

7-Testes do tipo Kolmogorov Smirnov

Testes de Aderência

O teste χ^2 de aderência é útil para dados na escala nominal, podendo ser usado para dados em escala superior. No entanto, exigiam grandes tamanhos de amostra, pois a distribuição da estatística de teste sob H_0 é assintoticamente qui-quadrado.

Teste de Aderência de Kolmogorov

Dados: Amostra aleatória $X_1, X_2, \dots, X_n$ de uma função distribuição desconhecida $F(x)$.

Seja $F^*(x)$ uma função distribuição completamente especificada.

A) Teste Bicaudal

$$H_0: F(x) = F^*(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

$$H_a: F(x) \neq F^*(x) \text{ para pelo menos um valor de } x.$$

B) Teste Unicaudal

$$H_0: F(x) \geq F^*(x) \quad -\infty < x < \infty$$

$$H_a: F(x) < F^*(x) \quad \text{para pelo menos um valor de } x$$

C) Teste Unicaudal

$$H_0: F(x) \leq F^*(x) \quad -\infty < x < \infty$$

$$H_a: F(x) > F^*(x) \quad \text{para pelo menos um valor de } x$$

$$\text{Seja } F_n(x) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de obs } \leq x}{n} \quad \text{estima } F(x)$$

Estatística de teste e regra de decisão:

$$A) T_1 = \sup_x |F^*(x) - F_n(x)|$$

Rejeita-se H_0 ao nível α se $T_1 > W_{1-\alpha}$, onde $W_{1-\alpha}$ é o quantil de ordem $1-\alpha$ dado na Tabela A.13 [quantis da estatística do teste de Kolmogorov], para o teste bicaudal

$$B) T_1^+ = \sup_x [F^*(x) - F_n(x)]$$

Rejeita-se H_0 ao nível α se $T_1^+ > w_{1-\alpha}$,

Tabela A.13, Teste unicaudal.

$$C) T_1^- = \sup_x [F_n(x) - F^*(x)]$$

Rejeita-se H_0 ao nível α se $T_1^- > w_{1-\alpha}$,

Tabela A.13, Teste unicaudal.

Exemplo

Amostra aleatória de tamanho $n=10$ da v.a. X

0,621 0,503 0,203 0,477 0,710 0,581 0,329

0,480 0,554 0,382

Deseja-se testar a hipótese que $X \sim U[0,1]$

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \int_0^x dx = x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

x	$F_n(x)$	$F^*(x)$
0,203	0,1	0,203
0,329	0,2	0,329
0,382	0,3	0,382
0,477	0,4	0,477
0,480	0,5	0,480
0,503	0,6	0,503
0,554	0,7	0,554
0,581	0,8	0,581
0,621	0,9	0,621
0,710	1,0	0,710

$$|F^* - F_n|$$

0,219

0,279

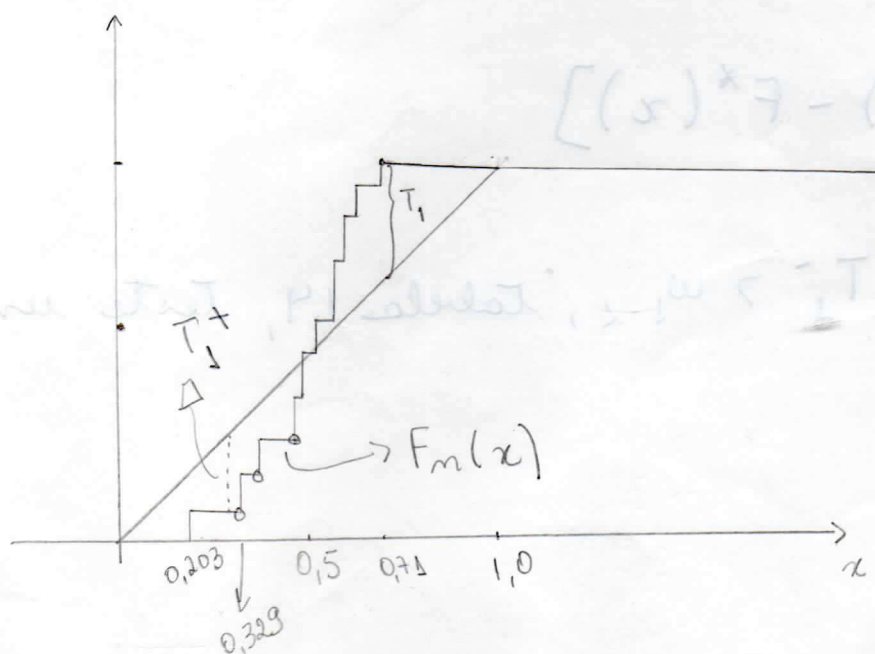
0,290

$$H_0: F(x) = F^*(x)$$

$$H_a: F(x) \neq F^*(x)$$

$$\alpha = 0,05 \quad n = 10$$

$$\omega_{1-\alpha} = \omega_{0,95} = 0,409$$



$$T_1 = \sup_x |F^*(x) - F_n(x)| = |F^*(0,71) - F_n(0,71)| = 0,29$$

$$= 1 - 0,71 = 0,29$$

$$T_1 < 0,409, \text{ não rejeitamos } H_0$$

Se quiséssemos testar

$$H_0: F(x) \geq F^*(x) \quad \forall x$$

$$H_a: F(x) < F^*(x) \quad \text{para algum } x$$

$$T_1^+ = \sup_x [F^*(x) - F_n(x)] \quad \text{só procura onde } F^* > F_n$$

T_1^+ será o calculado à esquerda do 2º salto

$$T_1^+ = \lim_{x \rightarrow 0,329^-} [F^*(x) - F_n(x)] = 0,329 - 0,1 = 0,229$$

↳ 2º elemento da amostra

$$T_1^- = T_1$$

$$\text{No geral, } T_1 = \max \{ T_1^+, T_1^- \}$$

Obs:

- O teste de Kolmogorov não pode ser aplicado a algumas situações (por ex., dados na escala nominal) nas quais o teste χ^2 de aderência pode ser utilizado.
- Quando os dois testes puderem ser aplicados, o teste de Kolmogorov é preferível para pequenas amostras porque é um teste exato (mesmo para pequenas amostras) enquanto o teste χ^2 assume grandes amostras.