EESC • USP

Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo

Desempenho no Domínio do Tempo

Aula 17

SEM 0169 – Sistemas de Controle

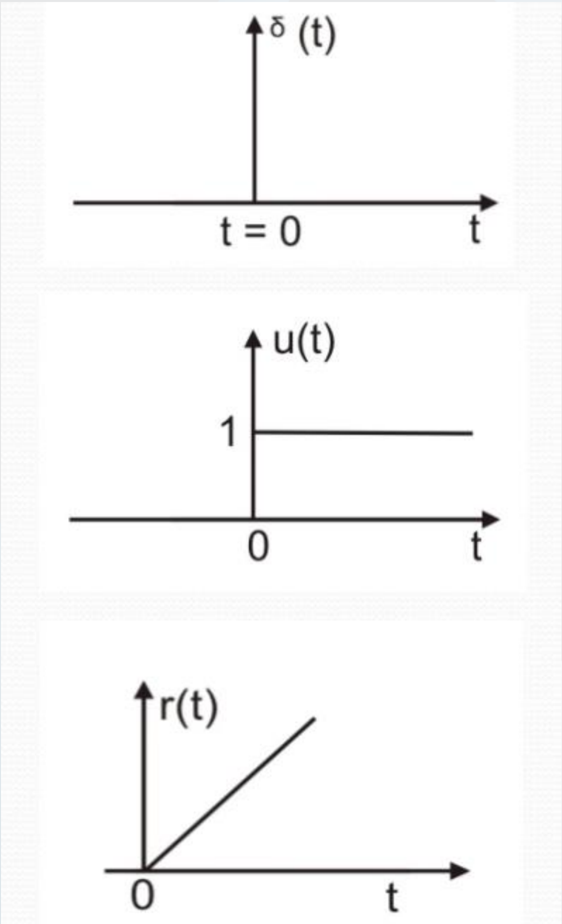
Profa. Maíra Martins da Silva
mairams@sc.usp.br
(16) 9 9291 8310

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

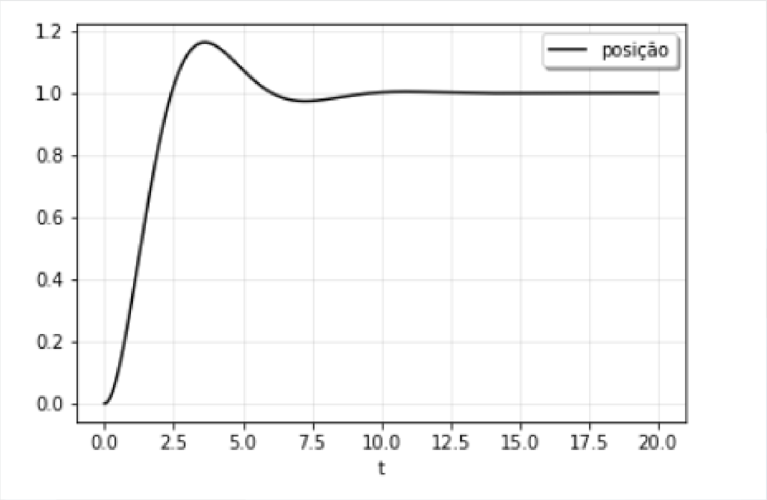
Objetivo

Métricas no domínio do tempo (mais um pouco sobre o papel dos polos nas respostas e no desempenho dos sistemas). Hoje vamos ver sistemas de segunda ordem.

Introdução



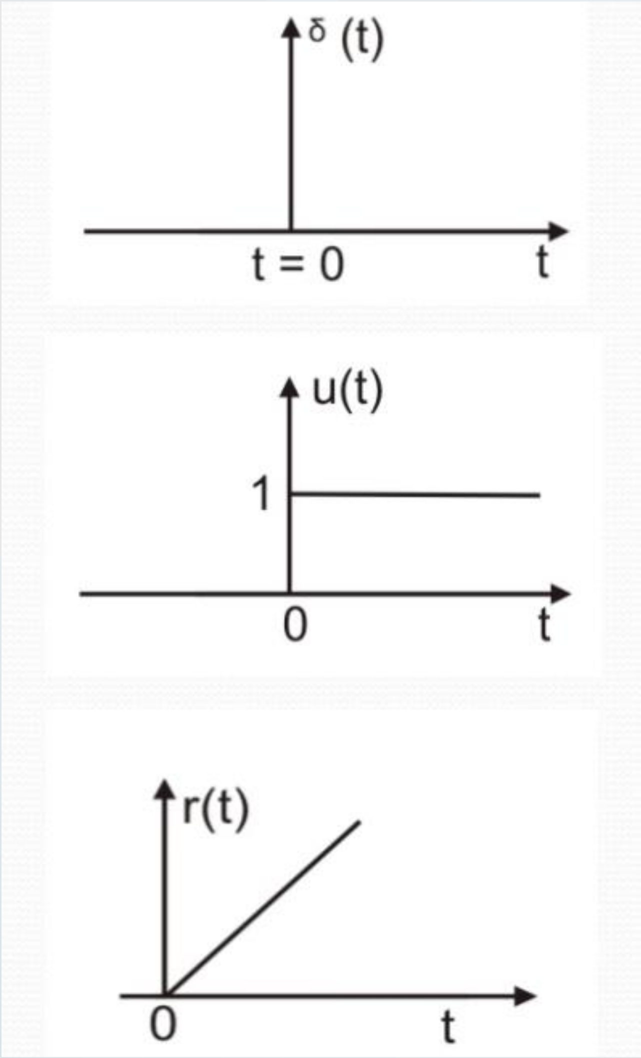
A ideia é propor métricas a partir de respostas no domínio do tempo para entradas padrões (u(t) pode ser um impulso, um degrau, uma rampa, etc.).



Resposta ao Degrau
plant_tf = TransferFunction(1, [1,1,1])

https://www.slideshare.net/Ravirajsolanki1/time-response-analysis-80455887

Introdução



Impulso
$$\begin{cases} u(t) = \delta(t)\ se\ t = 0 \\ u(t) = 0 \quad se\ t \neq 0 \end{cases}$$

Laplace do Impulso: $U(s) = 1$

Degrau
$$\begin{cases} u(t) = A\ se\ t \geq 0 \\ u(t) = 0\ \ se\ t < 0 \end{cases}$$

Laplace do Degrau: $U(s) = A/s$

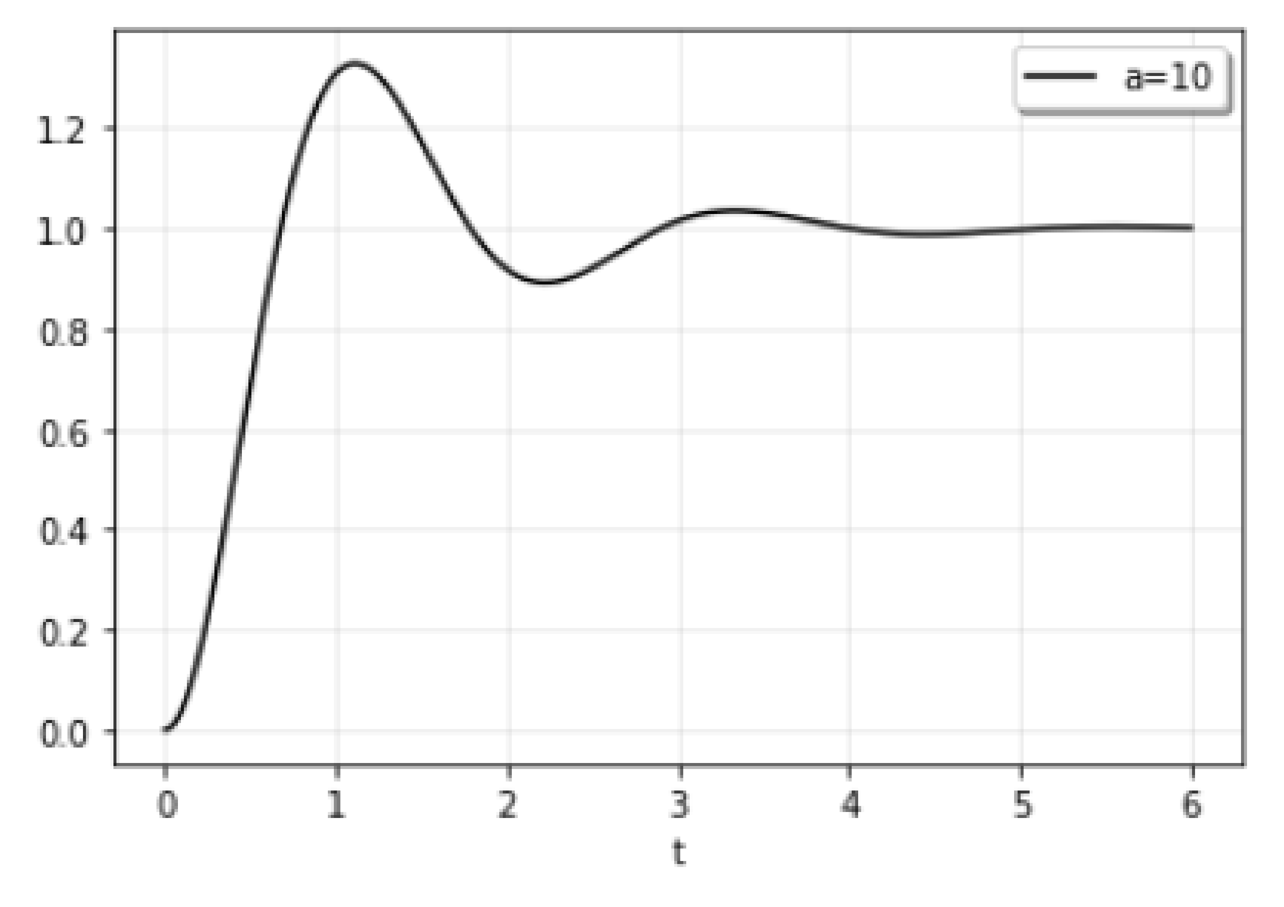
Degrau
$$\begin{cases} u(t) = At\ se\ t \geq 0 \\ u(t) = 0\ \ se\ t\ < 0 \end{cases}$$

Laplace do Rampa: $U(s) = A/s^2$

https://www.slideshare.net/Ravirajsolanki1/time-response-analysis-80455887

Introdução

A gente precisa propor métricas para o sistema de segunda ordem subamortecido!



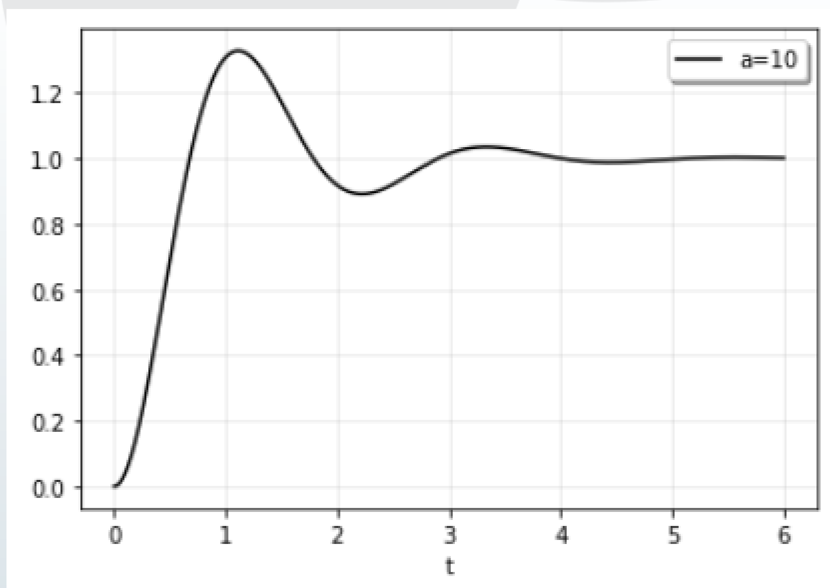
Introdução - Sistemas de 2º. ordem

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\frac{K_r \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}} \longrightarrow y(t)$$

Respostas superamortecidas $0 < \zeta < 1$

Dois polos complexos conjugados $\quad p = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,i$

Resposta ao degrau unitário $\quad y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n\,t} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t - \phi\right) k$

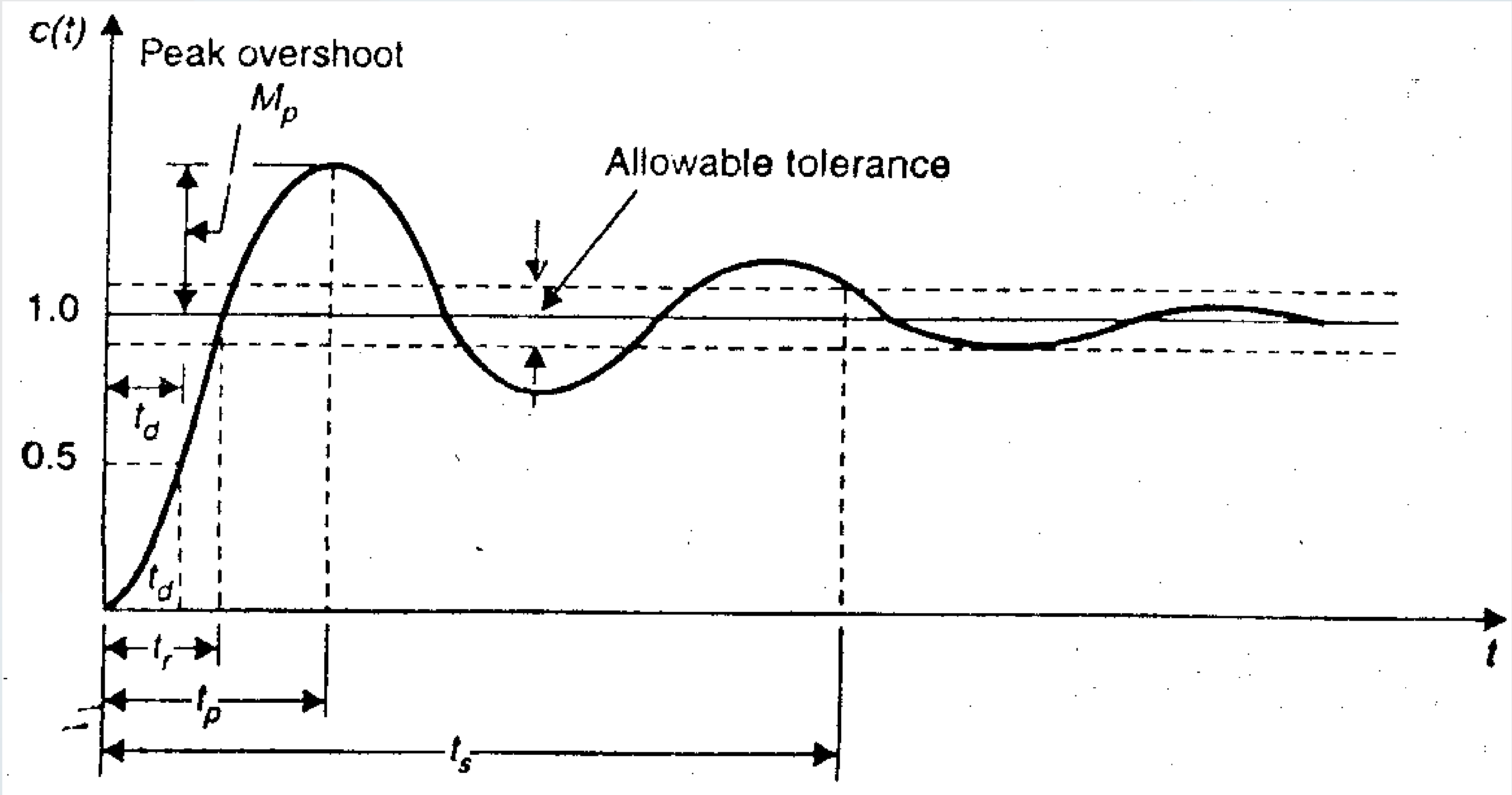


Métricas

- Erro estático (e_{ss}): $e_{ss} = lim_{t\to\infty} e(t)$ para uma entrada padronizada
- Tempo de subida (T_r): tempo necessário para que a resposta do sistema $y(t)$ alcançar pela primeira vez a resposta de regime $y(\infty)$
- Tempo de acomodação (T_r): O tempo de assentamento é definido pelo instante de tempo que o sinal alcança a faixa de ± um determinado valor percentual (usualmente 2% ou 5%)
- Tempo de pico (T_p): tempo necessário para a resposta chegar ao seu valor máximo.
- Máximo sobressinal (M_p): O máximo sobressinal é o maior erro percentual em relação ao valor final $y(\infty)$. Esse valor ocorre no instante de pico e pode ser definido por:

$$M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} . 100\%$$

Métricas

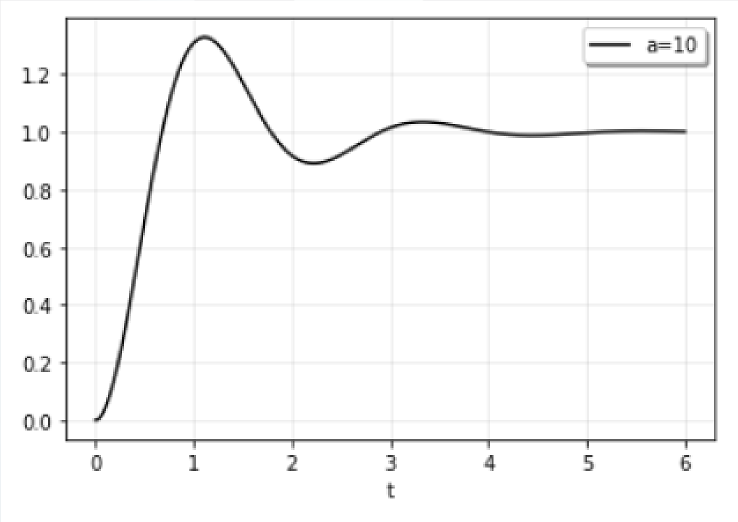


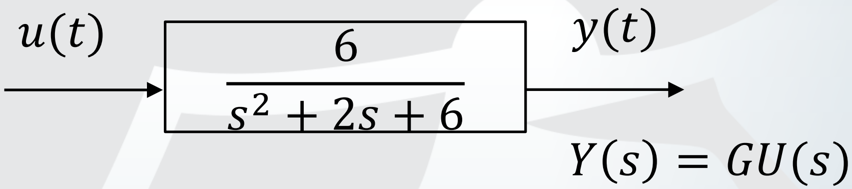
https://zkchong.files.wordpress.com/2010/02/transient.gif

Erro Estático

Erro estático (e_{ss}): $e_{ss} = lim_{t\to\infty} e(t)$ para uma entrada padronizada

Usar o Teorema do valor final: $y_\infty = lim_{t\to\infty} y(t) = lim_{s\to 0} sY(s)$

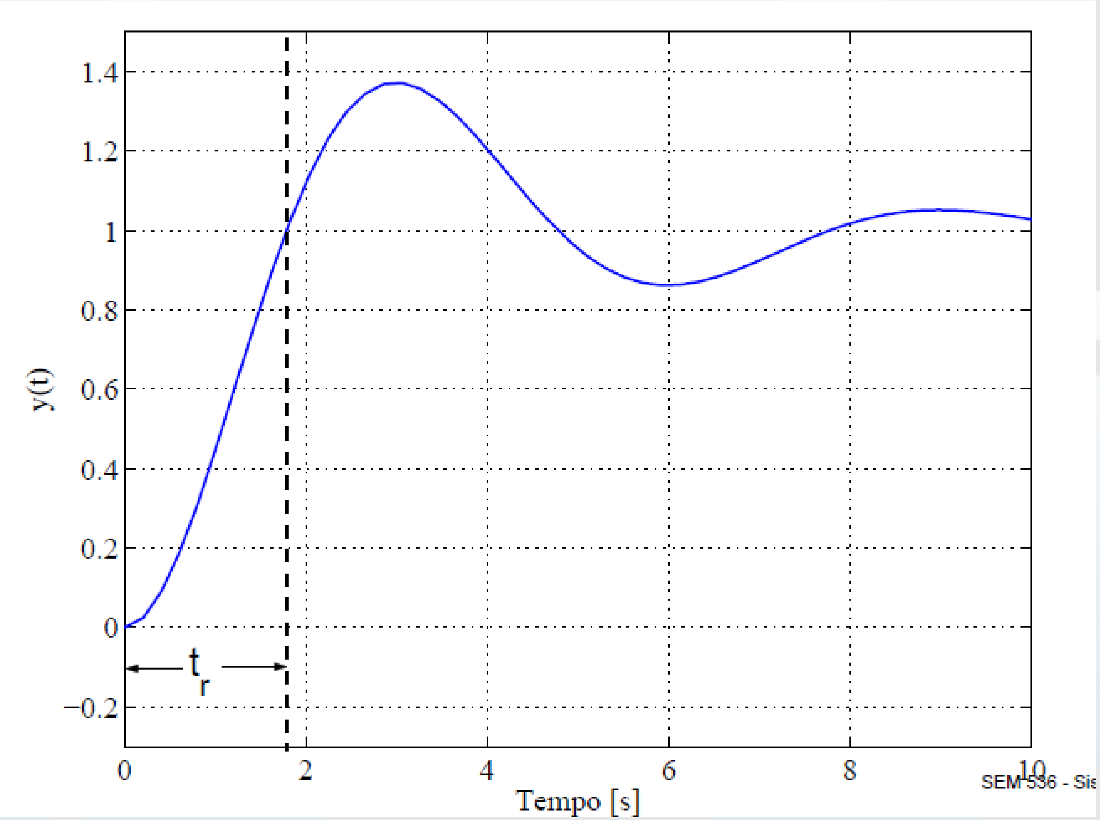




$$y_\infty = lim_{s\to 0} sY(s) = lim_{s\to 0} s \frac{6}{s^2+2s+6}\frac{1}{s} = 1$$

Tempo de subida

Tempo de subida (T_r): tempo necessário para que a resposta do sistema $y(t)$ alcançar pela primeira vez a resposta de regime $y(\infty)$



Retirado dos slides do prof. Adriano

Tempo de subida

Tempo de subida (T_r): tempo necessário para que a resposta do sistema $y(t)$ alcançar pela primeira vez a resposta de regime $y(\infty)$

Para sistemas subamortecidos

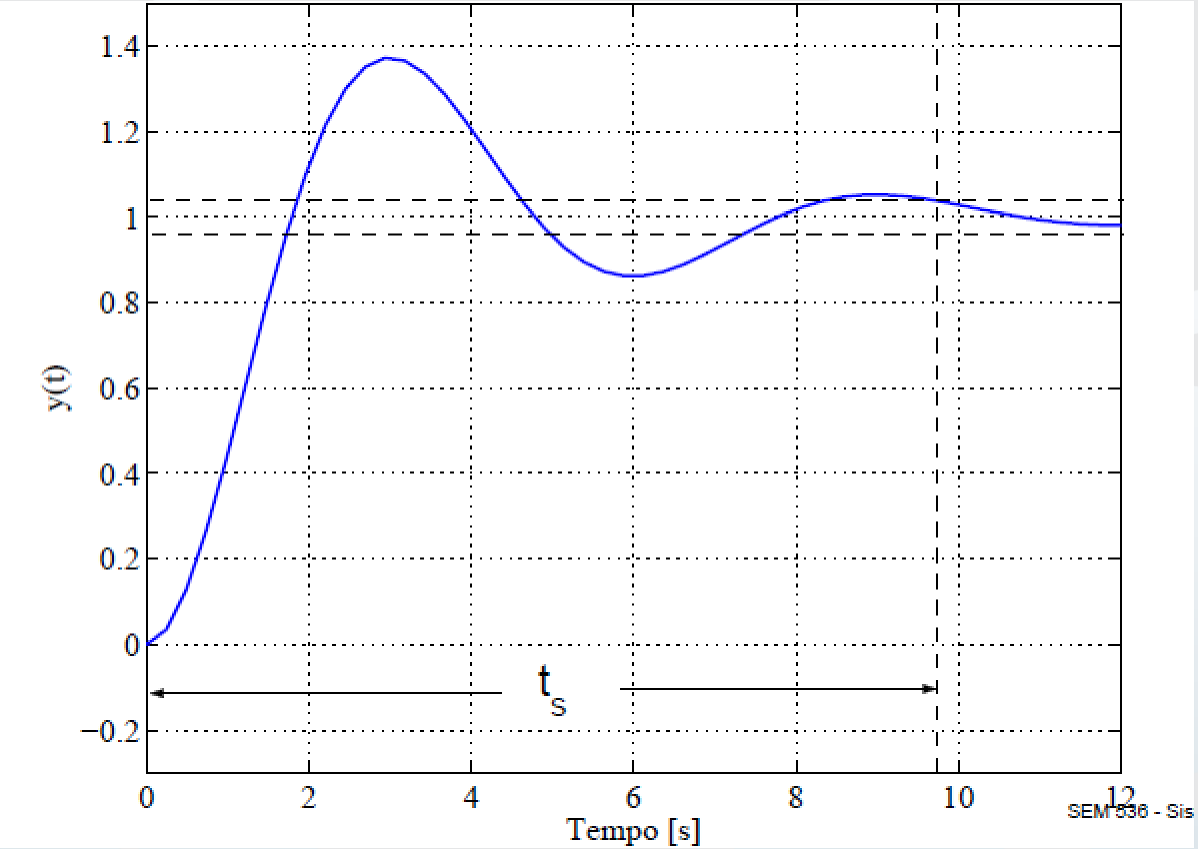
$$t_r = \frac{1}{\omega_n(\sqrt{1-\zeta^2})} tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{-\zeta\omega_n}\right)$$

Para t_r ser pequeno, w_n deve ser grande e ζ próximo a zero. Aproximação (de $y = 0,1K_R$ a $y = 0,9K_R$):

$$t_r = \frac{1.8}{\omega_n}$$

Tempo de assentamento

Tempo de assentamento (T_r): O tempo de assentamento é definido pelo instante de tempo que o sinal alcança a faixa de ± um determinado valor percentual (usualmente 2% ou 5%)



Retirado dos slides do prof. Adriano

Tempo de acomodação

Tempo de acomodação (T_r): O tempo de assentamento é definido pelo instante de tempo que o sinal alcança a faixa de ± um determinado valor percentual (usualmente 2% ou 5%)

Para sistemas subamortecidos:

Critério de 1%: $$t_s = \frac{4{,}6}{\zeta\omega_n}$$

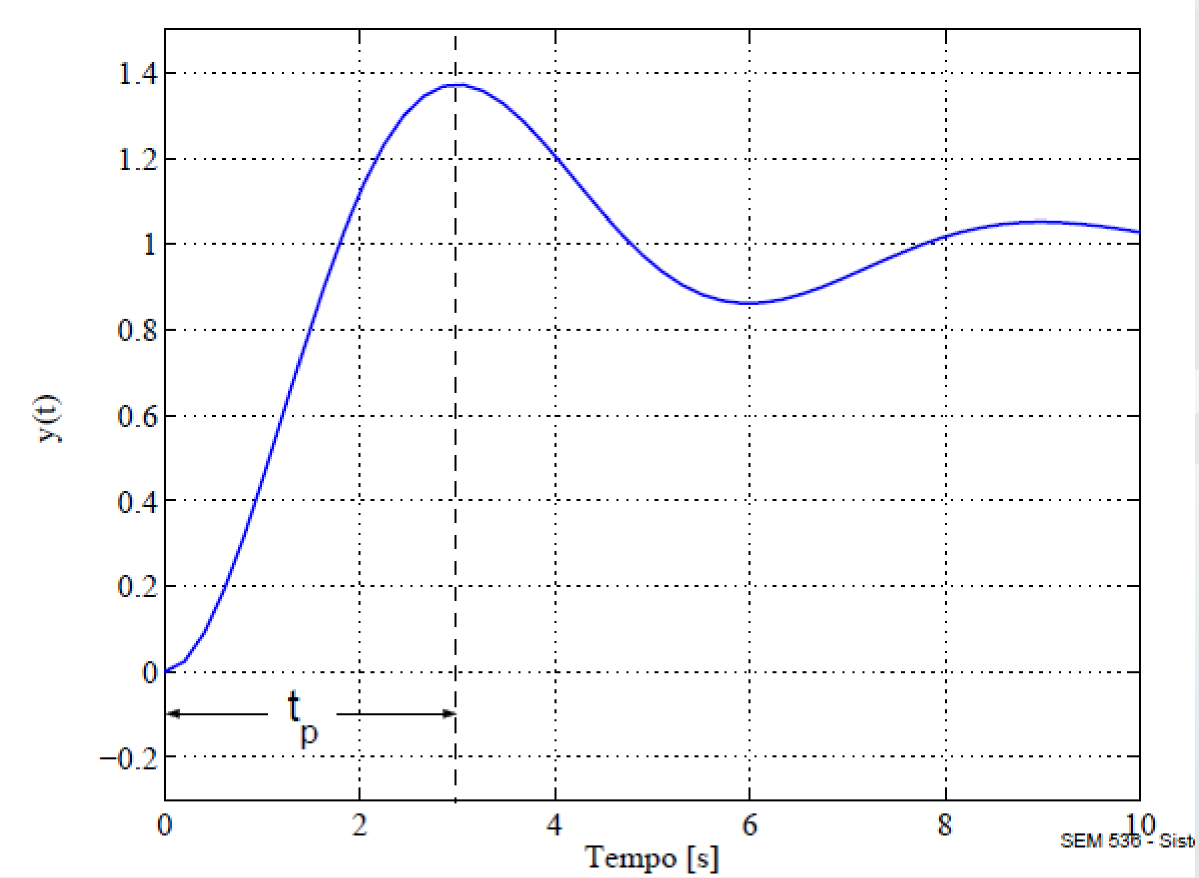
Critério de 2%: $$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

Critério de 5%: $$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

Retirado dos slides do prof. Adriano

Tempo de pico

Tempo de pico (T_p): tempo necessário para a resposta chegar ao seu valor máximo.



Retirado dos slides do prof. Adriano

Tempo de pico

Tempo de pico (T_p): tempo necessário para a resposta chegar ao seu valor máximo.

Para sistemas subamortecidos

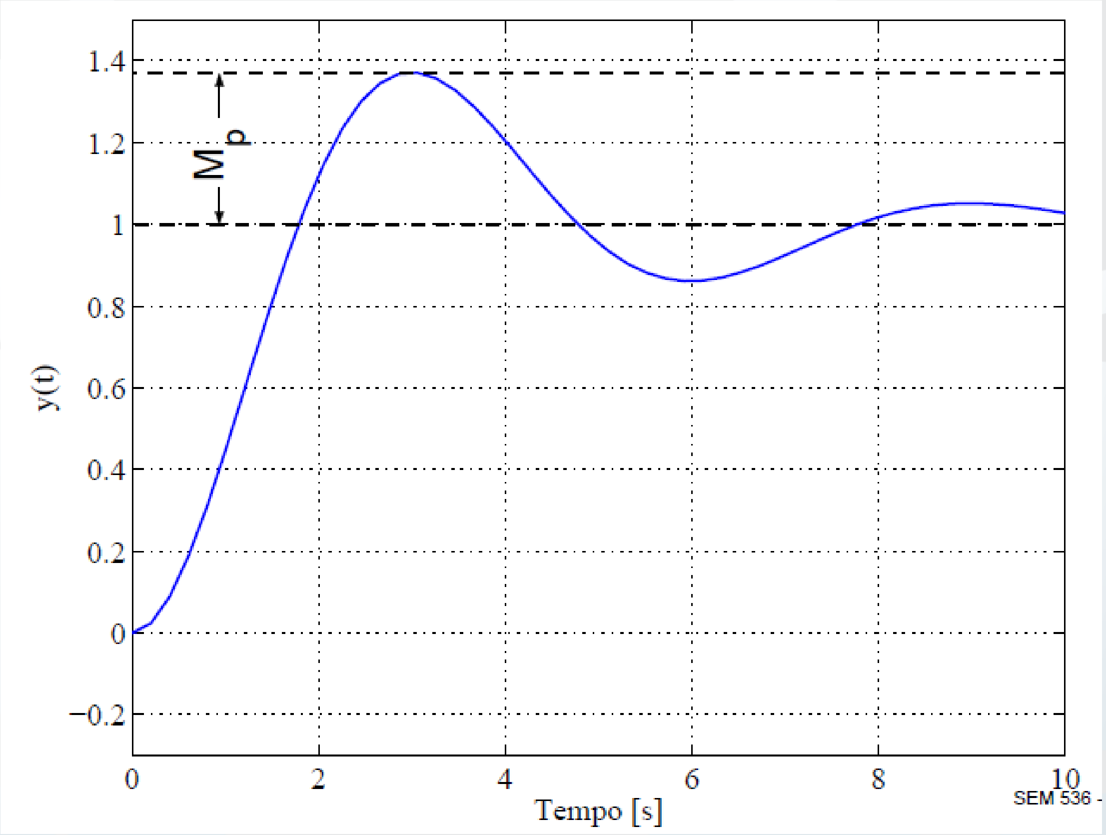
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}$$

t_p corresponde a meio ciclo da freqüência de oscilação amortecida

Retirado dos slides do prof. Adriano

Máximo Sobressinal

Máximo sobressinal (M_p): O máximo sobressinal é o maior erro percentual em relação ao valor final $y(\infty)$. Esse valor ocorre no instante de pico e pode ser definido por:



Retirado dos slides do prof. Adriano

Máximo Sobressinal

Máximo sobressinal (M_p): O máximo sobressinal é o maior erro percentual em relação ao valor final $y(\infty)$. Esse valor ocorre no instante de pico e pode ser definido por:

Para sistemas subamortecidos

$$M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$$

Sobre-sinal máximo percentual:

$e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} \times 100\%$

Para M_p ser pequeno, ζ deve ser próximo da unidade

Retirado dos slides do prof. Adriano

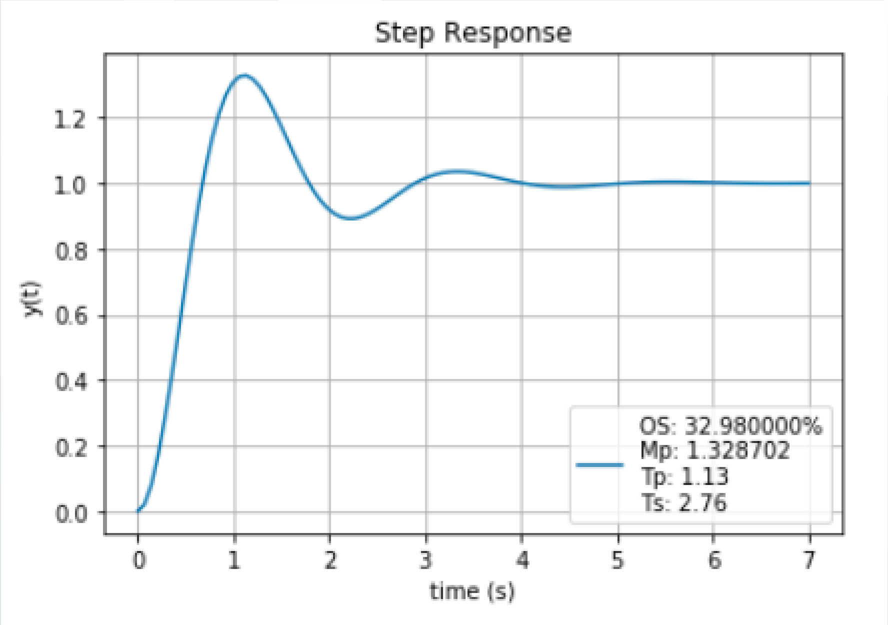
Exemplo 1

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\dfrac{K_r\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}} \longrightarrow y(t) \qquad u(t) \longrightarrow \boxed{\dfrac{6}{s^2 + 2s + 6}} \longrightarrow y(t)$$

Erro estático:
(degrau unitário)

$$y_\infty = lim_{s\to 0} sY(s) = lim_{s\to 0} s\,\frac{6}{s^2+2s+6}\frac{1}{s} = 1$$

$$\therefore\ e_{ss} = 0$$



controle_aula17_ex1.ipynb

Exemplo 2

Exemplo: Encotre a região no plano s para os pólos de uma função de transferência cuja responta apresente:

- $t_r \leq 0,6$ s
- $M_p \leq 10\%$
- $t_s \leq 1,6$ s para 2%

Exemplo 2

Exemplo: Encotre a região no plano s para os pólos de uma função de transferência cuja responta apresente:

- $t_r \leq 0,6$ s
- $M_p \leq 10\%$
- $t_s \leq 1,6$ s para 2%

$$t_r = \frac{1.8}{\omega_n}$$

$$\omega_n \geq 3rad/s$$

Exemplo 2

Exemplo: Encotre a região no plano s para os pólos de uma função de transferência cuja responta apresente:

- $t_r \leq 0,6$ s
- $M_p \leq 10\%$
- $t_s \leq 1,6$ s para 2%

$$M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$$

$\zeta \geq 0.59$

Exemplo 2

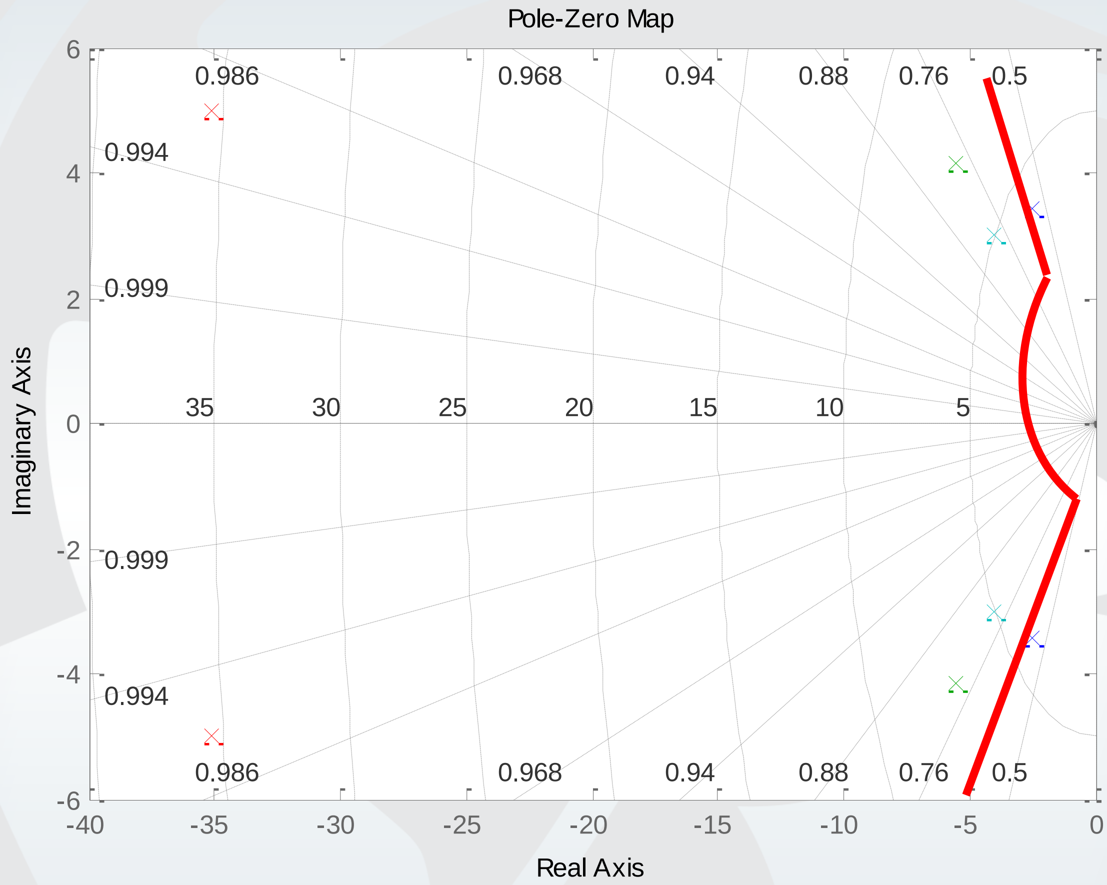
Exemplo: Encotre a região no plano s para os pólos de uma função de transferência cuja responta apresente:

- $t_r \leq 0,6$ s
- $M_p \leq 10\%$
- $t_s \leq 1,6$ s para 2%

Critério de 2%: $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$

$\omega_n \geq 4.23 rad/s$

Exemplo 2



$\omega_n \geq 4.23 rad/s$

$\omega_n \geq 3 rad/s$

$\zeta \geq 0.59$

Conclusões

- Sistemas de primeira ordem: métricas equivalentes, a mais famosa é a constante de tempo
- Sistemas de segunda ordem: Várias métricas foram apresentadas e serão utilizadas no projeto de sistemas de controle

EESC • USP

www.eesc.usp.br