ALGUNS EXERCÍCIOS RELACIONADOS À DÉCIMA QUARTA SEMANA

Todos exercícios abaixo são do Strang.

Exercício 1. (Seção 7.3, Problema 6) Calcule $\sigma = \|x\|$, $v = x + \sigma z$ e $H = I - 2vv^T/v^T v$. Verifique que $Hx = -\sigma z$:

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 2. (Seção 7.3, Problema 7) Use o exercício anterior (ou seja, matrizes de Householder) para achar uma matriz tridiagonal $H^{-1}AH$ que é similar a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 3. (Seção 7.3, Problema 12) Escolha $\cos(\theta)$ e $\text{sen}(\theta)$ na rotação P que triangulariza A e ache R.

$$PA = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix} = R.$$

Exercício 4. (Seção 7.3, Problema 13) Escolha $\cos(\theta)$ e $\text{sen}(\theta)$ que tornam a matriz PAP^{-1} triangular, em que P e A são como no exercício anterior. Quem são seus autovalores?

Exercício 5. (Seção 7.3, Problema 16) Determine $\cos(\theta)$ e $\text{sen}(\theta)$ tal que PA dado abaixo tenha um zero na entrada $(2,1)$, ou seja, segunda linha e primeira coluna.

$$PA = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 6. (Seção 7.4, Problema 1) A matriz abaixo tem autovalores $2-\sqrt{2}$, 2 e $2+\sqrt{2}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ache as matrizes de Jacobi $D^{-1}(-L-U)$ e de Gauss-Seidel $(D+L)^{-1}(-U)$ e seus autovalores.

Exercício 7. (Seção 7.4, Problema 2) Para a matriz tridiagonal $n \times n$ abaixo, descreva a matriz de Jacobi $J = D^{-1}(-L-U)$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Note que os valores da diagonal de A são 2 e os valores imediatamente acima e abaixo da diagonal são -1.

Mostre que o vetor $(\text{sen}(\pi h), \text{sen}(2\pi h), ..., \text{sen}(n\pi h))$ é um autovetor de J com autovalor $\lambda = \cos(\pi h)$, em que $h = \frac{1}{n+1}$.

Exercício 8. (Seção 7.4, Problema 7) a) Para uma matriz 2×2 da forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

ache a matriz de iteração de Jacobi $S^{-1}T = -D(L+U)$ e seus autovalores μ_i. Ache também a matriz de iteração de Gauss-Seidel $S^{-1}T = -(D+L)^{-1}U$ e seus autovalores λ_i e verifique se $\lambda_{\max} = \mu_{\max}^2$.

Exercício 9. (Seção 7.4, Problema 8) Transforme $Ax = b$ em $x = (I - A)x + b$. Assim, podemos construir um método $Sx_{k+1} = Tx_k + b$. Quem são S e T nesse método? Qual é a matriz $S^{-1}T$ que controla a convergência de $x_{k+1} = (I - A)x_k + b$?

Exercício 10. (Seção 7.4, Problema 10) Diga por que a iteração $x_{k+1} = (I - A)x_k + b$ não converge quando $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Exercício 11. (Seção 7.4, Problema 12) Se A é singular e $A = S - T$, com S inversível, então o método $Sx_{k+1} = Tx_k + b$ deve falhar. Seja $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, tal que $Ax = 0$. Mostre que $S^{-1}Tx = x$ e conclua que a matriz $B = S^{-1}T$ tem autovalor 1. Logo B^k não pode convergir para zero.