi_2 = Cr_1 + D\varphi_1 \quad (5)$$

ou usando a notação matricial:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

lembrando que estamos usando o índice 1 para assinalar a entrada e o índice 2 para a saída do raio luminoso.

A matriz  $M$ , da expressão (6), é chamada de matriz de transferência do raio luminoso:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (7)$$

Essa matriz transforma o raio que incide no ponto  $P_1$  da lente, (ponto de entrada), no raio que emerge no ponto  $P_2$ , (ponto de saída). Portanto a matriz é um operador, ela opera uma transformação sobre o raio luminoso.

Geralmente o determinante dessa matriz é igual a 1, como consequência do teorema de Liouville. Esse teorema diz que a área do feixe luminoso (que vem do objeto e vai definir a imagem) é conservada no espaço de fase. Quando temos que descrever um sistema físico,

há necessidade de certas grandezas para caracterizar essa descrição; o espaço de fase é o espaço cujas coordenadas são essas grandezas. No caso, o espaço de fase do feixe é definido como o espaço definido pelas coordenadas  $(r, \varphi)$ , ou seja, um espaço bidimensional cujos eixos são a distância  $r$  do eixo óptico ao ponto onde o raio atinge a lente, e o ângulo  $\varphi$ , que é o ângulo que o raio faz com o eixo óptico da lente. Se a área no espaço de fase é conservada, pode ser demonstrado que o determinante da matriz de transferência,  $M$ , é igual a 1. Essa característica pode ser explorada como um teste de consistência sempre que se cria uma matriz de transferência: uma condição necessária (mas não suficiente) é que seu determinante seja igual a 1, para que ela faça a transferência correta entre o raio que entra e o raio que sai do sistema óptico.

Uma outra característica da maioria dos sistemas ópticos, feitos de material isotrópico, é que são reversíveis, isto é, um raio luminoso que o atravesse da direita para a esquerda com parâmetros de entrada  $(r_2, \varphi_2)$  sairá do sistema com parâmetros  $(r_1, \varphi_1)$ . Portanto:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

e a matriz de transferência do raio reverso é:

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} \quad (9)$$

Uma outra vantagem do tratamento matricial para o cálculo do transporte do feixe é que ele o torna mais simples quando o sistema óptico possui mais de um elemento. Vamos supor que o raio, ao sair da primeira lente, entra numa segunda lente; para representar o transporte do raio luminoso através desse sistema vamos ter que representar por matrizes a entrada e a saída do raio nas lentes e sua propagação no espaço entre elas. Essa descrição é apresentada a seguir.

### 2.3.1 Representação Matricial do Espaço Livre entre dois Elementos Ópticos

O espaço livre onde o feixe de raios luminosos se propaga é a mais simples e a mais comum componente de transporte de feixe e a matriz que o representa é, portanto, a mais simples. Na figura 6 a seguir, o raio luminoso se desloca do ponto  $P_1$  ao ponto  $P_2$  no espaço livre:

De acordo com a figura supõe-se que  $P_1$  é o ponto inicial do raio luminoso e  $P_2$  o ponto final,  $d$  é a distância que o raio percorre entre  $P_1$  e  $P_2$  e  $r_1$  é a distância do ponto  $P_1$  ao eixo óptico. Portanto, sendo válida a aproximação paraxial, valem as relações:

$$\tan \varphi_1 = \frac{\text{sen} \varphi_1}{\text{cos} \varphi_1} \approx \text{sen} \varphi_1 \approx \varphi_1 \quad (10)$$

usando esse resultado podemos escrever que:

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 + d\varphi_1 \\ \varphi_2 &= \varphi_1 \end{aligned} \quad (11)$$

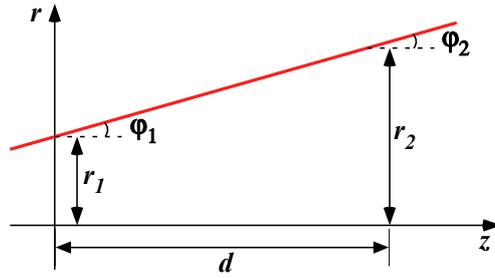


Figura 6. Representação do espaço livre (de comprimento  $d$ ) entre dois pontos.

na forma matricial as equações (11) tornam-se:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Note que o determinante da matriz de transferência é igual a 1 e como o caminho percorrido pelo raio luminoso nesse espaço deve ser simétrico, os elementos  $A$  e  $D$  devem ser iguais. Tanto  $r_1$  quanto  $d$  devem ser expressos nas mesmas unidades e os ângulos em radianos.

### 2.3.2 Representação Matricial de uma Lente Delgada

Uma lente delgada é ilustrada na figura 7 a seguir. Essa lente pode ser considerada como um dispositivo que causa uma mudança na divergência angular do feixe luminoso que é instantânea e correspondente ao desvio da trajetória do feixe ao passar através da lente.

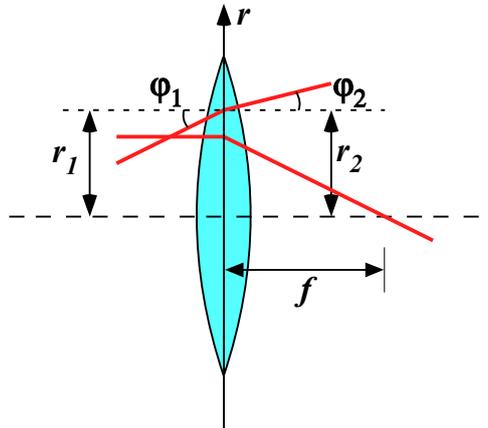


Figura 7. Percurso de dois raios luminosos através de uma lente delgada.

Vamos ver o que acontece quando três raios luminosos com trajetórias diferentes atingem a lente delgada, de distância focal,  $f$ , conforme a figura 8 abaixo:

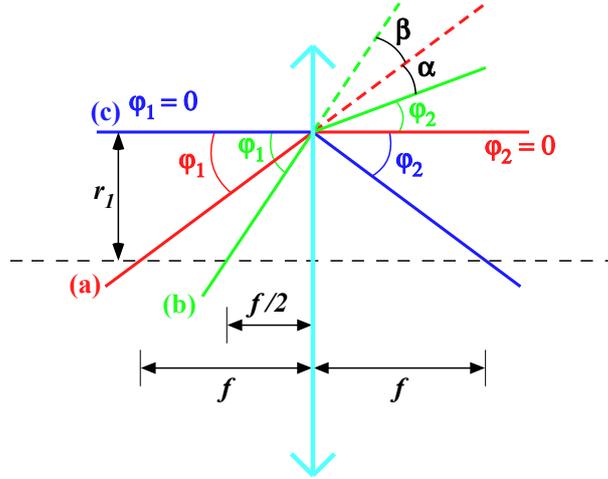


Figura 8. Esquema de lente delgada com três raios luminosos atingindo a lente com três ângulos de entrada diferentes.

A situação (a) é aquela em que o raio entra pelo foco objeto da lente, portanto esse raio sai paralelo ao eixo óptico, e, sempre tendo em mente que estamos trabalhando dentro do limite de validade da aproximação paraxial, teremos que:

$$\tan \varphi_1^{(a)} \approx \varphi_1^{(a)} = \frac{r_1}{f} \quad \text{e} \quad \varphi_2^{(a)} = 0 \quad (13)$$

onde  $\varphi_1^{(a)}$  é o ângulo que o raio de entrada faz com o eixo óptico da lente,  $r_1$  é a distância do eixo óptico ao ponto onde o raio de entrada atinge a lente e  $\varphi_2^{(a)}$  é o ângulo que o raio de saída faz com o eixo óptico da lente. Podemos escrever, então:

$$\Delta\varphi^{(a)} = \varphi_2^{(a)} - \varphi_1^{(a)} = -\frac{r_1}{f} \quad (\varphi_2 = 0) \quad (14)$$

Na situação (b) o raio de entrada cruza o eixo óptico a uma distância igual à metade da distância focal da lente. Nesse caso, vamos ter:

$$\varphi_2^{(b)} + \alpha + \beta = \varphi_1^{(b)} \quad (15)$$

onde o ângulo  $\alpha$  é o ângulo que o raio emergente da situação (b) faz com o prolongamento do raio incidente da situação (a), e,  $\beta$  é o ângulo entre o prolongamento dos dois raios incidentes, o da situação (a) e o da situação (b). Portanto:

$$\tan \varphi_1^{(b)} \approx \varphi_1^{(b)} = \frac{r_1}{\frac{f}{2}} = 2\frac{r_1}{f} \quad (16)$$

e

$$\beta = \varphi_1^{(b)} - \varphi_1^{(a)} = \frac{r_1}{f} \quad (17)$$

Substituindo esses valores na equação (15) obtemos:

$$\varphi_2^{(b)} + \alpha + \frac{r_1}{f} = 2\frac{r_1}{f} \quad (18)$$

e

$$\varphi_2^{(b)} + \alpha = \frac{r_1}{f} = \varphi_1^{(a)} \quad (19)$$

o que por construção implica que  $\alpha = 0$  e  $\varphi_2^{(b)} = \frac{r_1}{f}$ . Então, também na situação (b), em que o raio atinge a lente cruzando o eixo óptico na metade da distância focal, temos que:

$$\Delta\varphi^{(b)} = \varphi_2^{(b)} - \varphi_1^{(b)} = -\frac{r_1}{f} \quad (20)$$

Na situação (c) o raio incide na lente paralelamente ao seu eixo óptico, portanto  $\varphi_1^{(c)} = 0$ , temos:

$$\varphi_2^{(c)} = -\frac{r_1}{f} \quad (21)$$

portanto:

$$\Delta\varphi^{(c)} = \varphi_2^{(c)} - \varphi_1^{(c)} = -\frac{r_1}{f} \quad (22)$$

ou seja, para qualquer raio incidente, pode-se provar que a diferença angular entre o raio que emerge da lente e esse mesmo raio quando atinge a lente é sempre igual a  $-\frac{r_1}{f}$ , o que permite usar essa relação para definir a distância focal,  $f$ , da lente delgada.

Dessa forma, as equações para essa lente são:

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 \\ \varphi_2 &= -\frac{r_1}{f} + \varphi_1 \end{aligned} \quad (23)$$

ou

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Observação: Em alguns textos trabalha-se com a potência da lente,  $P$ , que é definida como o inverso da distância focal.

Com o que foi apresentado, é possível, agora, descrever a imagem de um objeto formada por uma lente delgada, convergente, utilizando o método matricial. Vamos supor que o objeto se encontre a uma distância  $o$ , da lente convergente de distância focal  $f$ , e que a lente produza uma imagem real a uma distância  $i$  da mesma. Então, tanto o deslocamento em relação ao eixo óptico quanto os ângulos, ou divergência, na posição do objeto e na posição da imagem, serão relacionados por uma equação matricial da forma:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & o \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

A matriz de transferência vai ser o produto dessas três matrizes, nessa ordem. A ordem é importante porque ela diz que a primeira matriz (a primeira matriz quer dizer a que vai multiplicar primeiro a matriz do raio incidente) a operar sobre o raio luminoso é aquela que descreve sua propagação do objeto até a lente. A segunda será a que representa a lente e

a terceira é a que faz o transporte do raio da lente até a imagem. A matriz de transferência do sistema será então:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{i}{f} & o - \frac{io}{f} + i \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{o}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

Portanto:

$$r_2 = \left(1 - \frac{i}{f}\right) r_1 + \left(o - \frac{io}{f} + i\right) \varphi_1 \quad (27)$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{f} r_1 + \left(1 - \frac{o}{f}\right) \varphi_1 \quad (28)$$

Todos os raios que deixam qualquer ponto do objeto vão ser trazidos para um ponto correspondente na imagem, não interessando qual era sua divergência ao deixar o objeto. Isso tem como consequência que  $r_2$  depende de  $r_1$ , mas não de  $\varphi_1$  e, portanto, o termo superior direito da matriz de transferência deve ser igual a zero.

O termo superior direito da matriz de transferência de uma lente é proporcional à espessura da lente (geralmente medida no seu centro), no caso das lentes delgadas esse termo é sempre nulo. O termo inferior esquerdo da matriz de transferência é o inverso da distância focal com sinal negativo, qualquer que seja a lente ou sistema de lentes. Essas características serão discutidas mais adiante quando for apresentada a descrição das lentes espessas.

É fácil verificar que o determinante da matriz de transferência final (que é a matriz produto das três matrizes da equação (25)) é igual a 1, o que está de acordo com o teorema de Liouville, e, já é uma boa indicação de que a equação matricial (25) deve estar correta. Se tomarmos equação (27) levando em conta que, como já dissemos  $r_2$  depende de  $r_1$ , mas não depende de  $\varphi_1$ , vamos obter:

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{o} = \frac{1}{f} \quad (29)$$

também conhecida como equação de Gauss. A distância focal é positiva em consequência das convenções adotadas para lentes delgadas convergentes. Pode ser feito o mesmo desenvolvimento para uma lente delgada divergente.

### 2.3.3 Método Matricial Aplicado a uma Associação de lentes

Vamos, agora, associar duas lentes delgadas e através do método matricial achar a distância focal da associação.

Na figura 9 está representada essa associação: lente 1 com distância focal  $f_1$ , depois um espaço livre entre as lentes de comprimento  $d$  e a lente 2 de distância focal  $f_2$ :

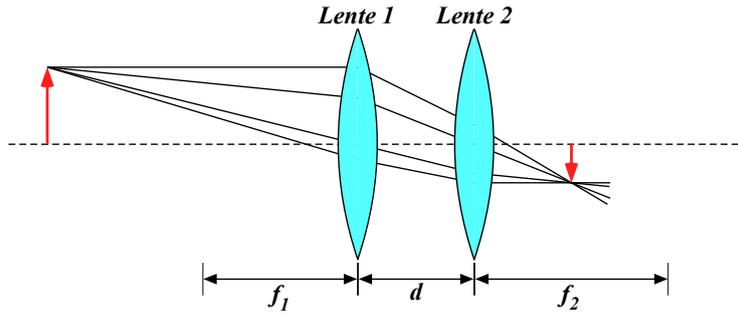


Figura 9. Sistema de duas lentes convergentes de distâncias focais  $f_1$  e  $f_2$  separadas por uma distância  $d$ .

Repetindo o procedimento que já foi feito, temos que escrever três matrizes: a de transferência para a lente 1, depois a matriz para o espaço vazio entre as lentes e, finalmente a matriz de transferência para a segunda lente. A matriz de transferência da associação vai ser o produto dessas três matrizes. A “espessura” da associação vai ser proporcional ao termo superior direito da matriz de transferência final e a distância focal da associação vai ser o inverso do termo inferior esquerdo dessa matriz, com sinal negativo.

A matriz de transferência da primeira lente convergente é:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \quad (30)$$

seguida da matriz do espaço entre as lentes

$$M_{esp} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (31)$$

e da matriz de transferência da segunda lente convergente:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

A matriz de transferência para esse sistema vai ser o produto das três matrizes acima:

$$M = M_2 \cdot M_{esp} \cdot M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Portanto, multiplicando a matriz de transferência da primeira lente pela matriz que representa o espaço vazio entre as lentes e depois multiplicando essa matriz pela matriz de transferência da segunda lente tem-se:

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & d \\ -\frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 f_2} - \frac{1}{f_1} & 1 - \frac{d}{f_2} \end{pmatrix} \quad (34)$$

Como já foi mencionado, o termo superior direito da matriz de transferência da associação é proporcional à “espessura” da associação, que, como estamos tratando de um sistema de duas lentes delgadas, é a distância entre elas, que é  $d$ . O termo inferior esquerdo é o inverso da distância focal da associação com sinal negativo:

$$-\frac{1}{f} = -\frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 f_2} - \frac{1}{f_1} \quad (35)$$

ou seja

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (36)$$

Essa é a distância focal de uma associação de duas lentes delgadas.

### 2.3.4 Método Matricial Aplicado a Lentes Espessas

Podemos também aplicar esse método a lentes cuja espessura não pode ser desprezada, como foi feito para o caso de lentes delgadas.

Vamos continuar supondo válida a aproximação paraxial, supondo que as lentes estão imersas no ar e que são construídas de material isotrópico e com índice de refração maior que o do ar. Se o material é isotrópico, podemos considerar os raios reversíveis.

Quase todas as convenções adotadas para as lentes delgadas continuam válidas para as lentes espessas, a menos das definições para as distâncias focais, distâncias do ponto objeto e do ponto imagem, que conforme se verá adiante, não podem mais ser medidas em relação ao plano que passa pelo centro da lente.

A matriz de transferência vai permitir o mesmo que para o caso das lentes delgadas, quer dizer, ela vai permitir prever como um raio incidente na lente vai emergir da mesma. Ou seja, que as propriedades de um sistema óptico sejam descritas, em termos gerais, pela localização dos seus pontos focais e de seus planos principais, cujas posições serão determinadas pelos elementos da matriz.

Para facilitar o entendimento, vamos observar a figura 10 a seguir:

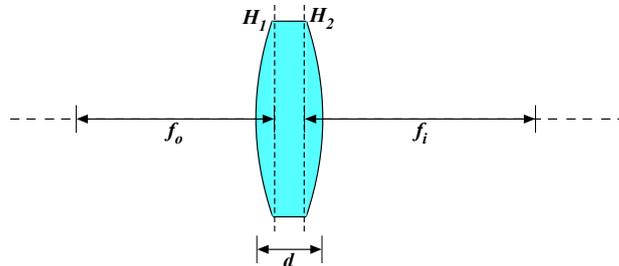


Figura 10. Diagrama de uma lente espessa, de espessura  $d$ , onde são mostrados os planos principais,  $H_1$  e  $H_2$ , os focos objeto,  $f_o$ , e imagem,  $f_i$ .

A figura 10 define os principais parâmetros de uma lente espessa, ou seja, a sua espessura  $d$ , os planos principais  $H_1$  e  $H_2$  e os focos objeto,  $f_o$ , e imagem,  $f_i$ .

A figura 11 mostra a trajetória verdadeira de dois raios luminosos provenientes de um objeto através de uma lente espessa.

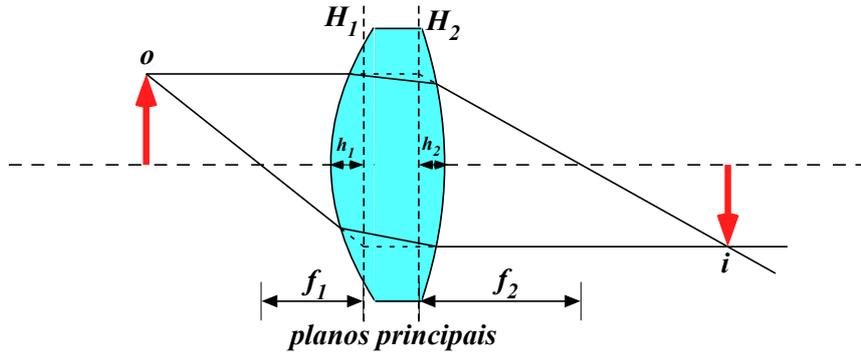


Figura 11. Diagrama ilustrando a propagação de raios luminosos através de uma lente espessa.

Nessa figura fica evidente a dificuldade em relação à medida das distâncias focais e distâncias da imagem e do objeto em relação à lente. Na lente delgada essas distâncias foram medidas em relação ao plano que passa pelo centro da lente, isso significa que estamos considerando que as duas refrações, uma em cada superfície da lente, estão ocorrendo num só ponto que pertence ao plano que passa pelo centro da lente. Se a lente é suficientemente fina, o erro que se estará cometendo não é muito significativo. Mas, para uma lente espessa, as duas refrações, uma na primeira e outra na segunda superfície estão afastadas o suficiente uma da outra para não permitir que se considere que toda a refração ocorre num ponto do plano central. O erro que se estaria cometendo seria muito grande.

Por outro lado seria interessante poder adaptar os conceitos que funcionam para a lente delgada para o caso de lentes espessas. Será que é possível continuar afirmando, como fizemos, que o raio que entra paralelo ao eixo óptico emerge passando pelo foco?

A figura 12 é um esquema de uma seção de uma lente e dos seus planos principais, com a trajetória imaginária dos dois raios luminosos.

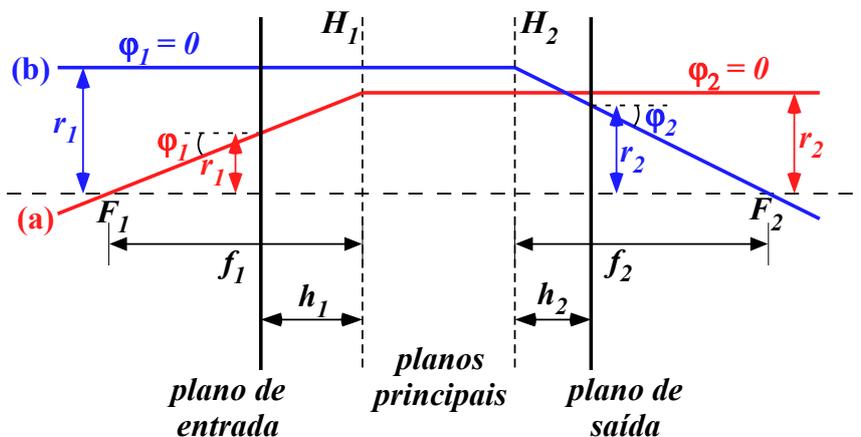


Figura 12. Esquema da trajetória virtual de dois raios luminosos através de uma lente espessa.

Observando a figura 12 (raio (b)), podemos dizer que essa afirmação é correta se, ao invés de considerarmos que essa mudança de direção ocorre no plano central, dissermos que ela ocorre em um ponto imaginário  $H_2$  que é o ponto de interseção dos prolongamentos do raio incidente na primeira superfície e do raio emergente da segunda superfície. Esse ponto  $H_2$  pertence a um plano imaginário que recebe o nome de plano principal da lente e é perpendicular ao eixo óptico. Nota-se que quanto mais espessa for a lente mais esse plano estará afastado do plano central.

A mesma discussão se aplica para o raio (a) que atinge a lente passando pelo foco e que deve emergir paralelo. Na figura 12 vemos que essa afirmação pode continuar válida se considerarmos que a mudança total de direção que o raio sofre ao atravessar a lente vai ocorrer em um ponto imaginário, que é a interseção dos prolongamentos do raio incidente na primeira superfície e o raio emergente da segunda superfície. Esse ponto é o ponto  $H_1$  que pertence a um outro plano imaginário que também recebe o nome de plano principal da lente. Uma lente espessa tem, portanto, dois planos principais.

O raio (a) que passa pelo primeiro ponto focal  $F_1$  vai emergir da lente paralelo ao eixo óptico. Um raio (b) incidente paralelo ao eixo óptico que atinja a lente vai emergir dela passando pelo seu segundo ponto focal  $F_2$ . Esses dois raios, que estão desenhados na figura 12 são chamados de raios principais do sistema óptico.

Da mesma forma que para o caso das lentes delgadas, os pontos focais se encontram sobre o eixo óptico da lente.

Podemos agora definir os demais parâmetros para uma lente espessa:

- a distância  $f_1$  é a distância entre o primeiro ponto focal  $F_1$  e o primeiro plano principal; ela é chamada de primeira distância focal dessa lente
- a distância  $f_2$  é a distância entre o segundo ponto focal  $F_2$  e o segundo plano principal; ela é chamada de segunda distância focal dessa lente
- como a lente está imersa num meio isotrópico (o meio tem o mesmo índice de refração de cada lado da lente)  $f_1 = f_2$
- $h_1$  é a distância entre o plano em que o raio atinge a lente, ou plano de entrada e o primeiro plano principal
- $h_2$  é a distância entre o segundo plano principal e o plano em que o raio emerge da lente, ou plano de saída
- a distância do objeto ao primeiro plano principal é chamada de  $o$
- a distância da imagem ao segundo plano principal é chamada de  $i$

- cada superfície esférica de uma lente tem um raio de curvatura  $R$ . O raio de curvatura será positivo se a superfície atingida pelo raio luminoso ao se propagar for côncava; e o raio de curvatura será negativo se a superfície atingida pelo raio luminoso em seu caminho for convexa. O raio de curvatura será infinito quando corresponder a uma face plana.

Vamos construir as matrizes que descrevem essa trajetória virtual. Primeiro vamos escrever a matriz do raio (a) que passa pelo ponto  $F_1$  e vai até  $H_1$ , para esse raio,  $\varphi_2^{(a)}$  é igual a zero:

$$\begin{aligned} r_2^{(a)} &= Ar_1^{(a)} + B\varphi_1^{(a)} \\ \varphi_2^{(a)} &= Cr_1^{(a)} + D\varphi_1^{(a)} \end{aligned} \quad (37)$$

$r_1^{(a)}$  é definido como a distância do eixo óptico ao ponto em que o raio atinge o plano de entrada da lente.  $\varphi_1^{(a)}$  é o ângulo que o raio incidente faz com o eixo óptico.  $r_2^{(a)}$  é a distância entre o eixo óptico e o ponto onde o prolongamento do raio incidente cruza o primeiro plano principal da lente. Então, como fica evidente na figura 12 (sempre dentro da aproximação paraxial):

$$\begin{aligned} r_2^{(a)} &= r_1^{(a)} + h_1\varphi_1^{(a)} \\ \varphi_2^{(a)} &= Cr_1^{(a)} + D\varphi_1^{(a)} = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

mas, como podemos ver na figura 12:

$$\varphi_1^{(a)} = \frac{r_1^{(a)}}{f - h_1} \quad (39)$$

Por outro lado, para o raio (b),  $\varphi_1^{(b)}$  é igual a zero e sempre estamos trabalhando com a mesma notação para os parâmetros, ou seja  $r_1^{(b)}$  e  $\varphi_1^{(b)}$  para a entrada e  $r_2^{(b)}$  e  $\varphi_2^{(b)}$  para a saída. Assim, na mesma figura 12:

$$\begin{aligned} r_2^{(b)} &= Ar_1^{(b)} \\ \varphi_2^{(b)} &= Cr_1^{(b)} \end{aligned} \quad (40)$$

da figura 12 vê-se que:

$$\varphi_2^{(b)} = -\frac{r_1^{(b)}}{f} \quad (41)$$

Portanto, como já tinha sido visto antes, o elemento  $C = -\frac{1}{f}$ . Da expressão (38) podemos escrever:

$$Cr_1^{(a)} = -D\varphi_1^{(a)} \quad (42)$$

substituindo (39) na equação acima vamos obter:

$$Cr_1^{(a)} = -D\frac{r_1^{(a)}}{f - h_1} \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{D + Cf}{C} \quad (43)$$

mas como  $C = -\frac{1}{f}$

$$h_1 = \frac{D-1}{C} \quad (44)$$

Da figura 12 podemos ver que:

$$\varphi_2^{(b)} = -\frac{r_2^{(b)}}{f-h_2} \quad (45)$$

e usando, da equação (40), que  $\varphi_2 = Cr_1$  e que  $r_2 = Ar_1$  temos

$$Cr_1^{(b)} = -\frac{r_2^{(b)}}{f-h_2} = -\frac{Ar_1^{(b)}}{f-h_2} \quad (46)$$

e obtemos que

$$h_2 = \frac{A-1}{C} \quad (47)$$

Portanto, uma vez tendo a matriz de transferência da lente espessa, temos automaticamente as posições de seus dois planos principais, através de  $h_1$  e  $h_2$ .

Agora vamos construir a matriz de transferência para uma lente espessa como a da figura 13.

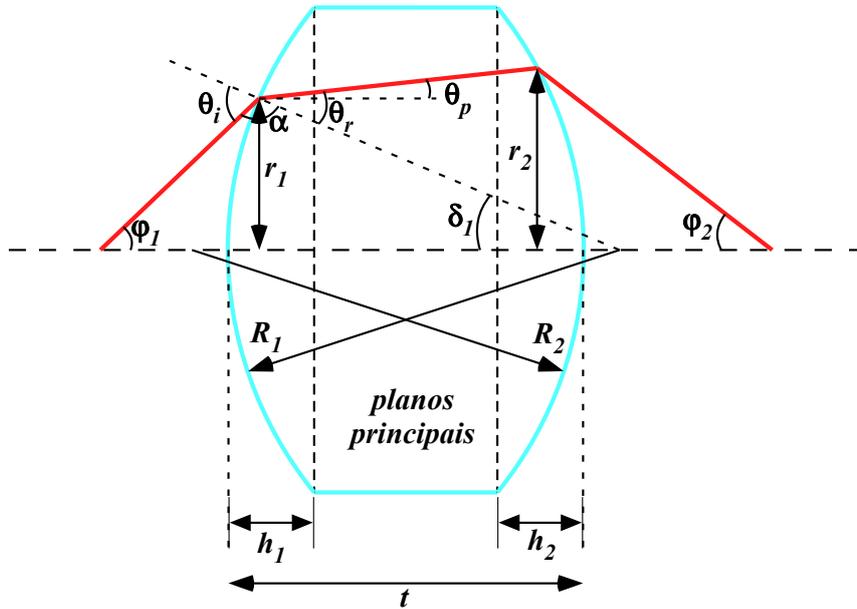


Figura 13. Diagrama que ilustra a propagação de um raio luminoso através de uma lente espessa.

Essa matriz vai ser o produto de três matrizes de transferência: (i)  $M_1$  é a matriz para a primeira superfície esférica atingida pelo raio luminoso; (ii)  $M_2$  é a matriz que descreve o caminho do raio luminoso no meio da lente (espessura  $t$ ); e (iii)  $M_3$  é a matriz que representa a segunda interface esférica.

$$M = M_3 M_2 M_1 \quad (48)$$

Notar a ordem dessas matrizes (essa ordem já foi observada antes, para a lente delgada),  $M_1$  é a última à direita porque ela opera primeiro no raio incidente, representando a primeira superfície que ele encontra.

Na primeira superfície esférica encontrada pelo raio luminoso pode-se (considerando a aproximação paraxial e  $n_{ar} = 1$ ) obter:

$$\varphi_1 + \delta_1 + \alpha = 180^\circ = \theta_i + \alpha$$

ou

$$\varphi_1 + \delta_1 = \theta_i \quad (49)$$

Aplicando a lei de Snell (na aproximação paraxial  $\text{sen}\theta \approx \theta$ ):

$$\varphi_1 + \delta_1 = n\theta_r = n(\theta_p + \delta_1) \quad (50)$$

mas como

$$\text{sen}\delta_1 \approx \delta_1 = \frac{r_1}{R_1}$$

podemos reescrever (50) como:

$$\theta_p = \frac{(1-n)}{nR_1}r_1 + \frac{1}{n}\varphi_1 \quad (51)$$

$$r_2 = r_1$$

Assim, a matriz da primeira interface fica:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(1-n)}{nR_1} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \quad (52)$$

Podemos usar a definição de potência,  $P$ , de uma superfície refratora,  $P_1 = (n - 1)/R_1$  ( $R_1$  que é o raio de curvatura da primeira superfície é medido em metros e a potência,  $P_1$ , é metro<sup>-1</sup> ou dioptria) para reescrever a matriz (52):

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{P_1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \quad (53)$$

Na aproximação paraxial considera-se que todos os raios que passam pela lente espessa atravessam a mesma distância,  $t$ , dentro da lente. Nesse caso  $M_2$  será (matriz do espaço vazio (12)):

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (54)$$

A matriz  $M_3$  que representa a segunda superfície refratora, tem o mesmo formato de  $M_1$ , apenas levando-se em conta que o raio vem de um meio com índice de refração  $n$  e vai para um meio de índice de refração 1 (o contrário da primeira superfície) e que o raio de curvatura da segunda superfície é  $R_2$ :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(n-1)}{R_2} & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & n \end{pmatrix} \quad (55)$$

Finalmente a matriz de transferência da lente espessa considerada vai ser o produto das três matrizes  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ :

$$M = M_3 M_2 M_1 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{tP_1}{n} & \frac{t}{n} \\ \frac{tP_1P_2}{n} - P_1 - P_2 & 1 - \frac{tP_2}{n} \end{pmatrix} \quad (56)$$

Sabemos que a distância focal dessa lente está relacionada ao elemento inferior esquerdo da matriz de transferência:

$$-\frac{1}{f} = \frac{tP_1P_2}{n} - P_1 - P_2 \quad (57)$$

Como  $P_1 = (n-1)/R_1$  e  $P_2 = (1-n)/R_2$  podemos substituir na equação acima para obter a distância focal  $f$  em termos dos raios de curvatura  $R_1$  e  $R_2$ :

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{(n-1)^2}{n} \left( \frac{t}{R_1R_2} \right) \quad (58)$$

A espessura da lente é proporcional ao elemento superior direito da matriz de transferência que é  $(t/n)$ , onde  $t$  é, de fato, a espessura da lente.

As distâncias  $h_1$  (do plano de entrada ao primeiro plano principal da lente) e  $h_2$  (do segundo plano principal ao plano de saída da lente) podem agora ser calculadas, através das expressões (44) e (47) e da matriz de transferência (56):

$$h_1 = \frac{t}{n \left( 1 + \frac{P_1}{P_2} - t \frac{P_1}{n} \right)} \quad (59)$$

e

$$h_2 = \frac{t}{n \left( 1 + \frac{P_2}{P_1} - t \frac{P_2}{n} \right)} \quad (60)$$

Vamos ver o que acontece com a matriz de transferência se considerarmos  $t = 0$ , ou seja, uma lente delgada:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(P_1 + P_2) & 1 \end{pmatrix} \quad (61)$$

substituindo os valores de  $P_1$  e  $P_2$  e considerando que o elemento inferior esquerdo é menos o inverso da distância focal da lente delgada, vamos obter:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (62)$$

essa equação é conhecida como a equação do fabricante para uma lente delgada cujas superfícies têm raios de curvatura  $R_1$  e  $R_2$ . Para ter o foco correto deve-se levar em conta as convenções de sinais adotadas.

### 3 Referências

- [1] Optics - Eugene Hecht 5<sup>th</sup> Edition - Global Edition, Pearson Educational Edition (2017).