



*Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo*

Desempenho no Domínio do Tempo

Aula 16

SEM 0169 – Sistemas de Controle

Profa. Máira Martins da Silva

mairams@sc.usp.br

(16) 9 9291 8310



Motivação

Como avaliar a ESTABILIDADE?

- avaliar os pólos da função transferência de malha fechada $1+L(s)=1+GH(s)=0$ (critério de Routh, lugar das raízes, autovalores da matriz A , Lyapunov, etc...)
- avaliar a resposta em frequência da malha aberta $L(s)$ (critério de Nyquist, margem de ganho e fase, etc...)

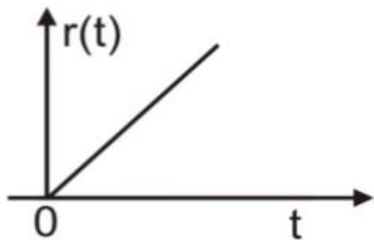
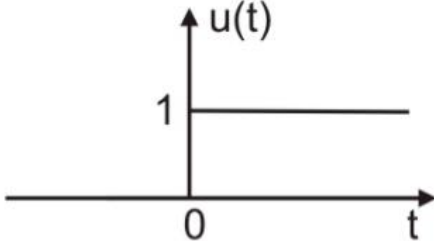
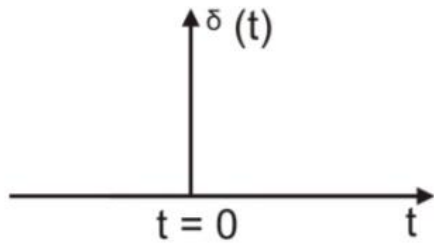
Como avaliar o DESEMPENHO?

- métricas no domínio do tempo
- métricas no domínio da frequência

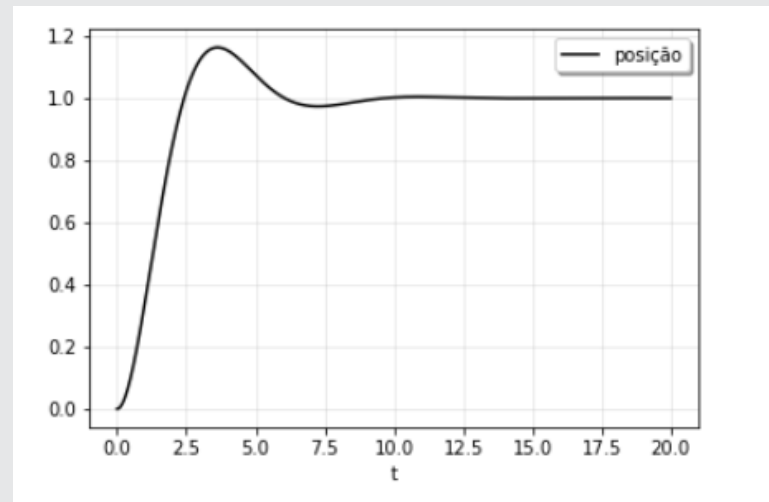
Objetivo

Métricas no domínio do tempo (mais um pouco sobre o papel dos polos nas respostas e no desempenho dos sistemas).

Introdução



A ideia é propor métricas a partir de respostas no domínio do tempo para entradas padrões ($u(t)$ pode ser um impulso, um degrau, uma rampa, etc.).

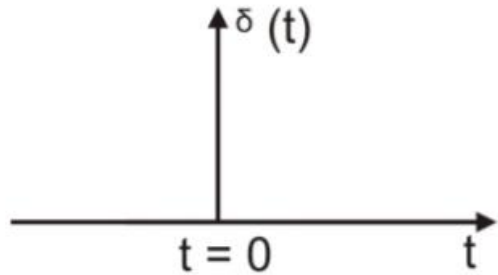


Resposta ao Degrau

```
plant_tf = TransferFunction(1, [1,1,1])
```

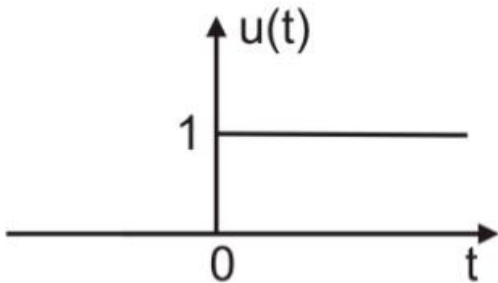
<https://www.slideshare.net/Ravirajsolanki1/time-response-analysis-80455887>

Introdução



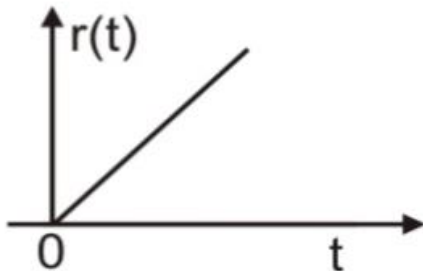
Impulso $\begin{cases} u(t) = \delta(t) \text{ se } t = 0 \\ u(t) = 0 \text{ se } t \neq 0 \end{cases}$

Laplace do Impulso: $U(s) = 1$



Degrau $\begin{cases} u(t) = A \text{ se } t \geq 0 \\ u(t) = 0 \text{ se } t < 0 \end{cases}$

Laplace do Degrau: $U(s) = A/s$



Degrau $\begin{cases} u(t) = At \text{ se } t \geq 0 \\ u(t) = 0 \text{ se } t < 0 \end{cases}$

Laplace do Rampa: $U(s) = A/s^2$

Introdução

As respostas temporais dos sistemas dependem dos polos, da entrada e da onde mede/excita.

$$G(s) = \frac{Y}{U}(s) = \frac{3s - 1}{(s + 1)(s + 2)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = -1 \\ p_2 = -2 \end{array} \right.$$

dependem do sistema

$$y(t) = -0.5 + 4e^{-1t} - 3.5e^{-2t}$$

dependem da entrada, de onde mede e de onde excita

Introdução

Os polos podem estar na ORIGEM, estar no eixo REAL, ou aparecerem como complexos conjugados ... Assim, as respostas vão depender desses polos que respondem como sistemas primeira e segunda ordem.

$$G(s) = K \dots (s)^{\pm n} \dots (s\tau + 1)^{\pm 1} \dots ((s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n) + 1)^{\pm 1}$$

Ganho constante

Pólos (ou zeros)
na origem

Pólos (ou zeros) no
eixo real

Pólos (ou zeros)
complexos conjugados

*Lembrando

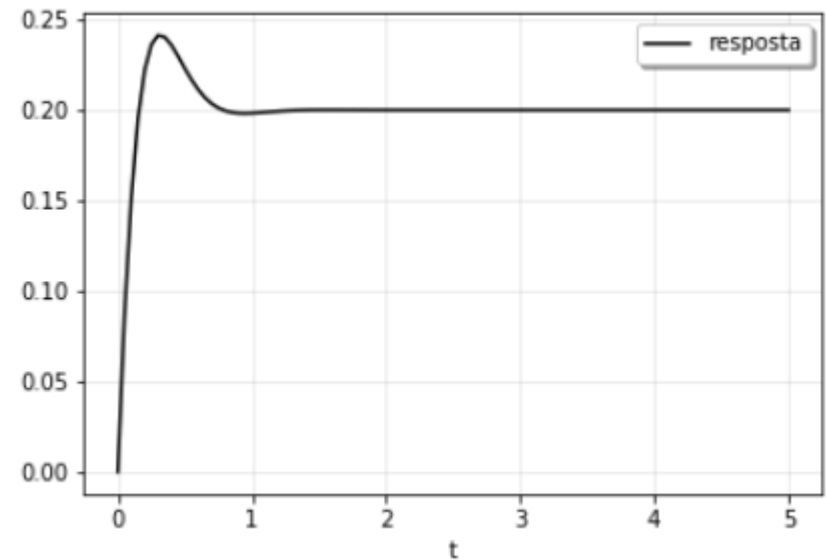
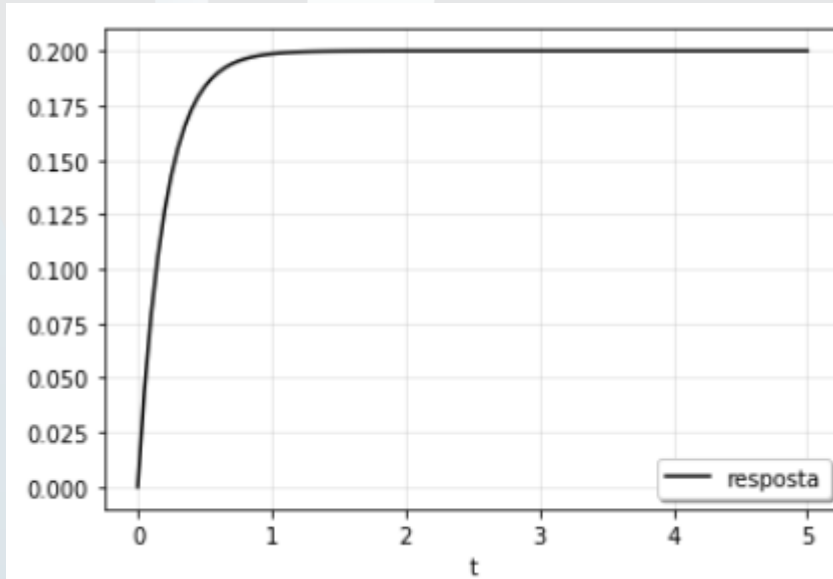
{ Polos são as raízes do denominador
Zeros são as raízes do numerador

Introdução

Então a gente vai investigar as métricas utilizadas para respostas que aparecem ser as respostas de sistemas de primeira ordem e segunda ordem.

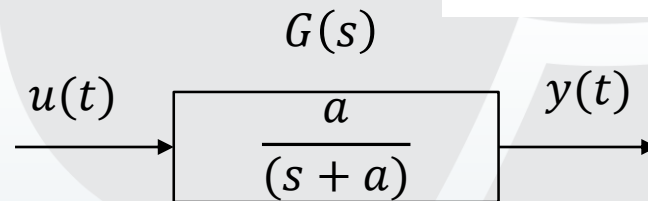
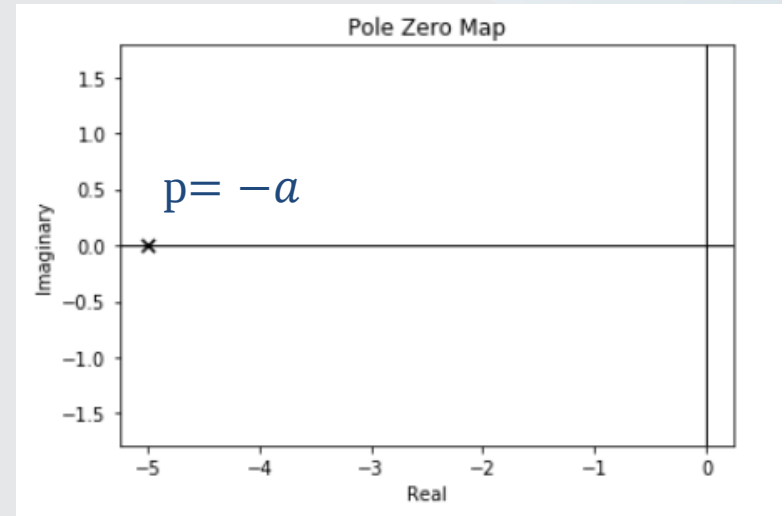
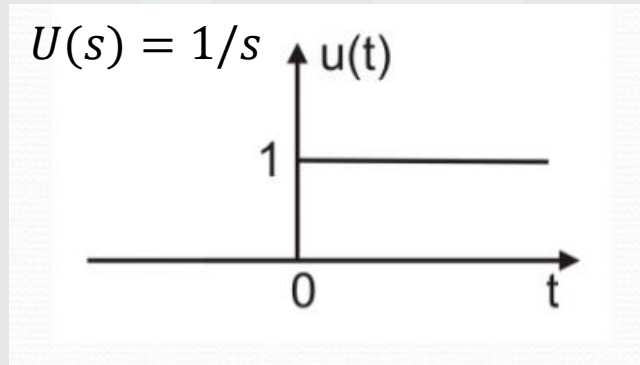
$$G_1(s) = \frac{k}{(s + \sigma)}$$

$$G_3(s) = \frac{k_1}{(s + \sigma - j\omega)} + \frac{k_2}{(s + \sigma + j\omega)}$$



Vamos usar o degrau nesse curso!

Sistemas de 1º. ordem



$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{a}{s(s + a)} = \frac{1}{s} + \frac{(-1)}{(s + a)}$$

$$y(t) = 1 - e^{-at}$$

Sistemas de 1º. ordem

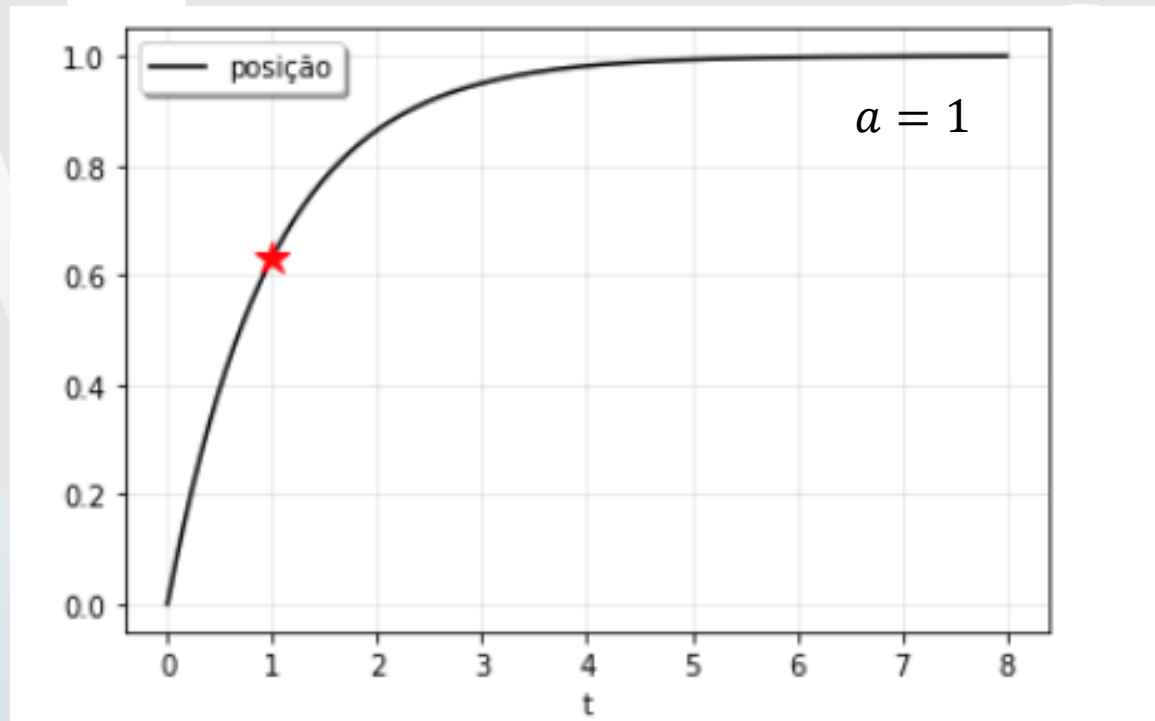
controle_aula16_ex1.ipynb

Constante de tempo:

$$\sigma = 1/a$$

Tempo necessário para atingir 0,63 do valor final

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{a}{\sigma}} = 0,63$$



Sistemas de 1º. ordem

controle_aula16_ex1.ipynb

Tempo de subida:

$$Tr = 2,2/a$$

Tempo necessário para que a resposta vá de 0,1 a 0,9 do seu valor final

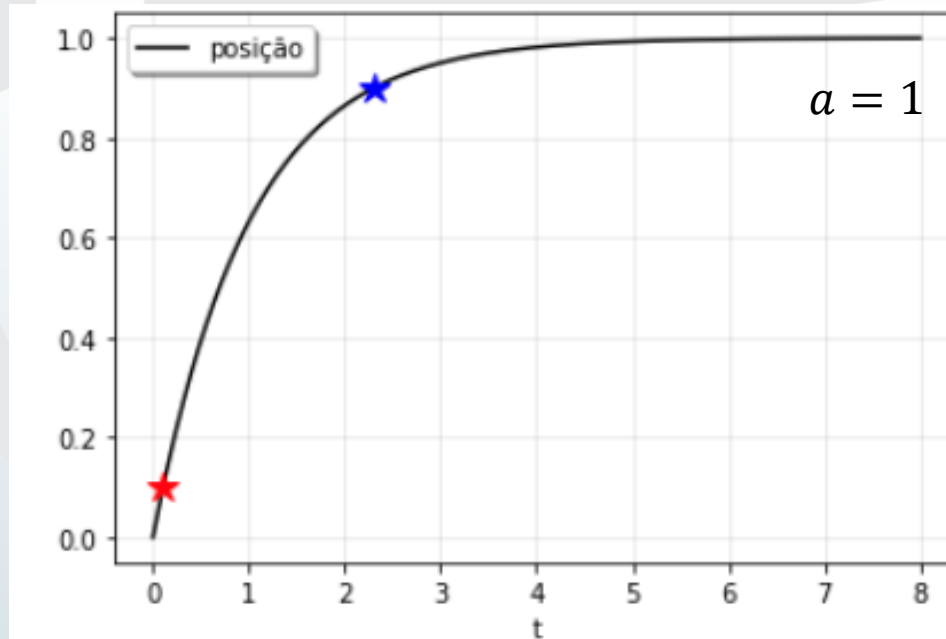
$$y(tf) = 1 - e^{-atf} = 0,9$$

$$tf = 2,31/a$$

$$y(ti) = 1 - e^{-ati} = 0,1$$

$$ti = 0,11/a$$

$$Tr = tf - ti$$



Sistemas de 1º. ordem

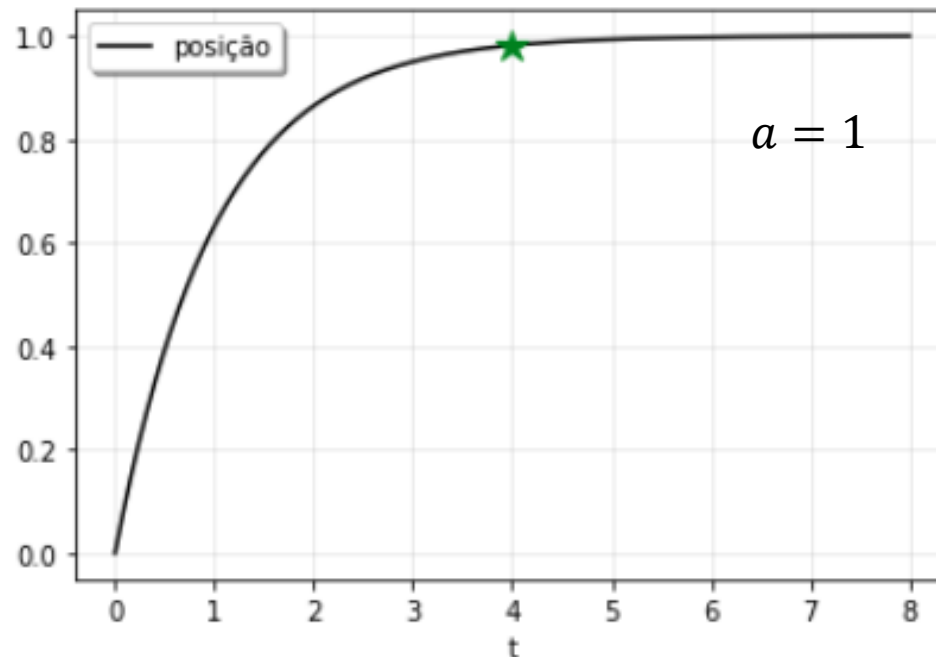
controle_aula16_ex1.ipynb

Tempo de acomodação:

$$T_s = 4/a$$

Tempo necessário para que a resposta fique em uma faixa de 2% do seu valor final

$$y(T_s) = 1 - e^{-aT_s} = 0,98$$



Sistemas de 1º. ordem

controle_aula16_ex1.ipynb

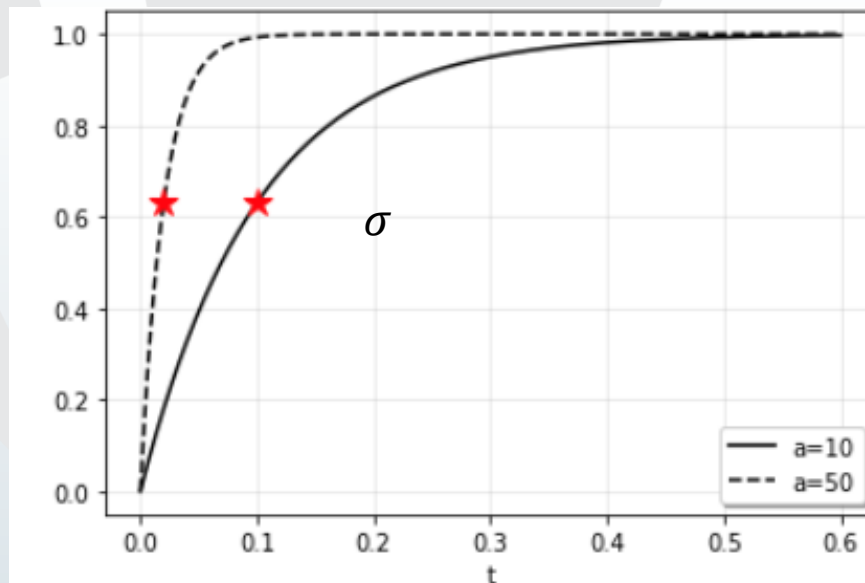
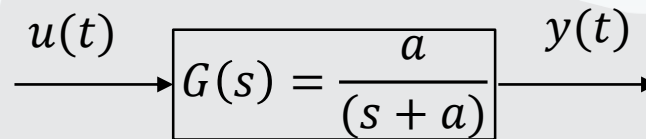
Maior ω_n

Menor ω_n

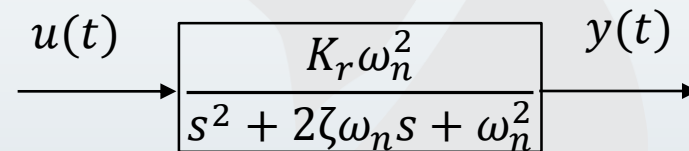
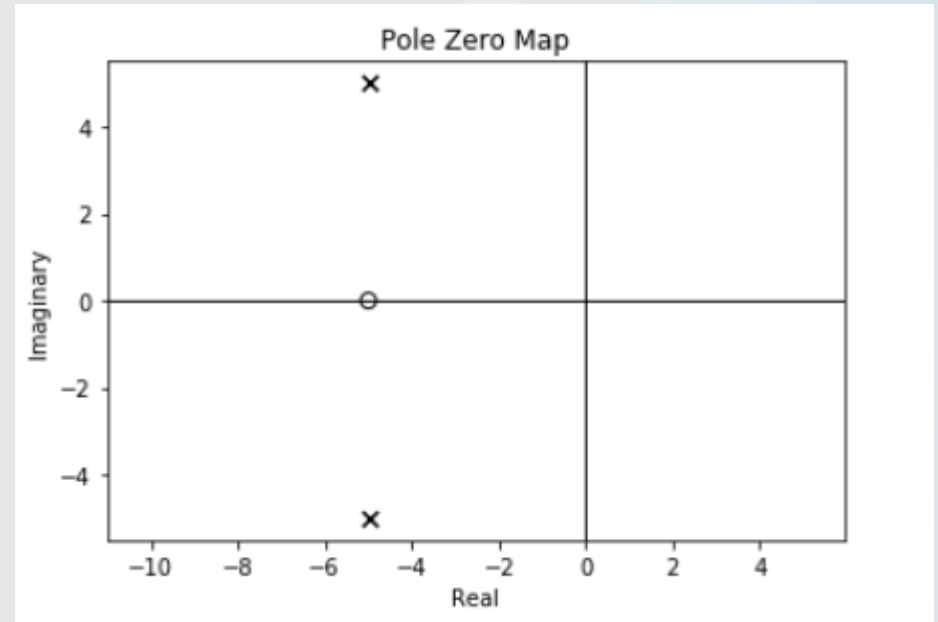
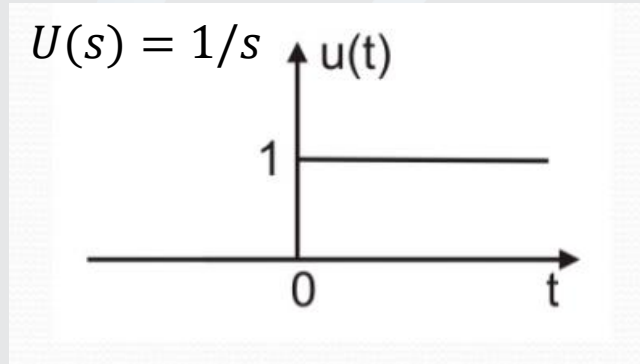
a	σ	Tr	Ts
50	0,02s	0,044s	0,08s
10	0,1s	0,22s	0,4s

Mais rápido

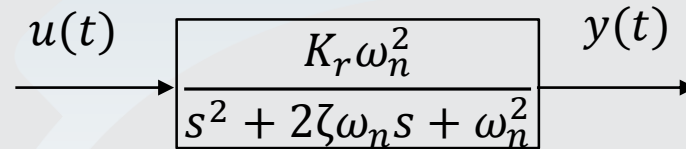
Mais lento



Sistemas de 2º. ordem



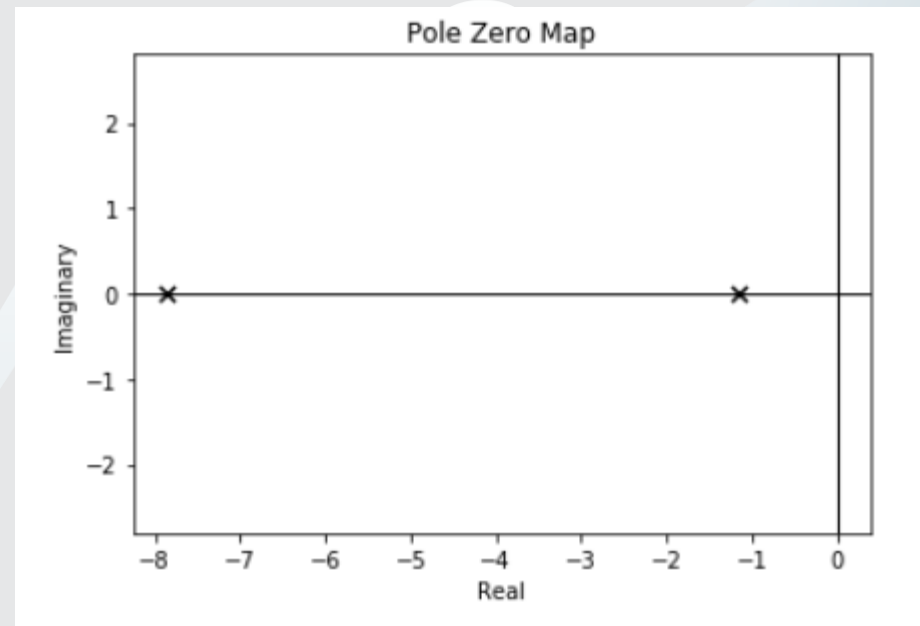
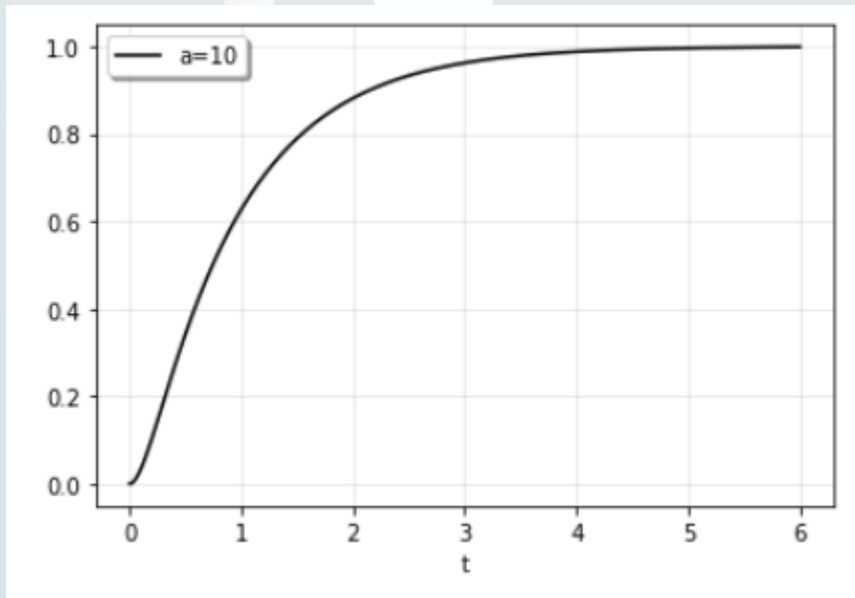
Sistemas de 2º. ordem



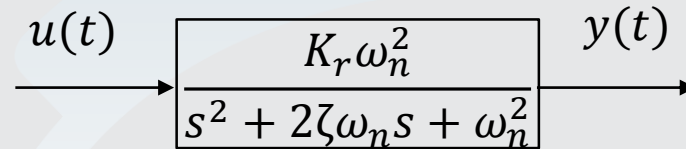
Respostas superamortecidas $\zeta > 1$

Dois polos reais diferentes $-\sigma_1$ e $-\sigma_2$

Resposta $y(t) = k_1 e^{-\sigma_1 t} + k_2 e^{-\sigma_2 t} + k_3$



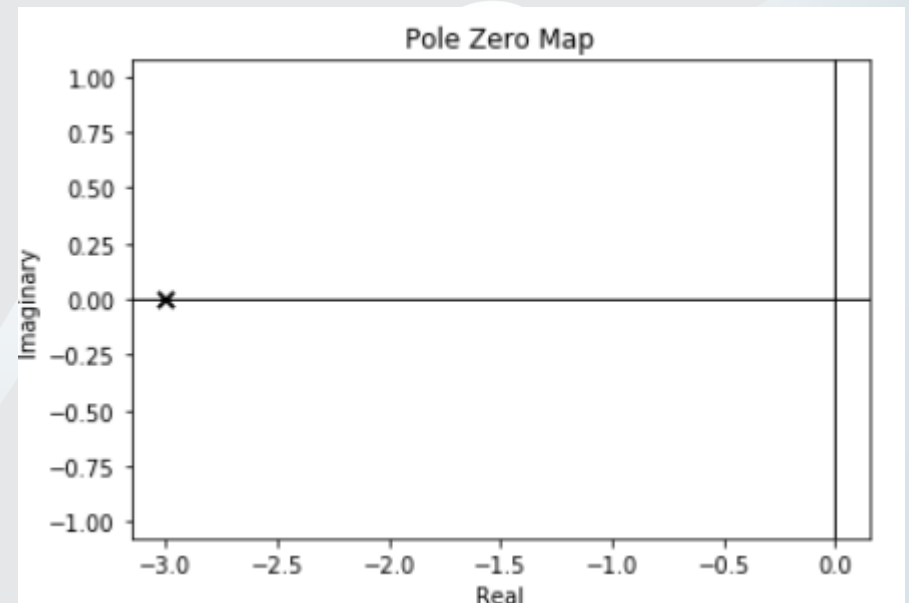
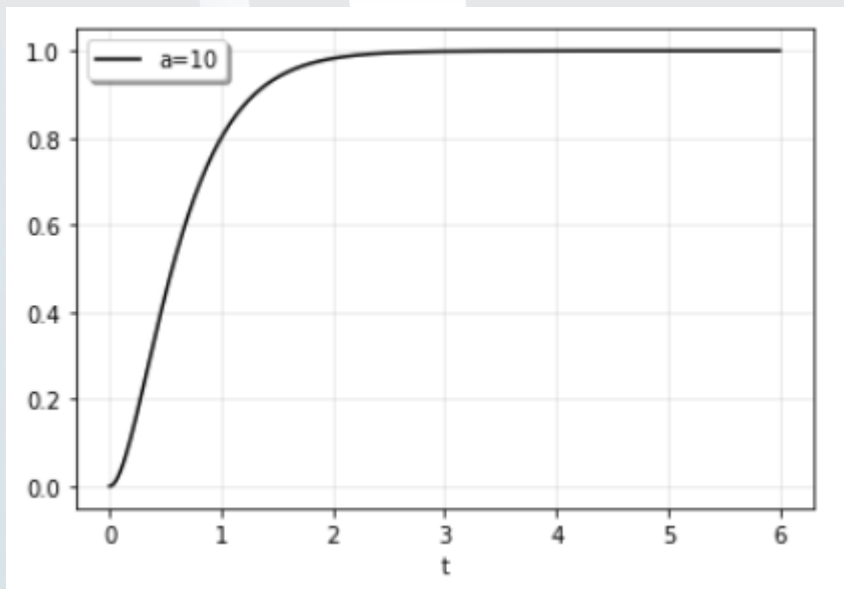
Sistemas de 2º. ordem



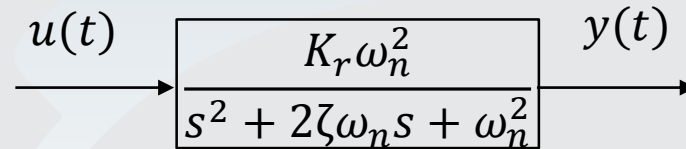
Respostas superamortecidas $\zeta = 1$

Dois polos reais iguais $-\sigma_1$ e $-\sigma_1$

Resposta $y(t) = k_1 e^{-\sigma_1 t} + k_2 t e^{-\sigma_1 t} + k_3$

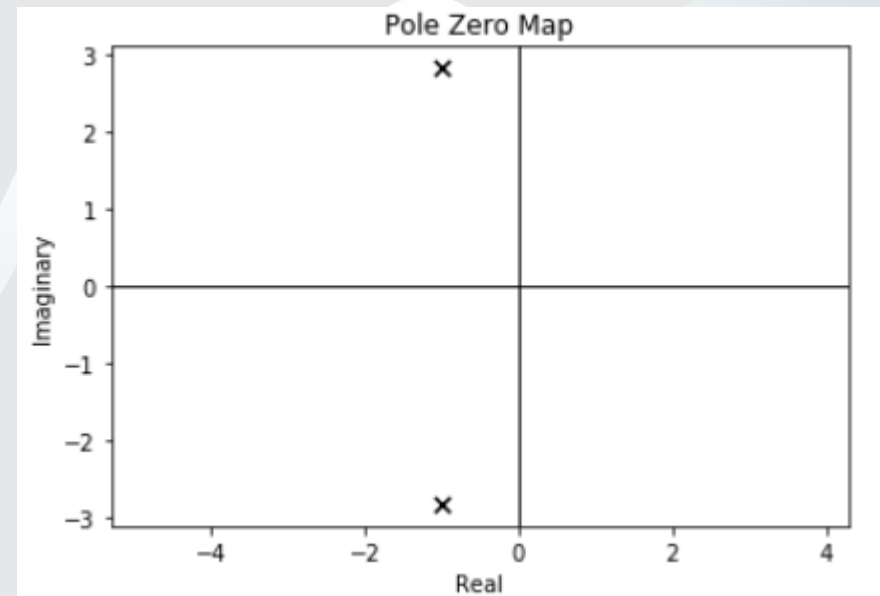
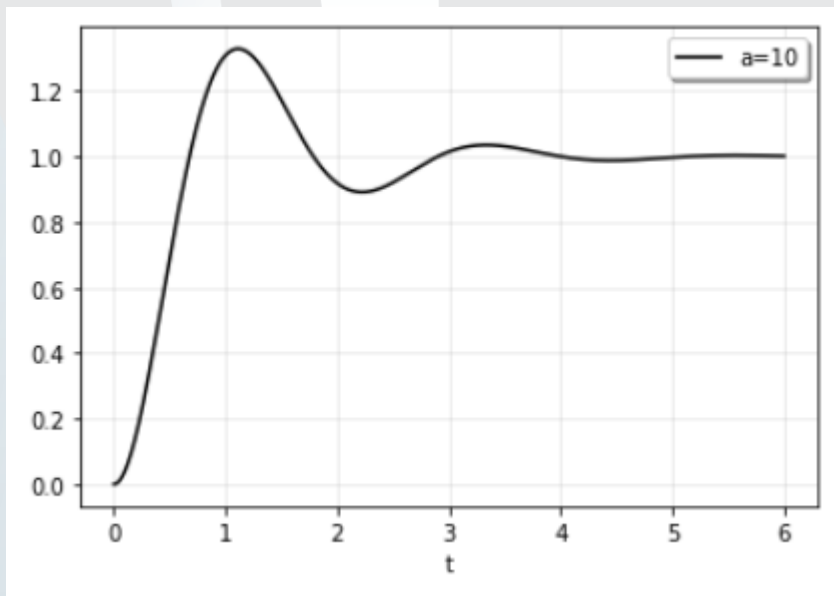


Sistemas de 2º. ordem

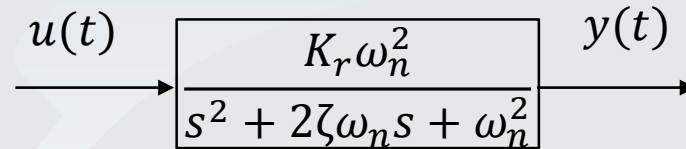


Respostas superamortecidas $0 < \zeta < 1$ Dois polos complexos conjugados

Resposta $y(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t - \phi) + k$ $p = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} i$



Sistemas de 2º. ordem



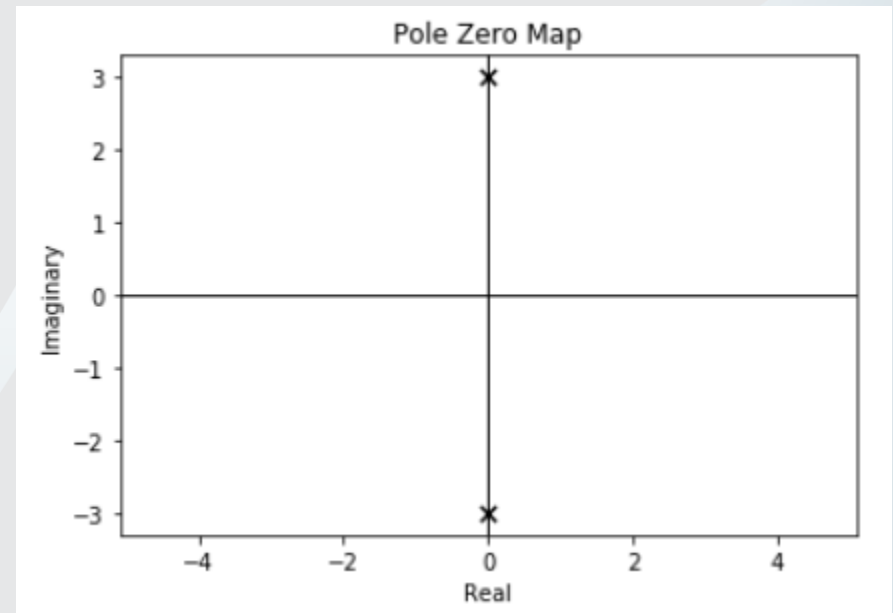
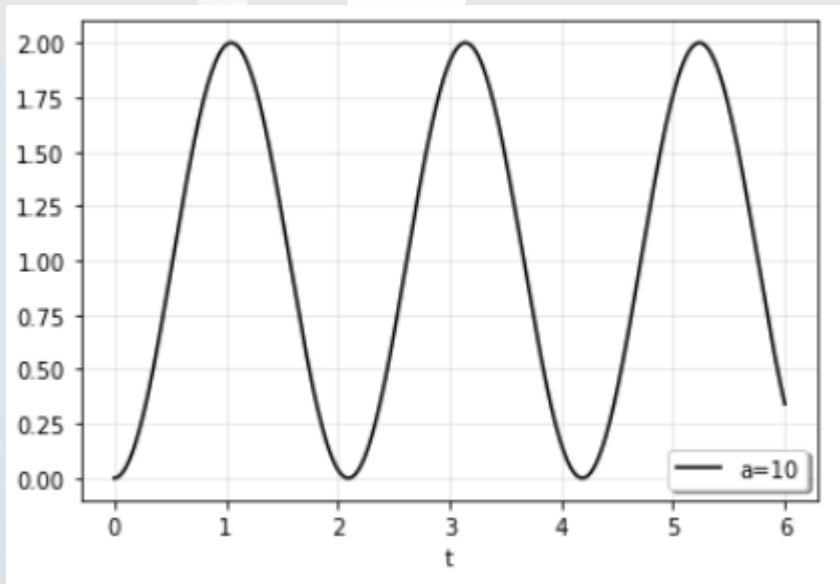
Respostas superamortecidas $\zeta = 0$

Dois polos imaginários

Resposta

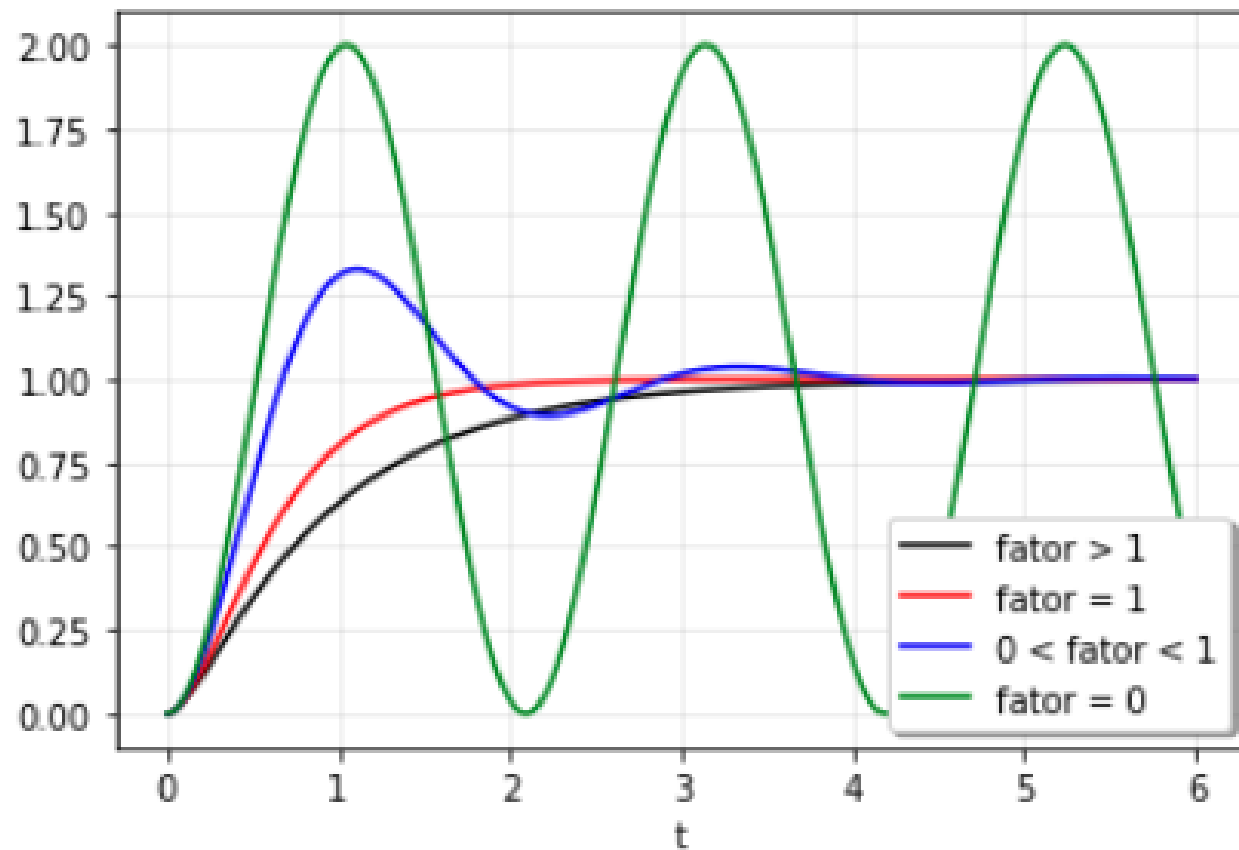
$$y(t) = A \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t - \phi) + k$$

$$p = \pm \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} i$$



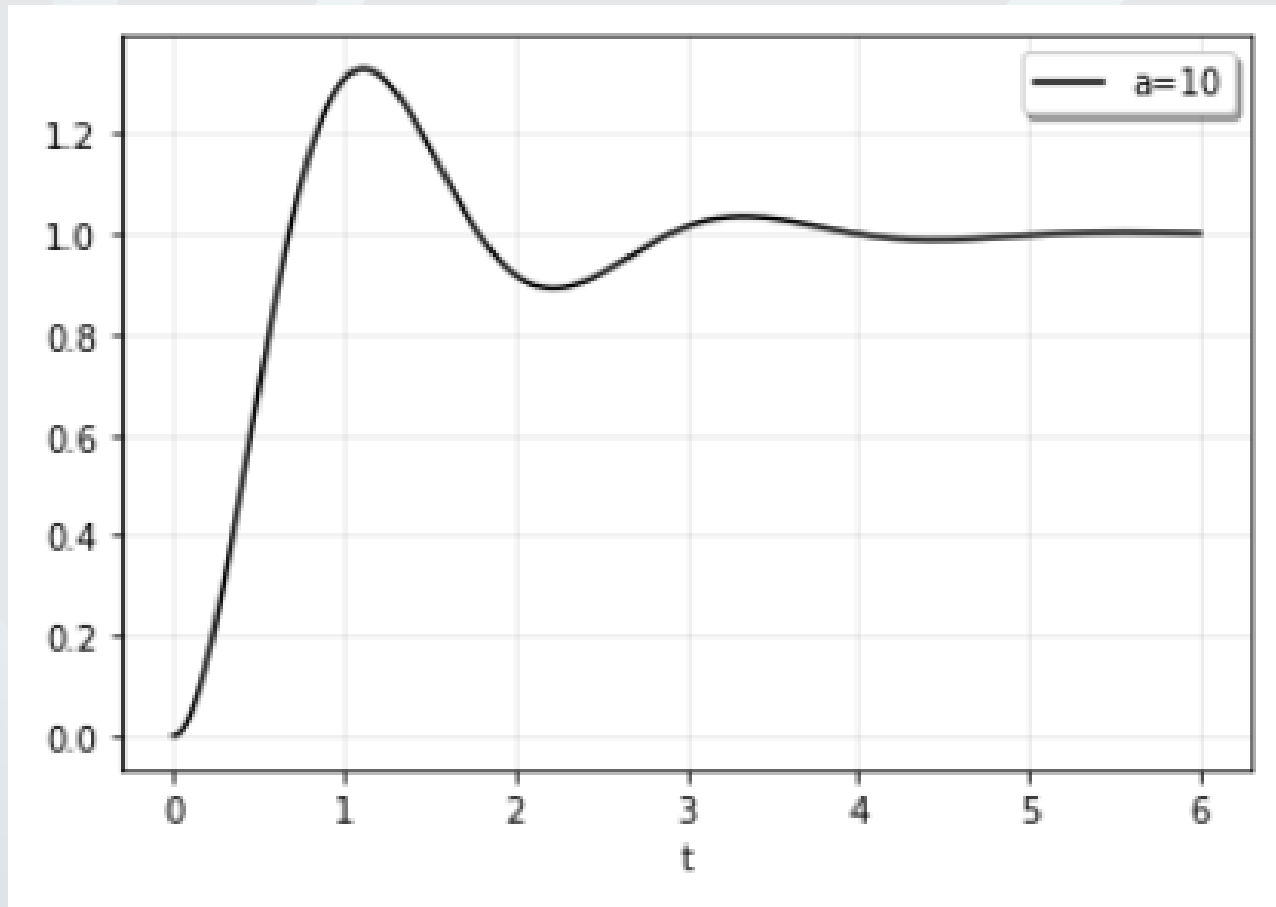
Sistemas de 2º. ordem

Resumindo



Sistemas de 2º. ordem

A gente só precisa propor métricas para o sistema subamortecido!



Conclusões

- Sistemas de primeira ordem: métricas equivalentes, a mais famosa é a constante de tempo
- Sistemas de segunda ordem: precisamos propor métricas para subamortecidos, os outros podem usar as métricas da primeira ordem ..



EESC • USP

www.eesc.usp.br