Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo

Polos/Zeros e Resposta em Frequência

Prática 2

SEM 0535 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos II

Profa. Maíra Martins da Silva
mairams@sc.usp.br
(16) 99291-8310

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Objetivo

Mostrar as possibilidades de ilustração das funções de resposta em frequência e relação com polos e zeros

Bônus: conectar as disciplinas de Modelos Dinâmicos e Sistemas de Controle.

Introdução: Representações

Serão introduzidos 4 tipos de representações:

1. Formato Configuração (EDO)
2. Relação Entrada e Saída – Função Transferência (FT)
3. Representação no Espaço de Estado (State Space Rep.)
4. Ganho, polos e zeros

Parte do material pode ser encontrado em: H.V. Vu and R.S. Esfandiari, Dynamic Systems: Modeling and Analysis. Macgraw-hill

Polos e Zeros

$$G(s) = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + \ldots + b_m s + b_{m+1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}$$

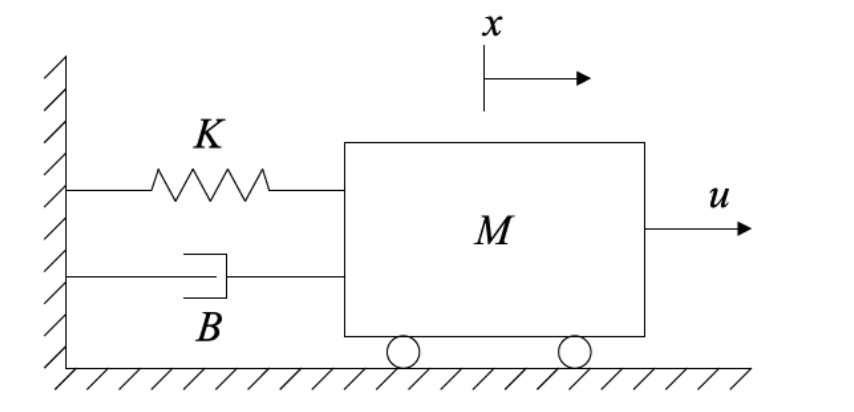
$$G(s) = K \frac{\prod (s - z_i)}{\prod (s - p_i)}$$

z_i: zeros de $G(s)$

p_i: pólos de $G(s)$

Polos e Zeros

Exemplo.

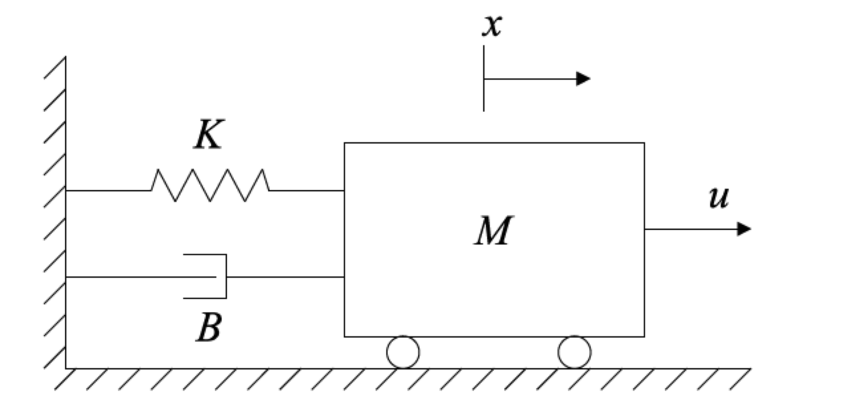


FT. $$G(s) = \frac{X}{F}(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Polos $$ms^2 + bs + k = 0 \Rightarrow p_1, p_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

Polos e Zeros

Exemplo.



SS. $$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -k/m & -b/m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1/m\end{bmatrix}u$$

Polos. Autovalores de A $$\begin{vmatrix}0-\lambda & 1\\ -k/m & -\dfrac{b}{m}-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1, p_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

Polos e Zeros

jupyter PraticasMD2_aula2_ex1 Last Checkpoint: poucos segundos atrás (autosaved)

File Edit View Insert Cell Kernel Widgets Help Hide Code

Run Code

In [11]:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import control as ctl
import scipy.linalg as la
from control import (TransferFunction, step_response, bode_plot,
                     impulse_response, series, feedback, rlocus,
                     margin, nyquist_plot)


m = 1
b = 0.9
k = 100

A = np.array([[0.0, 1.0], [-k/m, -b/m]])

eigvals, eigvecs = la.eig(A)
print(eigvals)
```

```
[-0.45+9.98986987j -0.45-9.98986987j]
```

In [16]:

```
roots_den = np.roots([m,b,k])
print(roots_den)
```

```
[-0.45+9.98986987j -0.45-9.98986987j]
```

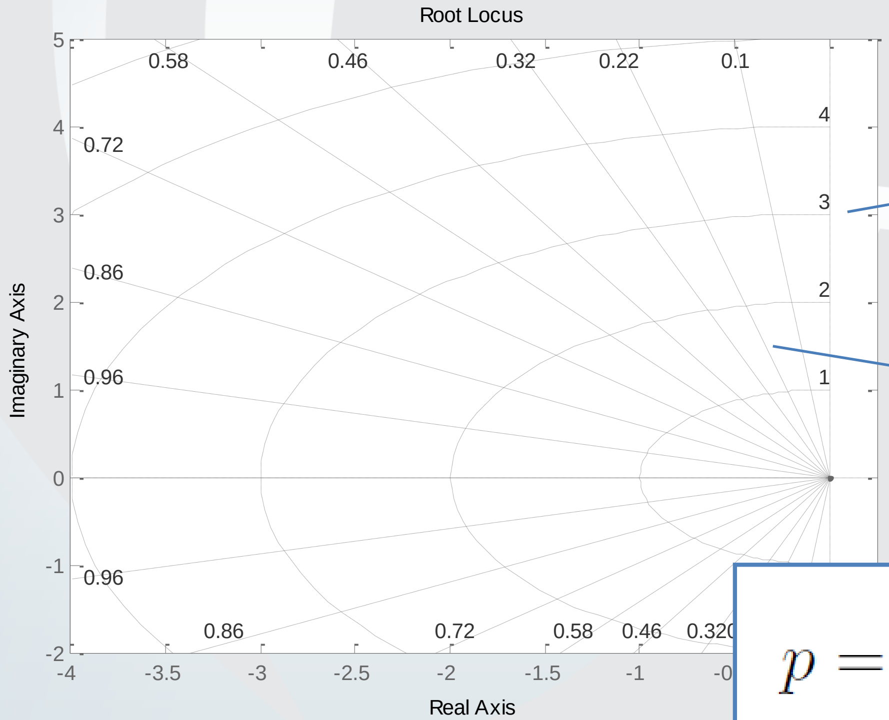
PraticasMD2_aula2_ex1

Várias maneiras de encontrar os polos de um sistema!

Polos e Zeros

Vamos considerar o mesmo sistema: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \mathrm{u}$

Reescrevendo $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = Kr\omega_n^2\mathrm{u}$



Frequência natural

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Fator de amortecimento

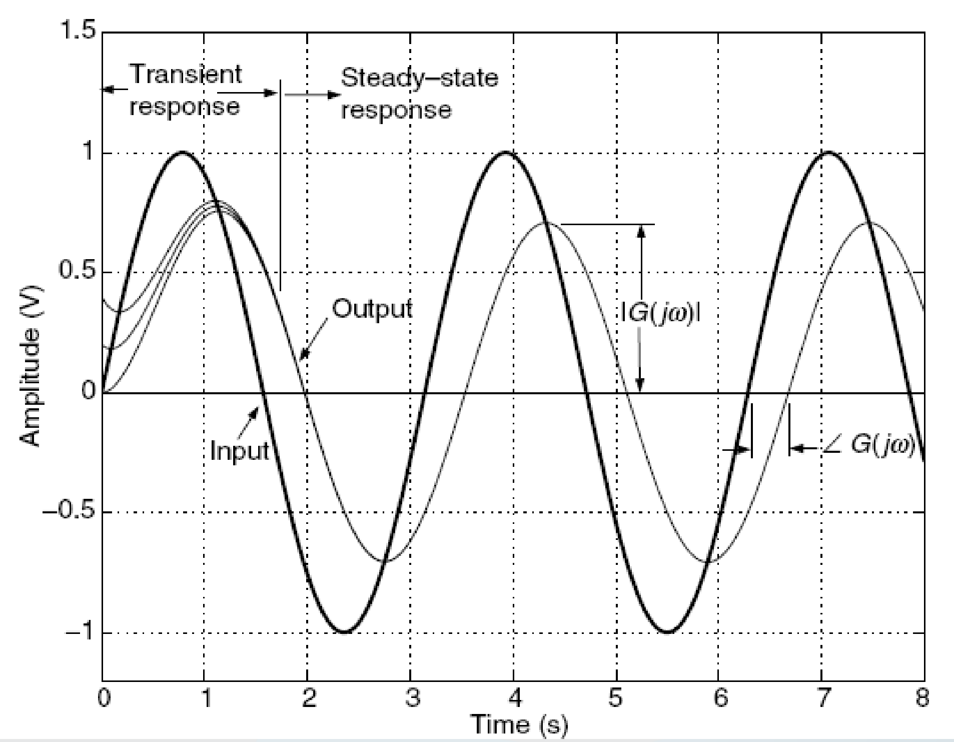
$$\zeta = \frac{b}{2m\omega_n}$$

$$p = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\left(\sqrt{1-\zeta^2}\right)j$$

Resposta em Frequência

Resposta em Frequência considera a entrada e a resposta senoidais do regime permanente do sistema, após os transientes desaparecerem (devido às condições iniciais e à entrada em si).

A resposta de regime permanente de um sistema a uma entrada senoidal é um sinal senoidal de mesma frequência com módulo e ângulo de fase diferentes.



Resposta em Frequência

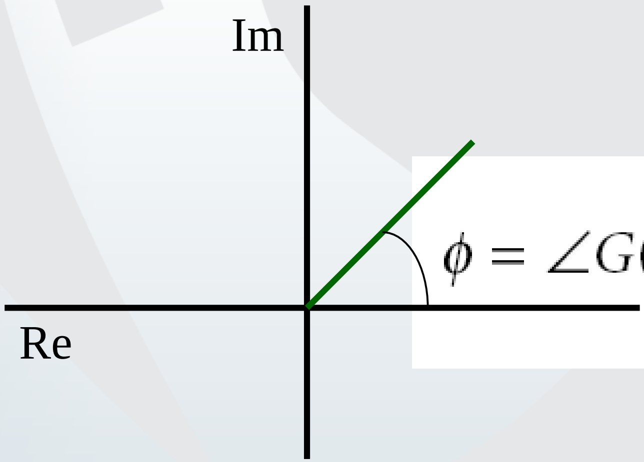
Número complexo

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$s = i\omega$$

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi}$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\{\mathrm{Re}[G(j\omega)]\}^2 + \{\mathrm{Im}[G(j\omega)]\}^2}$$



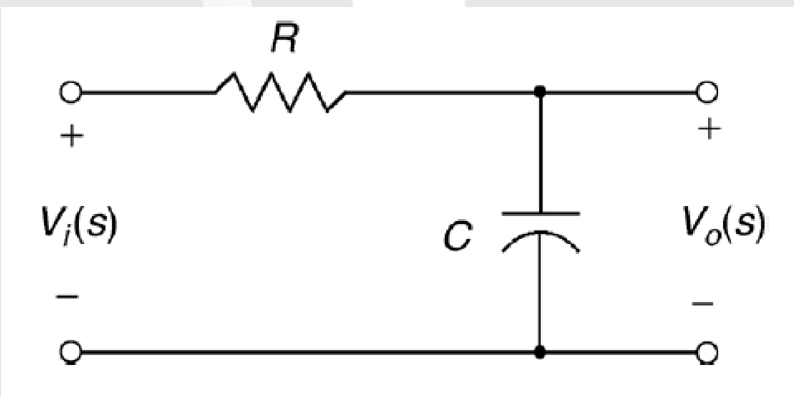
$$\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}[G(j\omega)]}{\mathrm{Re}[G(j\omega)]}$$

Resposta em Frequência: Diagrama de Bode

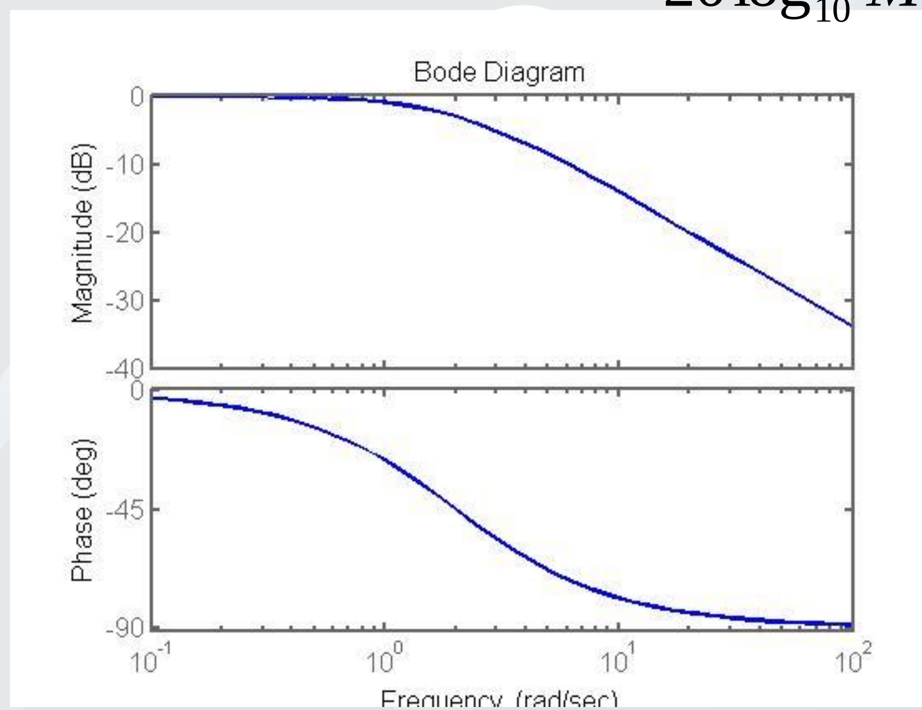
No diagrama de Bode, a função transferência é apresentada pela módulo $|G(j\omega)|$ e pelo ângulo de fase $\Phi(\omega)$ em função da frequência ω em gráficos

$$G(j\omega) = \mathrm{Re}[G(j\omega)] + j\,\mathrm{Im}[G(j\omega)] = |G(j\omega)|e^{j\phi}$$

$$20\log_{10} M$$



$$\boxed{G(s) = 1/(0.5s + 1)}$$

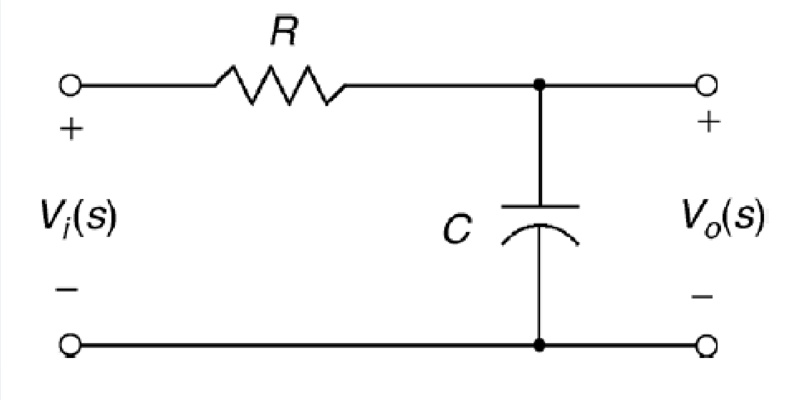


Resposta em Frequência: Nyquist

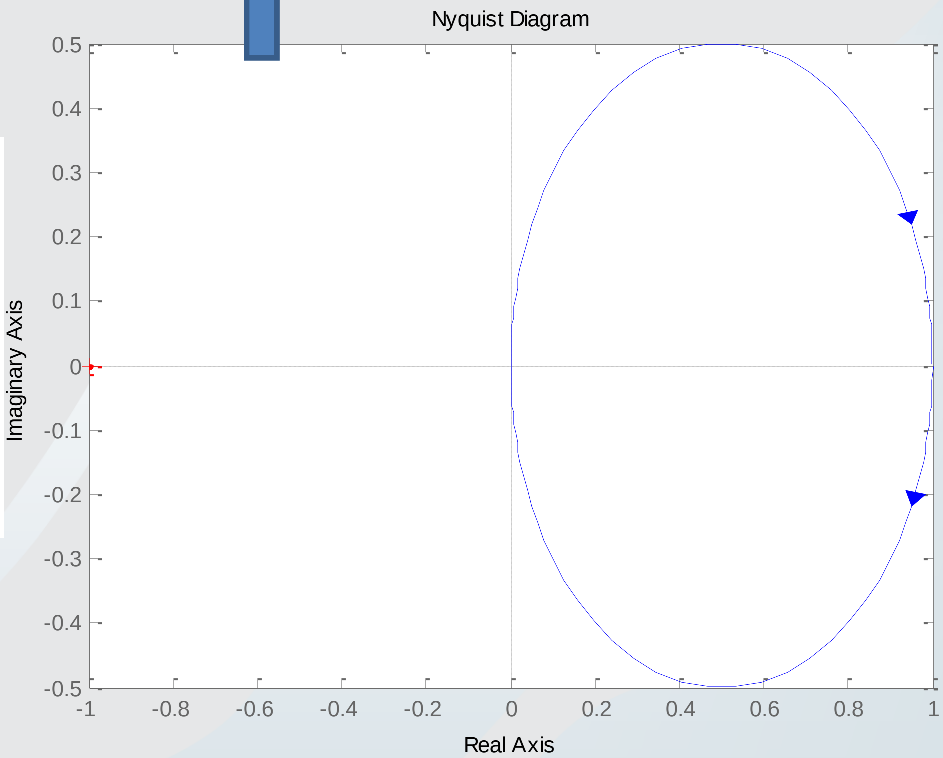
O diagrama de Nyquist é o gráfico da parte real e imaginária de G(jω) variando a frequência ω de zero a infinito.

$$G(j\omega) = \mathrm{Re}[G(j\omega)] + j\,\mathrm{Im}[G(j\omega)] = |G(j\omega)|e^{j\phi}$$

Exemplo:



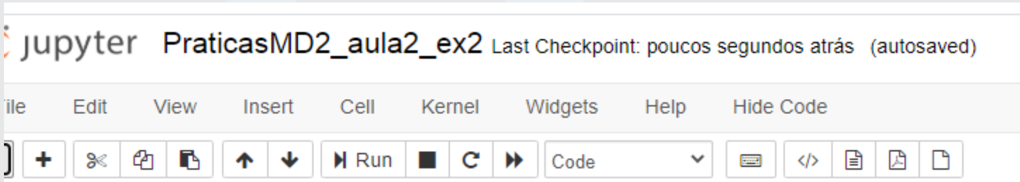
$$\boxed{G(s) = 1/(0.5s + 1)}$$



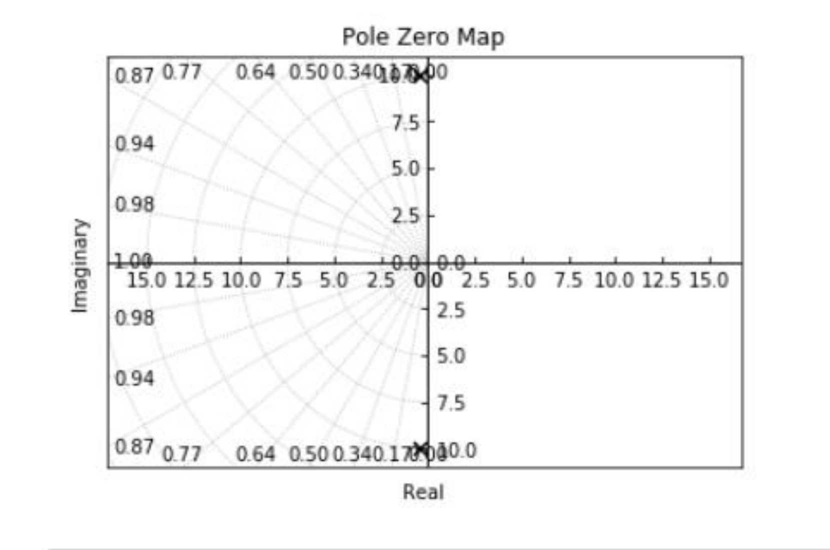
Resposta em Frequência

PraticasMD2_aula2_ex2

Conexão do 1gdl com polos e frf



In [20]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import control
from control.matlab import *
#from control import (TransferFunction, step_response, bode_plot,
#                     impulse_response, series, feedback, rlocus,
#                     margin, nyquist_plot)


m = 1
b = 0.9
k = 100

A = np.array([[0.0, 1.0], [-k/m, -b/m]])

B = np.array([[0.0], [1/m]])

C = np.array([1.0, 0.0])

D = np.array([[0.0]])

plant_ss = control.ss(A,B,C,D)
poles_ss= control.pole(plant_ss)
print(plant_ss)
print(poles_ss)
```



https://python-control.readthedocs.io/en/0.8.3/intro.html

Mais de um GDL ...

Formulação Geral: *n* variáveis, *m* entradas, *n* saídas

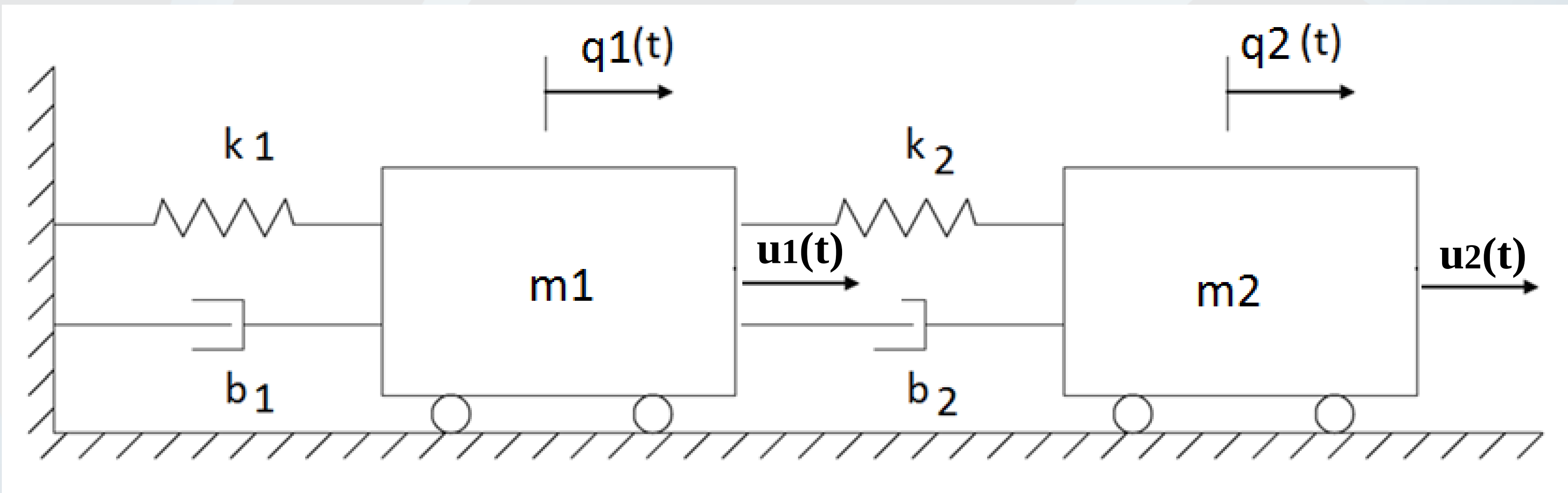
Equações das variáveis no espaço de estado

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots x_n, u_1, \dots u_m, t)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, \dots x_n, u_1, \dots u_m, t)$$
$$\dots$$
$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \dots x_n, u_1, \dots u_m, t)$$

Equações de saída

$$y_1 = h_1(x_1, \dots x_n, u_1, \dots u_m, t)$$
$$y_2 = h_2(x_1, \dots x_n, u_1, \dots u_m, t)$$
$$\dots$$
$$y_p = h_n(x_1, \dots x_n, u_1, \dots u_m, t)$$

Representação no Espaço de Estado



$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

Representação no Espaço de Estado

Exemplo 2.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

Estados:

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 \\ x_2 &= q_2 \\ x_3 &= \dot{q}_1 \\ x_4 &= \dot{q}_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{q}_1 \\ \dot{x}_2 &= \dot{q}_2 \\ \dot{x}_3 &= \ddot{q}_1 \\ \dot{x}_4 &= \ddot{q}_2 \end{aligned}$$

Representação no Espaço de Estado

Exemplo 2.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

Equação de Estados: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(k_1+k_2)/m_1 & +k_2/m_1 & -(b_1+b_2)/m_1 & +b_2/m_1 \\ +k_2/m_2 & -k_2/m_2 & +b_2/m_2 & -b_2/m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1/m_1 & 0 \\ 0 & 1/m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Representação no Espaço de Estado

Exemplo 2.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

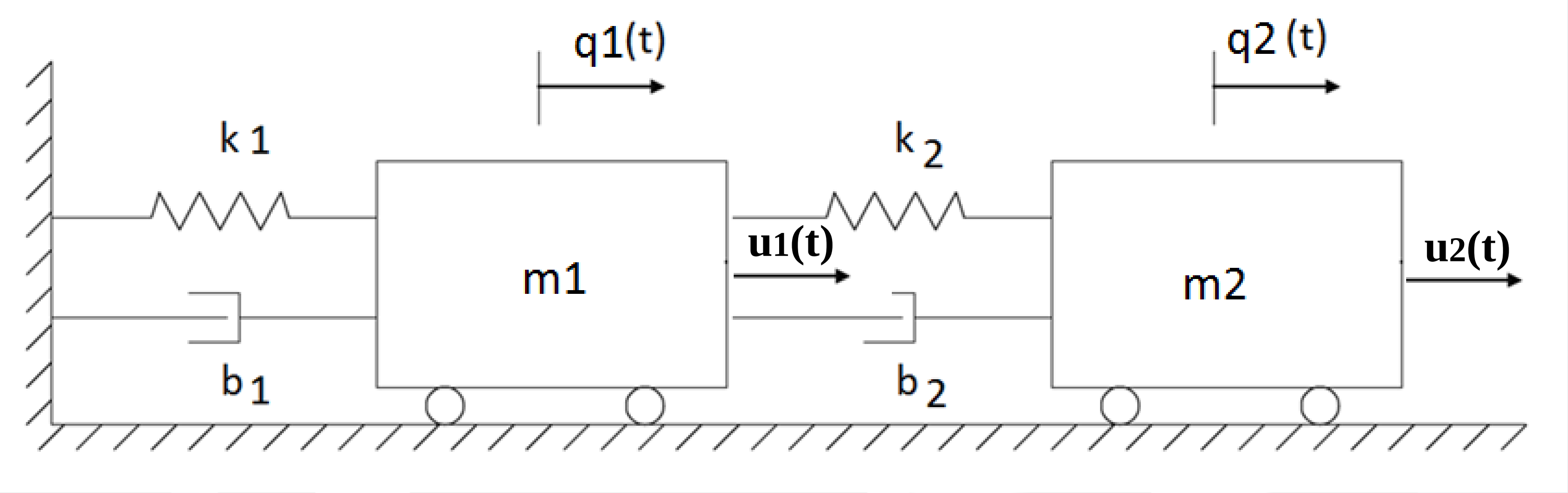
Equação de Saída:

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

ABCD ideal para sistemas MIMO !

Discussão: FRF colocada e não-colocada



Plote as FRFs:

a. $^{Q_1}/_{U_1}$ e $^{Q_2}/_{U_1}$

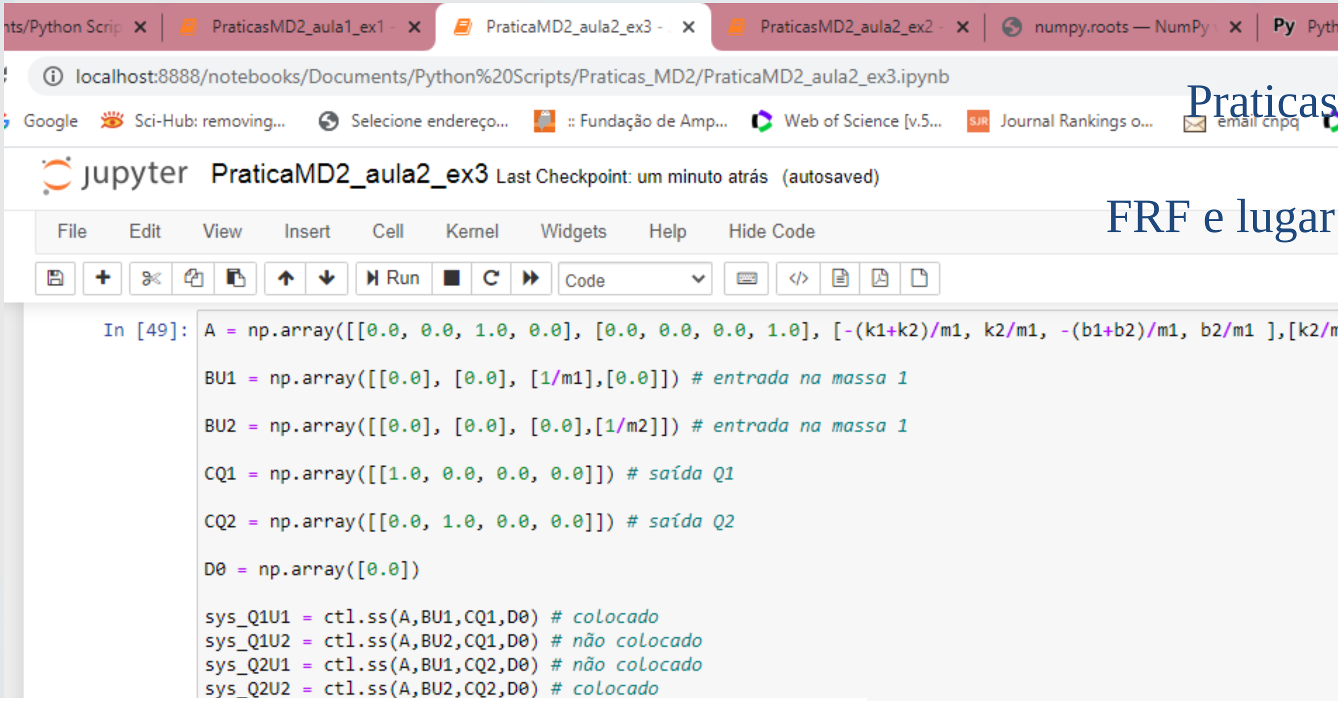
b. $^{Q_1}/_{U_2}$ e $^{Q_2}/_{U_2}$

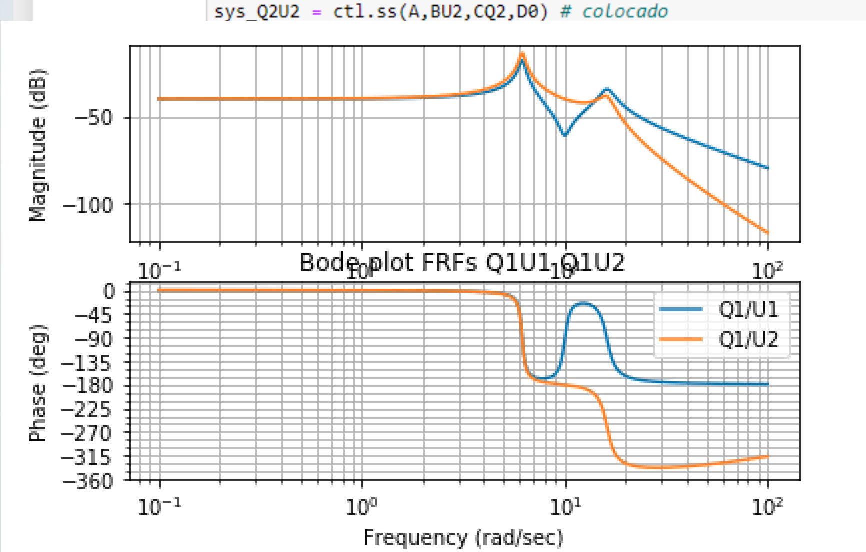
Discuta a presença ou não de zeros de acordo com a posição da excitação: medida e excitação no mesmo lugar ($^{Q_1}/_{U_1}$ e $^{Q_2}/_{U_2}$) e medida e excitação em lugares distintos ($^{Q_2}/_{U_1}$ e $^{Q_1}/_{U_2}$).

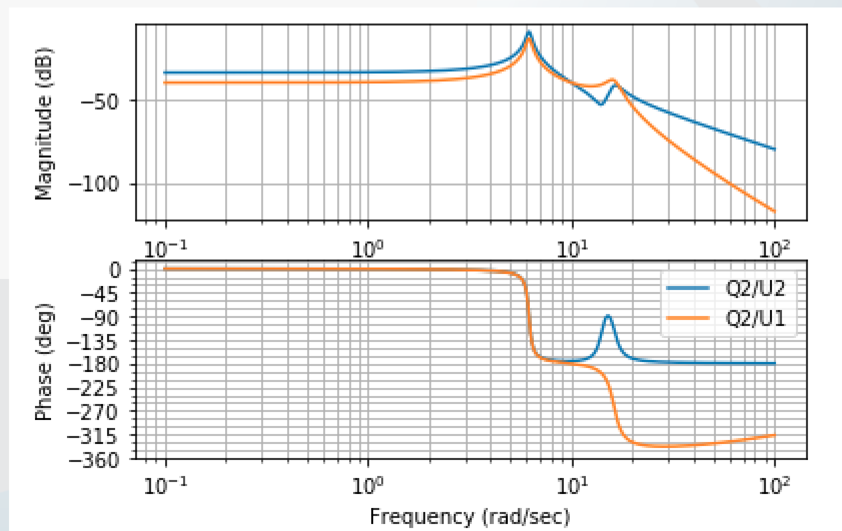
Discussão: FRF colocada e não-colocada

PraticasMD2_aula2_ex3

FRF e lugar de excitação/medida



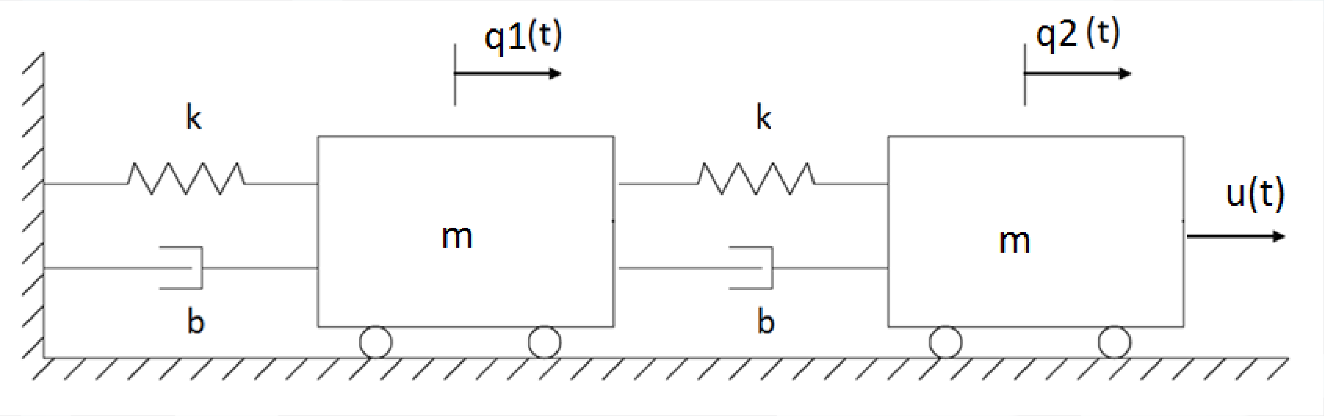




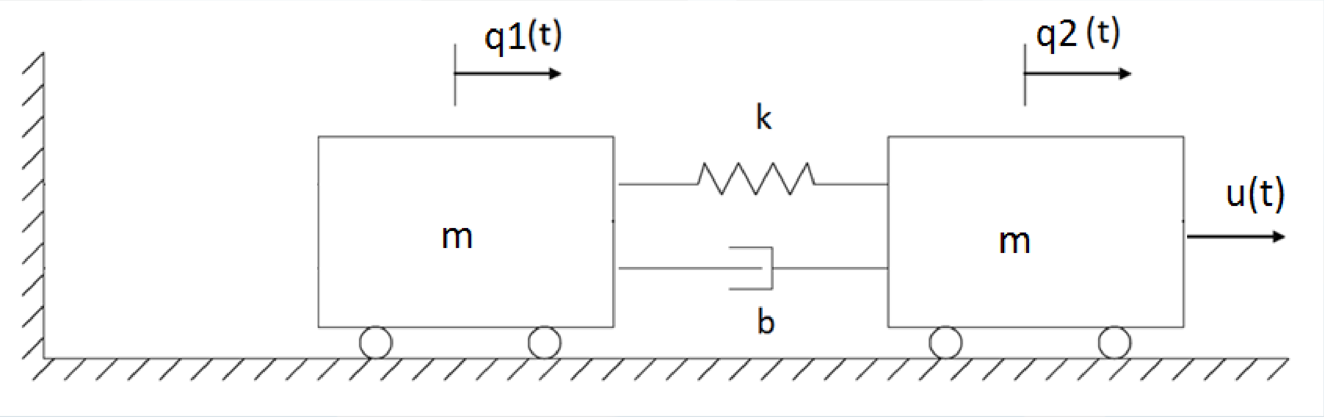
Discussão: Polo em ZERO

sys1

$m = 1,\, k = 100,\, b = 0.9$



sys2



Polo em ZERO

sys1

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{\textbf{M1}}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2b & -b \\ -b & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}}_{\textbf{B1}} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}}_{\textbf{K1}}$$

sys2

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{\textbf{M2}}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}}_{\textbf{B2}} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}}_{\textbf{K2}}$$

Polo em ZERO

sys1

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{2X2} & \boldsymbol{I}_{2X2}\\ -\boldsymbol{M}_1^{-1}\boldsymbol{K}_1 & -\boldsymbol{M}_1^{-1}\boldsymbol{B}_1\end{bmatrix}}_{\mathbf{A1}} \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1/m\end{bmatrix}}_{\mathbf{B1}} u$$

```
-1.18+16.14j
-1.18-16.14
-0.17+6.18j
-0.17-6.18j
```

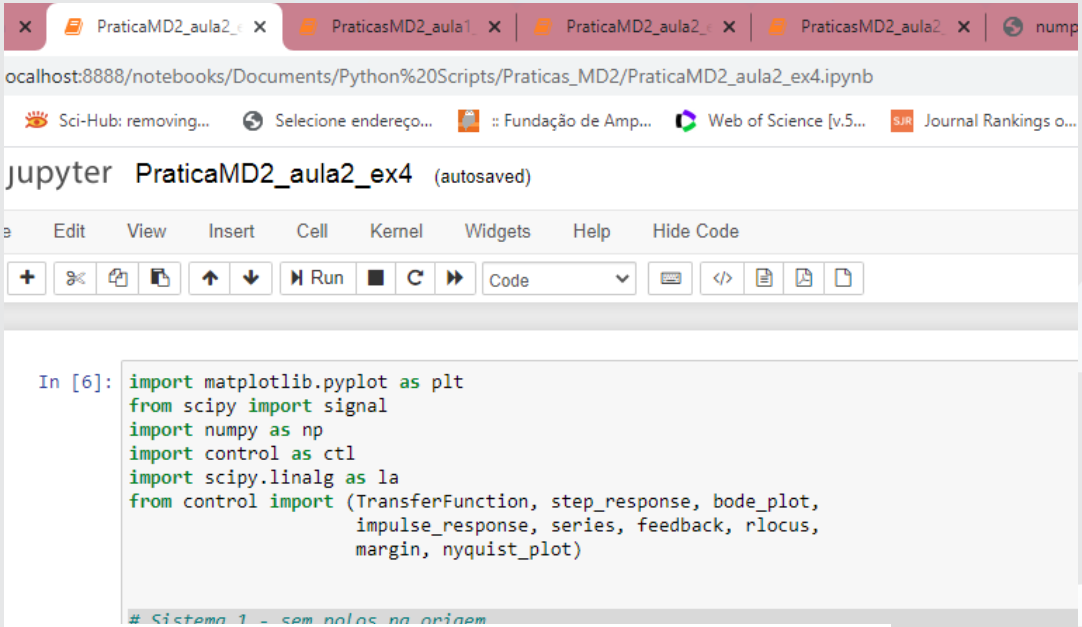
sys2

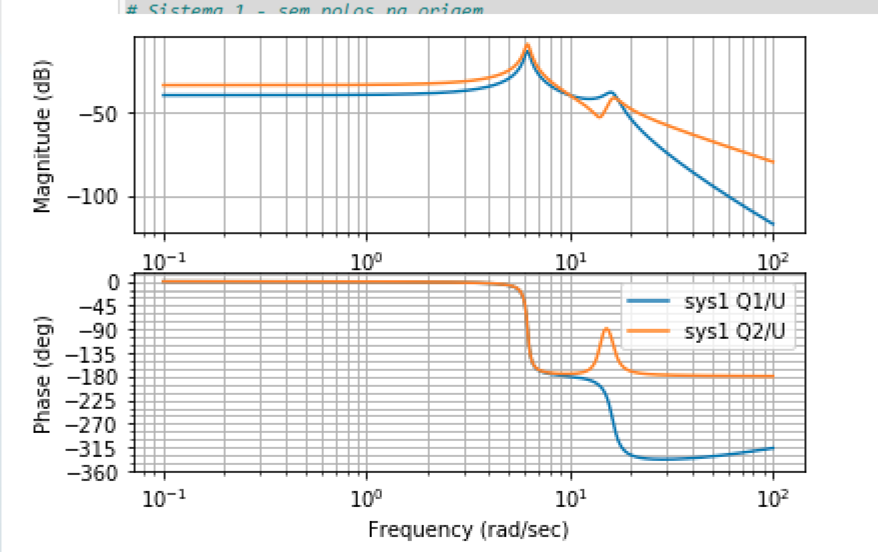
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{2X2} & \boldsymbol{I}_{2X2}\\ -\boldsymbol{M}_2^{-1}\boldsymbol{K}_2 & -\boldsymbol{M}_2^{-1}\boldsymbol{B}_2\end{bmatrix}}_{\mathbf{A2}} \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1/m\end{bmatrix}}_{\mathbf{B2}} u$$

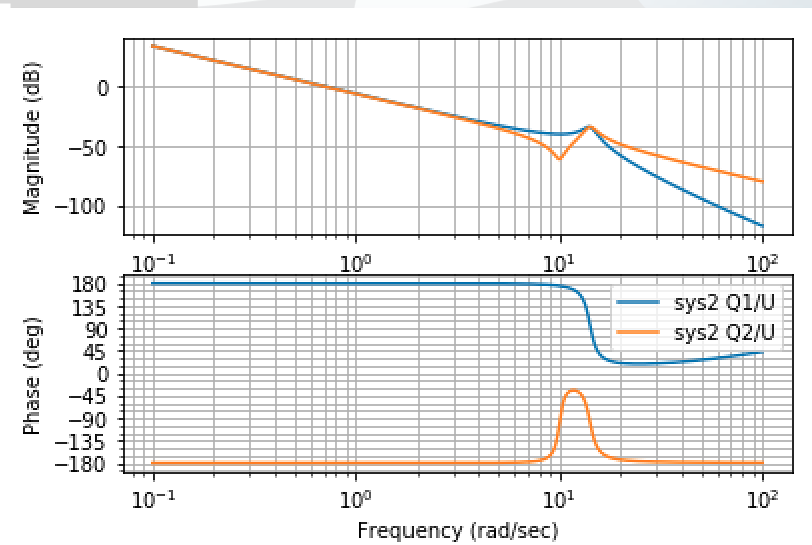
```
-0.9+14.11j
-0.9-14.11j
0+0.j
0+0.j
```

Grau de liberdade
de corpo rígido

Polo em ZERO







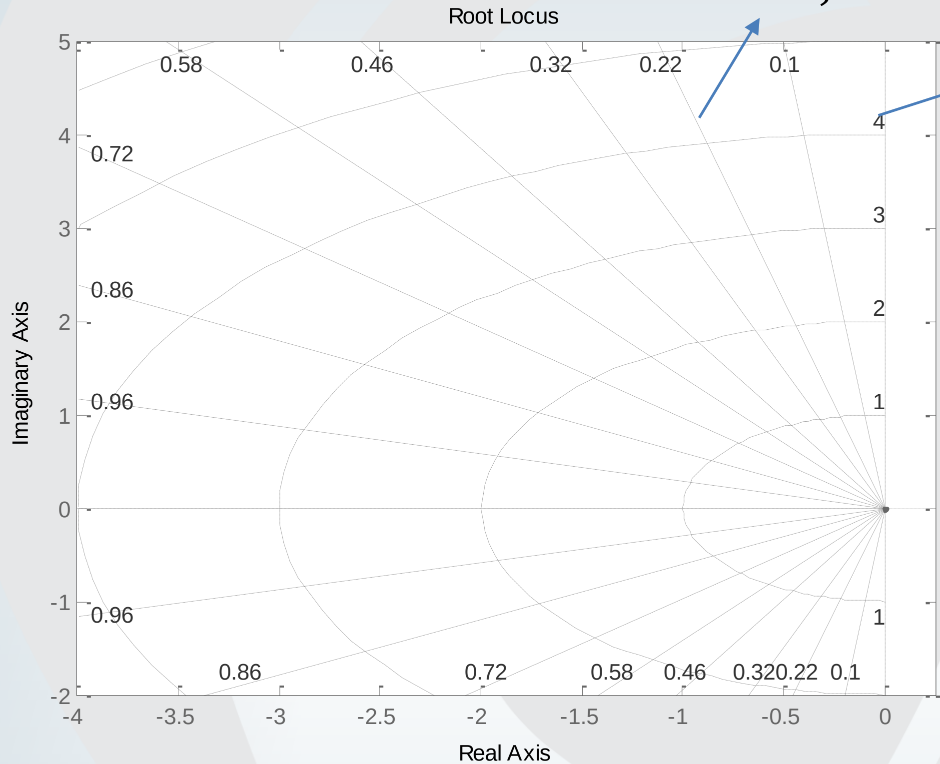
PraticasMD2_aula2_ex4

O que acontece com um um par de polos em ZERO?

Tarefa 2

Linhas de ξ

Linhas de ω_n



$s1$: $\zeta = 0.0, \omega_n = 4.5 rad/s, Kr = 1$

s2: $\zeta = 0.4, \omega_n = 4.5 rad/s, Kr = 1$

s3: $\zeta = 0.7, \omega_n = 4.5 rad/s, Kr = 1$

s4: $\zeta = 1.0 \ \omega_n = 4.5 rad/s, Kr = 1$

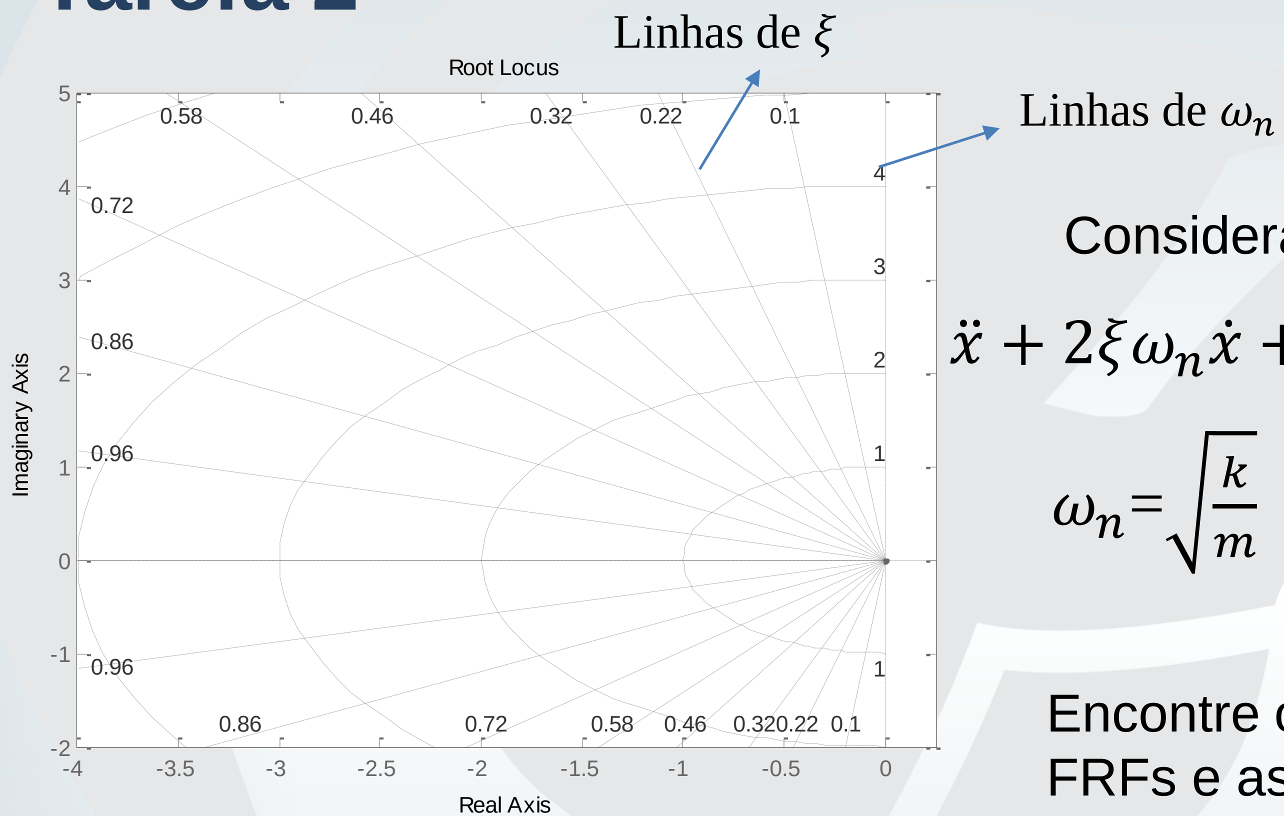
Considerando os sistemas

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = Kr\omega_n^2 \mathrm{u}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \xi = \frac{b}{2m\omega_n}$$

Encontre os polos, plote as FRFs e as resposta ao degrau, faça uma discussão sobre o impacto do aumento do amortecimento

Tarefa 2



$s5$: $\zeta = 0.5, \omega_n = 1 rad/s, Kr = 1$

s6: $\zeta = 0.5, \omega_n = 5 rad/s, Kr = 1$

s7: $\zeta = 0.5, \omega_n = 10 rad/s, Kr = 1$

s8: $\zeta = 0.5, \omega_n = 20 rad/s, Kr = 1$

Considerando os sistemas

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = Kr\omega_n^2 \mathrm{u}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \xi = \frac{b}{2m\omega_n}$$

Encontre os polos, plote as FRFs e as resposta ao degrau, faça uma discussão sobre o impacto do aumento da frequência natural

EESC • USP

www.eesc.usp.br