REVISÃO 1
Aula 38

Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

Primeiro Semestre de 2023

Importante lembrar:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^r} dx = \begin{cases} \text{é convergente se } r > 1 \\ \text{é divergente se } r \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^r} dx = \begin{cases} \text{é convergente se } r < 1 \\ \text{é divergente se } r \geq 1 \end{cases}$$

Exercício

Verifique se as integrais impróprias abaixo convergem ou divergem, justificando a resposta:

$$a)\ \int_2^{\infty} \frac{dx}{2(x-1)^2} \quad b)\ \int_2^{\infty} \frac{dx}{x-1} \quad c)\ \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \quad d)\ \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\operatorname{sen}(x)}}$$

Para a), b), c), d) usar teste de comparação no limite

a) Comparar com $f(x) = \frac{1}{x^2}$

b) Comparar com $f(x) = \frac{1}{x}$

c) Note que $1 - x^4 = (1-x^2)(1+x^2) = (1-x)(1+x)(1+x^2)$ e comparar com $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ quando $x \to 1^-$

d) Usar o limite fundamental e comparar com a função $\frac{1}{\sqrt{x}}$ quando $x \to 0^+$

Exercício

Encontre o valor das integrais impróprias, nos casos convergentes:

$$a)\ \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{4}{3}}} \qquad b)\ \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(x)\, dx \qquad c)\ \int_0^{\infty} x\, e^{-x}\, dx$$

$$d)\ \int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{5-2x} \qquad e)\ \int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x}\, dx \qquad f)\ \int_0^{\infty} e^{-2x}\, dx$$

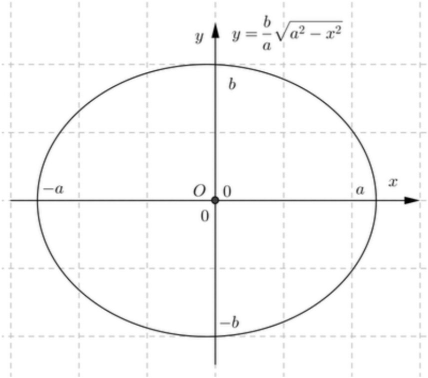
Convergentes: a), c), f)

Divergentes: b), d), e)

Exercício

Para $a, b > 0$ *considere a elipse de equação* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1. *Qual a função* $y = f(x)$ *cujo gráfico é parte superior da elipse?*
2. *Determine a área da elipse usando substituição trigonométrica e a identidade* $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$.



Calcule

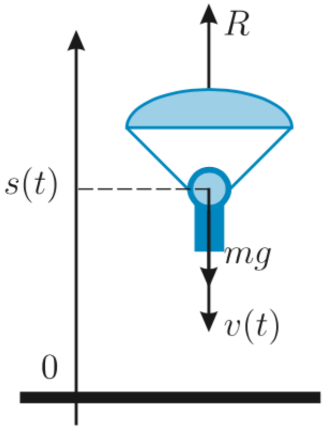
$$a) \int \frac{2 + w^4}{w^3 + 9w} dw \qquad b) \int \frac{1}{(x-1)(x^2+x+2)} dx$$

Um pouco sobre substituição trigonométrica

Calcule

$$(a)\ \int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}dx \quad (b)\ \int x\sqrt{1-x^4}dx \quad (c)\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+13}}dx$$

Modelo para um salto de paraquedas



Modelo para um salto de paraquedas

Um modelo para o estudo da velocidade de queda $v(t)$ de um paraquedista é supor que a força de resistência do ar seja dada por $R = bv(t)^2$, isto é, proporcional ao quadrado da velocidade. Como a força resultante é $P + R$, onde $P = -mg$ é a força peso, pela Segunda Lei de Newton, temos que

$$ma(t) = -mg + bv(t)^2.$$

Suponha que a aceleração da gravidade é $g = 10 \ \mathrm{m/s^2}$, a massa conjunta do paraquedas e do paraquedista é $m = 70 \ \mathrm{kg}$ e que $b = 700 \ \mathrm{kg/m}$.
Da Segunda Lei de Newton segue que

$$(*) \qquad \frac{v'(t)}{v(t)^2 - 1} = 10 \quad \text{para todo tempo } t \geq 0.$$

(a) Use a regra da substituição para transformar a integral $\int v'(t)/\left(v(t)^2 - 1\right)\,dt$ em uma outra que não envolve a função $v(t)$ nem a derivada $v'(t)$.

(b) Sabendo que $v(t)^2 - 1 > 0$, use a equação $(*)$ para determinar uma expressão de $v(t)$ em termos da função exponencial e de uma constante arbitrária.

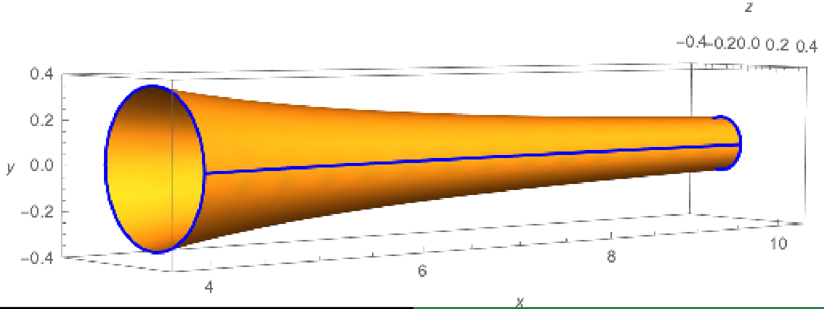
(c) Se o salto for efetuado de uma altura suficientemente grande, a velocidade com que o paraquedista alcança o solo é aproximadamente igual ao limite $\lim_{t\to\infty} v(t)$. Esse limite depende da constante arbitrária?

Trombeta de Gabriel

Para $x \in [4, b]$, o volume $V(b)$ e a área da superfície lateral $A(b)$ do sólido obtido por rotação do gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}\ln(x)}$ em torno do eixo $\mathcal{O}x$ são dados por

$$V(b) = \int_4^b \pi f(x)^2\,dx \quad \text{e} \quad A(b) = \int_4^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx\,.$$

Passando o limite com $b \to +\infty$, o sólido obtido se parece com uma trombeta ilimitada.



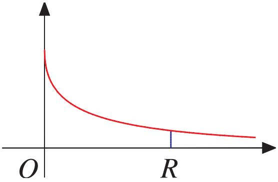
Trombeta de Gabriel

a) Calcule $V(b)$ e $\lim\limits_{b \to +\infty} V(b)$.

b) Observando que $2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \geq 2\pi f(x) \geq \dfrac{2\pi}{x}$ para $x \in [4, \infty)$, determine o $\lim\limits_{b \to +\infty} A(b)$ e compare o resultado com o item a).

Muito em um só lugar

A figura ao lado ilustra o gráfico da função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\sqrt[3]{x}}$. A área $A(R)$ sob esse gráfico entre $x = 0$ e $x = R$ é dada pela integral



$$A(R) = \int_0^R e^{-\sqrt[3]{x}} dx \,.$$

(a) Use uma mudança de variáveis para transformar a integral indefinida $\displaystyle\int e^{-\sqrt[3]{x}} dx$ em uma outra cujo integrando não envolva a função raiz cúbica.

(b) Calcule a integral do item anterior usando integração por partes (duas vezes).

(c) Usando os resultados anteriores, determine explicitamente a função $A(R)$.

(d) Calcule o limite $\displaystyle\lim_{R \to +\infty} A(R)$ usando a regra de L'Hôpital e verifique se a área sob o gráfico de $f(x)$, para $x \in [0, +\infty)$, é finita.