EESC • USP

Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo

Ação Integral

Aula 21

SEM 0169 – Sistemas de Controle

Profa. Maíra Martins da Silva
mairams@sc.usp.br
(16) 9 9291 8310

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Objetivo

Entender a relação ação integral e o erro de regime permanente.

Erro de regime permanente

$r(t)$: referência ⇨ $r(t) = \frac{t^n}{n!}\mathbb{I}(t) \qquad t \geq 0$

A função degrau unitário $\mathbb{I}(t)$ $\begin{cases} = 1 & t \geq 0 \\ = 0 & t < 0 \end{cases}$

$n = 0$ ⇨ Degrau unitário

$n = 1$ ⇨ Rampa com inclinação unitária

$n = 2$ ⇨ Parábola com a segunda derivada unitária

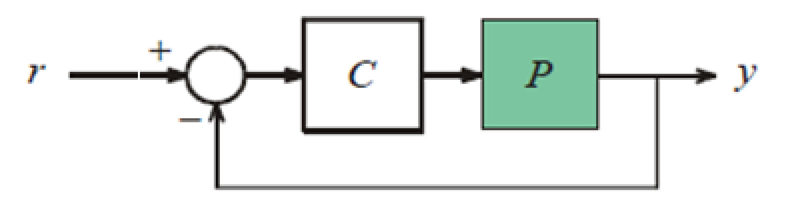
Definição do erro

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

Definição do erro de regime permanente

$$e_\infty = lim_{t\to\infty} e(t) = lim_{s\to 0} sE(s)$$

Erro de regime permanente



$r(t)$: referência ⇨ $r(t) = \frac{t^n}{n!}\mathbb{I}(t)$ ⇨ Laplace $R(s) = \frac{1}{s^{n+1}}$

Malha aberta $\frac{Y}{E}(s) = L(s) = PC(s)$

Malha fechada $\frac{Y}{R}(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$

Erro $E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - \frac{L(s)}{1 + L(s)}R(s)$

$$E(s) = \frac{1 - L(s) + L(s)}{1 + L(s)}R(s) = \frac{1}{1 + L(s)}R(s)$$

Erro de regime permanente

$n = 0$ ⇨ Degrau unitário

$n = 1$ ⇨ Rampa com inclinação unitária

$n = 2$ ⇨ Parábola com a segunda derivada unitária

$$R(s) = \frac{1}{s^{n+1}}$$

$$e_{\infty}^{(n)} = lim_{s\to 0} sE(s) = lim_{s\to 0}\ s\frac{1}{1+L(s)}R(s)$$

$$\boxed{e_{\infty}^{(n)} = lim_{s\to 0} \frac{1}{s^n[1+L(s)]}}$$

Bosgra et al. Design Methods for Control Systems. Notes for a course of the Dutch Institute of Systems and Control, Winter term 2006–2007

Erro de regime permanente

$$e_{\infty}^{(n)} = lim_{s\to 0} \frac{1}{s^n[1+L(s)]}$$

O sistema é do tipo **k** se ele tiver o $L(s)$ com **k** polos na origem

$$L(s) = Lo/s^k$$

$$\lim_{s\downarrow 0} s^n L(s) \begin{cases} = \infty & \text{for } 0 \leq n < k, \\ \neq 0 & \text{for } n = k, \\ = 0 & \text{for } n > k. \end{cases}$$

Bosgra et al. Design Methods for Control Systems. Notes for a course of the Dutch Institute of Systems and Control, Winter term 2006–2007

Erro de regime permanente

$$e_{\infty}^{(n)} = lim_{s \to 0} \frac{1}{s^n[1 + L(s)]}$$

$$\lim_{s \downarrow 0} s^n L(s) \begin{cases} = \infty & \text{for } 0 \leq n < k, \\ \neq 0 & \text{for } n = k, \\ = 0 & \text{for } n > k. \end{cases}$$

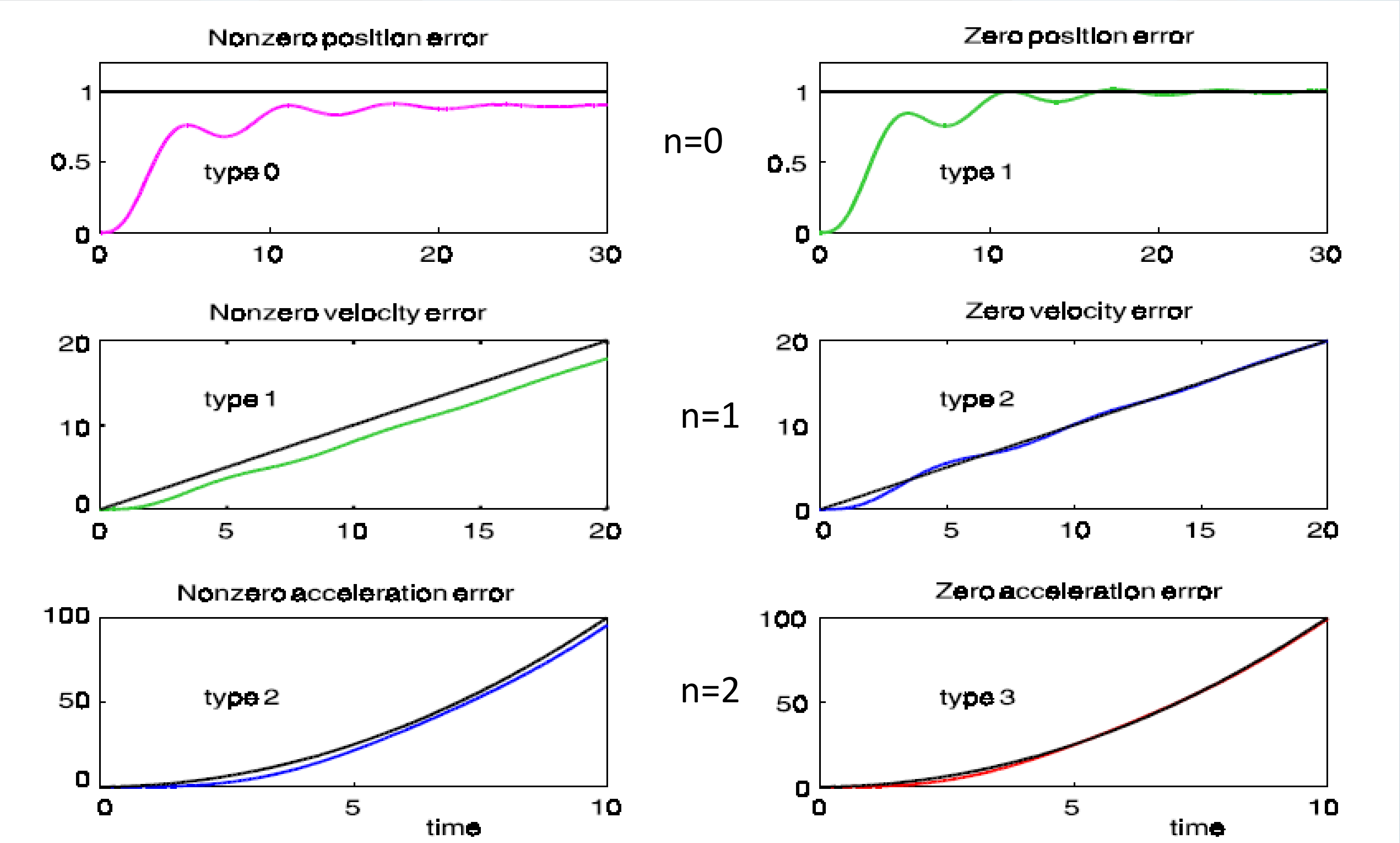
O sistema é do tipo **k** se ele tiver o $L(s)$ com **k** polos na origem.

$$\lim_{s \downarrow 0} \varepsilon_{\infty}^{(n)} \begin{cases} = 0 & \text{for } 0 \leq n < k, \\ \neq 0 & \text{for } n = k, \\ = \infty & \text{for } n > k. \end{cases}$$

Bosgra et al. Design Methods for Control Systems. Notes for a course of the Dutch Institute of Systems and Control, Winter term 2006–2007

Erro de regime permanente

O sistema é do tipo **k** se ele tiver o $L(s)$ com **k** polos na origem.



Bosgra et al. Design Methods for Control Systems. Notes for a course of the Dutch Institute of Systems and Control, Winter term 2006–2007

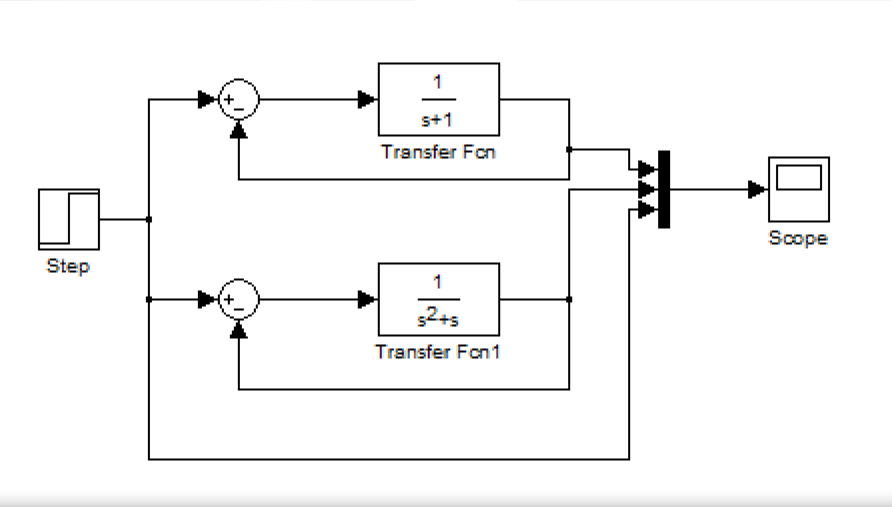
Erro de regime permanente

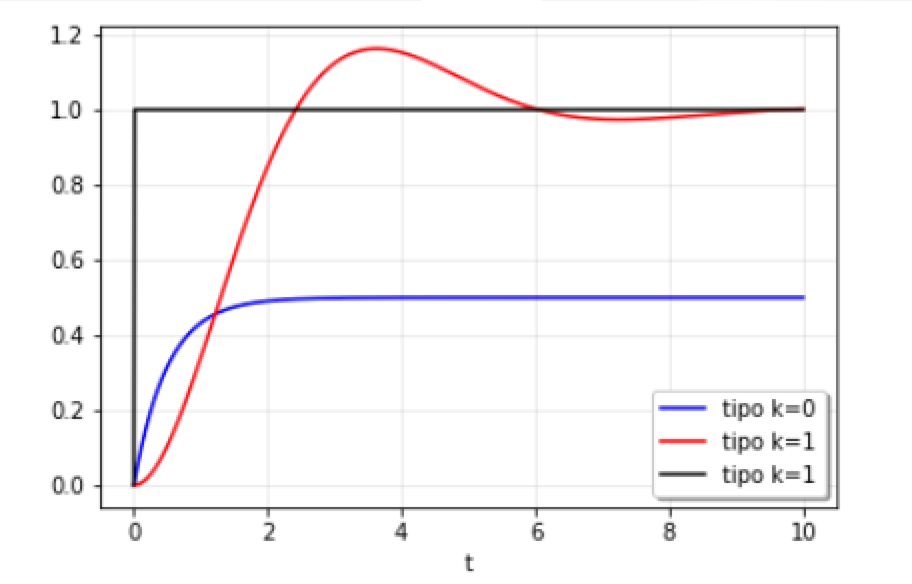
```python
# malha aberta
L1 = TransferFunction(1, [1,1]) # tipo k=0
L2 = TransferFunction(1, [1,1,0]) # tipo k=0

plant_tf1 = ctl.feedback(L1, 1)
plant_tf2 = ctl.feedback(L2, 1)

t_ = np.linspace(0, 10, 1001)
u_ = step_input = t_>0
```

Ver Controle_aula21_ex1.ipynb





Constante de erro de posição

Se o sistema for do tipo **k = 0** e a entrada **n=0** (degrau unitário), então o erro de regime é

$$e_{\infty}^{(0)} = lim_{s\to 0} \frac{1}{s^0[1+L(s)]} = \frac{1}{1+L(0)} = \frac{1}{1+K_p}$$

O valor $\boldsymbol{K_p = L(0)}$ é a constante de erro de posição.

Constante de erro de velocidade

Se o sistema for do tipo **k = 1** e a entrada **n = 1** (rampa com inclinação unitária), então o erro de regime é

$$e_{\infty}^{(1)} = lim_{s\to 0}\ s\frac{1}{s^2[1+L(s)]} = lim_{s\to 0}\frac{1}{s[1+L(s)]}$$
$$= lim_{s\to 0}\frac{1}{sL(s)} = \frac{1}{K_v}$$

O valor $\boldsymbol{K_v} = lim_{s\to 0}\boldsymbol{sL}(\boldsymbol{s})$ é a constante de erro da velocidade posição.

Constante de erro de velocidade

Se o sistema for do tipo **k = 2** e a entrada **n = 2** (parabola com segunda derivada unitária), então o erro de regime é

$$e_{\infty}^{(2)} = lim_{s \to 0}\ s \frac{1}{s^3[1+L(s)]} = lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2[1+L(s)]}$$
$$= lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2 L(s)} = \frac{1}{K_a}$$

O valor $\boldsymbol{K_s} = lim_{s \to 0} \boldsymbol{s^2 L(s)}$ é a constante de erro de aceleração.

Constantes

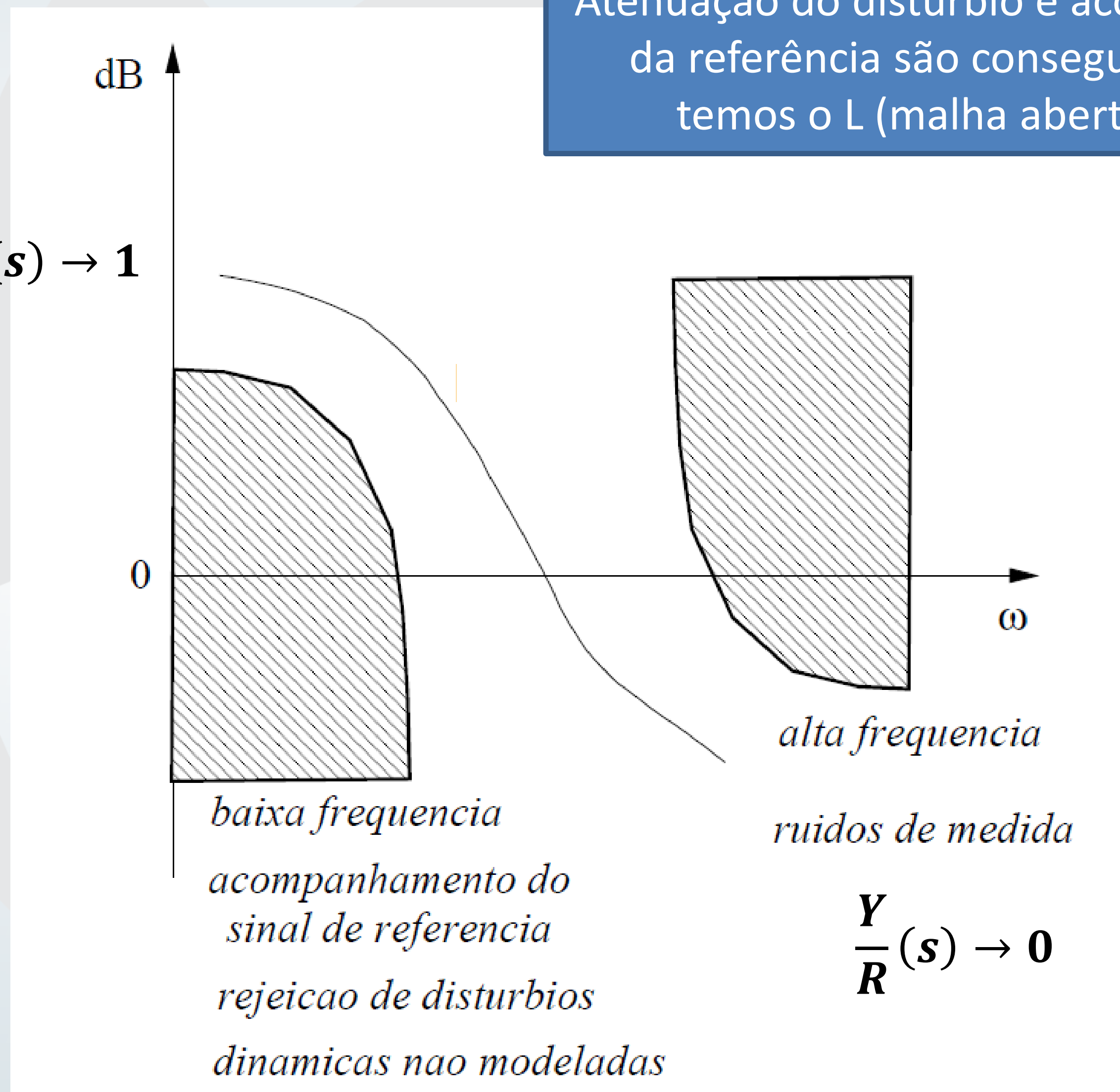
System	Input		
	n=0 step	n=1 ramp	n=2 parabola
type 0	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
type 1	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
type 2	0	0	$\frac{1}{K_a}$

Bosgra et al. Design Methods for Control Systems. Notes for a course of the Dutch Institute of Systems and Control, Winter term 2006–2007

No domínio da frequência

Atenuação do distúrbio e acompanhamento da referência são conseguidos quando temos o L (malha aberta) grande!

$\frac{Y}{R}(s) \rightarrow 1$



$L \rightarrow 0$

$\frac{Y}{R}(s) \rightarrow 0$

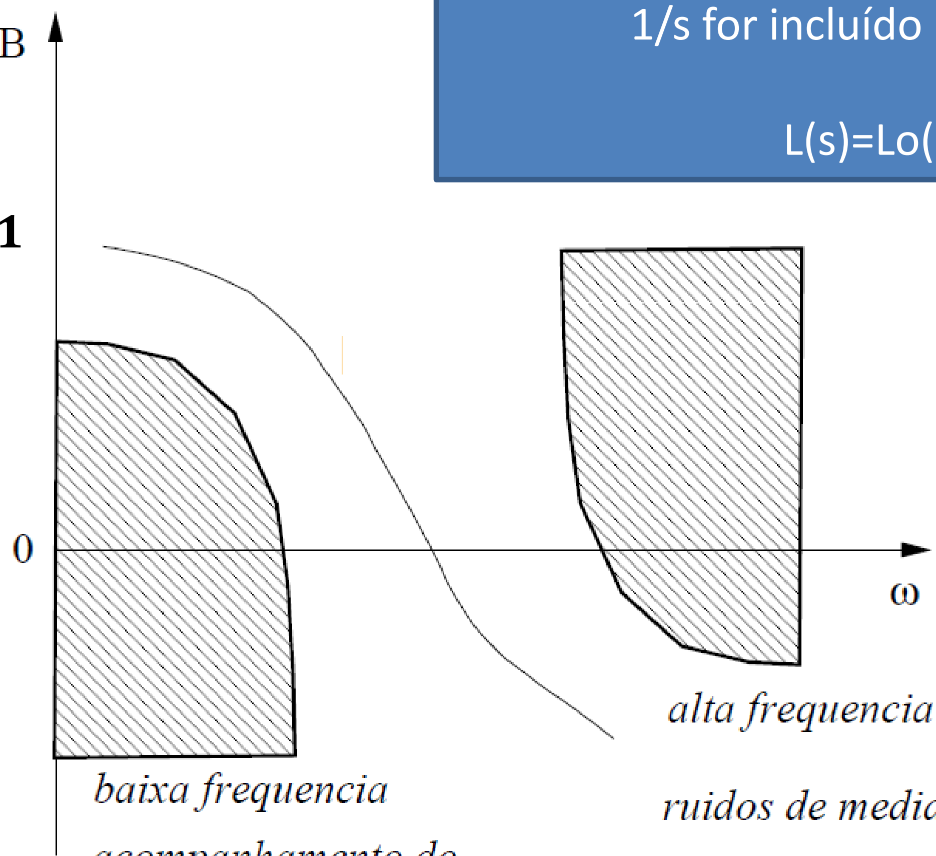
$L \rightarrow \infty$

$L \rightarrow \infty$

No domínio da frequência

L pode ser grande em baixas frequências se 1/s for incluído no sistema.

L(s)=Lo(s)/s



$\frac{Y}{R}(s) \to 1$

ruidos de medida $L \to 0$

$\frac{Y}{R}(s) \to 0$

$L \to \infty$ acompanhamento do sinal de referencia

$L \to \infty$ rejeicao de disturbios

dinamicas nao modeladas

No domínio da frequência

"Pure" integral control: $$C(s) = \frac{1}{sT_i}$$

PI control: $$C(s) = g\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)$$

PID control: $$C(s) = g\left(sT_d + 1 + \frac{1}{sT_i}\right)$$

Ziegler-Nichols tuning rules

Conclusões

- Temos muitas ferramentas para avaliar um sistema em malha fechada !!!

EESC • USP

www.eesc.usp.br