

MAE 314 - Análise Estatística

5ª lista de exercícios - Gabarito

1) Teste de Durbin

H_0 : Os sete comerciais são equivalentes

H_a : Pelo menos um dos comerciais é superior aos demais.

$$b = t = 7 \quad r = r = 3 \quad T = \frac{12(t-1)}{rt(k-1)(k+1)} \sum_{j=1}^t \left[R_j - \frac{r(k+1)}{2} \right]^2$$

$$\frac{r(k+1)}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \quad R_1=8 \quad R_2=9 \quad R_3=4 \quad R_4=3 \quad R_5=5 \\ R_6=6 \quad R_7=7$$

$$T = \frac{12 \cdot 6}{3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 4} (4 + 9 + 4 + 9 + 1 + 0 + 1) = 12$$

Se a hipótese que os comerciais são equivalentes $T \sim \chi^2_6$

$\alpha = 0,05 \quad \chi^2_{6,0.05} = 12,59 > T_{obs}$. Não rejeitamos H_0 .

Os dados sugerem equivalência de preferência dos sete comerciais.

2) Teste de Mann-Whitney

H_0 : Igualdade nas médias da preferência para homens e mulheres

H_a : Não há igualdade de médias

$$n = 16 \quad m = 23 \quad T = \sum_{i=1}^{16} R(X_i) \text{ soma de postos dos homens}$$

$$N = 16 + 23 = 39$$

Devido aos empates utilizar

$$T_1 = \frac{T - n \frac{N+1}{2}}{\sqrt{\frac{nm}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N R_i^2 - \frac{nm(N+1)^2}{4(N-1)}}$$

$$\bar{T} = \sum_{i=1}^n R(x_i) = 209,5$$

X	Y	R	X	Y	R
6		1,5	10		14,5
	6	1,5	10		14,5
7		5	10		14,5
7		5	11		19,5
7		5	11		19,5
7		5			
7		5	12		24
7		5	12		24
8		9	12		24
	8	9	12		24
	8	9	12		24
10		14,5	12		24
10		14,5	12		24
10		14,5	12		24
10		14,5	13		29,5
10		14,5	13		29,5
			13		29,5

$$T_1 = \frac{209,5 - 16 \frac{39+1}{2}}{\sqrt{\frac{16 \cdot 23}{39 \cdot 38} \cdot 20449 - \frac{16 \cdot 23 \cdot 40^2}{4 \cdot 38}}} = \frac{-111}{34,6997} = -3,199$$

$$m = 23 > 20 \text{ usar } w_p = \frac{n(N+1)}{2} + z_p \sqrt{\frac{nm(N+1)}{12}}$$

z_p quantil de ordem p da dist $N(0,1)$.

Teste bicaudal RC: $T_1 < w_{\alpha/2}$ ou $T_1 > w_{1-\alpha/2}$

Para $\alpha = 0,05$

$$w_{1-\alpha/2} = w_{0,975} = \frac{16 \cdot 40}{2} + z_{0,975} \sqrt{\frac{16 \cdot 23 \cdot 40}{12}} =$$
$$= 320 + 1,96 \sqrt{1.226,67} = 320 + 1,96 \cdot 35,02 = 388,63$$

$$w_{0,025} = 320 - 1,96 \cdot 35,02 = 251,3608$$

RC: $T_1 < 251,36$ ou $T_1 > 388,63$ T_1 RC

Rejeita-se H_0 . Os dados sugerem desigualdade das preferências médias para homens e mulheres.

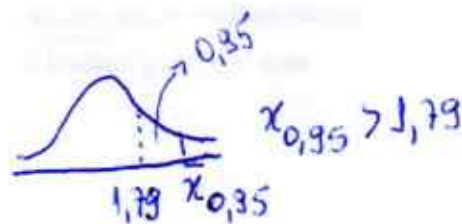
3) Nesse caso, deseja-se verificar se o quantil de ordem 0,95 é 1,79 m. contra a alternativa de que é maior que 1,79 m, pois este seria o caso problemático.

$$H_0: P(X \leq 1,79) = 0,95$$

X - altura

$$H_a: P(X \leq 1,79) < 0,95$$

sol H_a ,



$$\text{Seja } p = P(X \leq 1,79) \Leftrightarrow H_0: p = 0,95$$

$$H_a: p < 0,95$$

$T = n^\circ$ de pessoas na amostra com altura inferior a 0,95

sol H_0 , $T \sim \text{br}(12, 0,95)$ RC = $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$

$$P(T \notin \text{RC} | p = 0,95) = 0,05 \quad T_{\text{obs}} = 4 \in \text{RC}, \text{ rejeita-se } H_0.$$

4) Teste do sinal: + quando há melhora
 $\Leftrightarrow$ Nota da 6ª Teia > Nota da 1ª Teia

$$H_0: p(+) = 1/2 \quad n' = 14 \rightarrow \text{excluído o empate}$$

$$H_a: p(+) > 1/2 \quad T = \text{nº de + dentre os 14 pares}$$

Sob H_0 , $T \sim b(14, 1/2)$, para $\alpha = 0,05$

$$RC: T \in \{11, 12, 13, 14\} \quad P(T=11) + P(T=12) + P(T=13) + P(T=14) \stackrel{b(14, 1/2)}{=} \downarrow$$

$$= 0,022 + 0,006 + 0,001 + 0 = 0,029 \quad P(T=10) = 0,061 \quad T=10 \notin RC$$

$$T_{obs} = 4 \notin RC \rightarrow \text{Não rej. } H_0. \quad \text{para } \alpha \leq 0,05$$

$$\text{Nível descritivo} = P(T > 4 | p = 1/2) = 1 - 0,022 - 0,006 - 0,001 = 0,971$$

5) $H_0: \text{Med}(X) = \text{Med}(Y)$

$$H_a: \text{Med}(X) \neq \text{Med}(Y)$$

X - nº de terremotos antes da explosão

Y - " " " após " "

a) Teste de Wilcoxon

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
D_i	-9	4	28	-1	0	11	21	-4	10	-21	-29	-1	2
$ D_i $	9	4	28	1	0	11	21	4	10	21	29	1	2
Posto $ D_i $	6	4,5	11	1,5	-	8	9,5	4,5	7	9,5	12	1,5	3
R_i	0	4,5	11	0	-	8	9,5	0	7	0	0	0	3

$$R_i = \begin{cases} 0 & \text{se } D_i < 0 \\ \text{Posto} & \text{se } D_i > 0 \end{cases}$$

$$T = \sum R_i = 43 \quad \text{Teste bicaudal} \quad \alpha = 0,05 \quad n = 12 \quad \text{Tabela A.13}$$

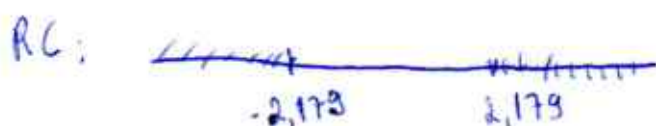
$$RC: T < W_{\alpha/2} \text{ ou } T > W_{1-\alpha/2} \quad T < 14 \text{ ou } T > \frac{12 \cdot 13}{2} - 14 = 64$$

$$T_{obs} \notin RC \rightarrow \text{Não se rejeita } H_0.$$

b) Seria possível usar o teste t se pudéssemos admitir que a variável diferença tem distribuição aproximadamente normal.

$$\begin{aligned} c) H_0: \mu_D &= 0 & \bar{D} &= 0,8461 & \sum D_i^2 &= 2847 & \sum D_i &= 11 \\ H_a: \mu_D &\neq 0 & s_D^2 &= \frac{2847 - \frac{11^2}{13}}{12} & &= 236,47 \end{aligned}$$

$$t = \frac{\bar{D} - 0}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}} = \frac{0,8461}{\frac{15,37}{\sqrt{13}}} = 0,198 \quad t_{c,12} = 2,179$$



$t_{obs} \notin RC$ Não rejeitamos H_0

6) Teste de Kruskal Wallis

H_0 : A duração média das pneumas é a mesma para as quatro marcas.
 H_a : Pelo menos uma das marcas apresenta maior durabilidade

Postos

Marcas A	12	20,5	18	22,5	7	16,5	$R_1 = 96,5$
Marcas B	9,5	22,5	24	20,5	4,5	14,5	$R_2 = 95,5$
Marcas C	7	13	16,5	12	14,5	4,5	$R_3 = 73,5$
Marcas D	1	12	9,5	3	7	2	$R_4 = 34,5$

Utilizando a estatística para inexistência de empates

$$T = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^K \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1) =$$

$$= \frac{12}{24.25} \left[\frac{96,5^2}{6} + \frac{95,5^2}{6} + \frac{73,5^2}{6} + \frac{34,5^2}{6} \right] - 3.25 =$$

$$= \frac{1}{50.6} \cdot 25025 - 75 = 83,42 - 75 = 8,42$$

Rejeita-se H_0 para $T > \chi^2_{3,0,05} = 7,815$.

$\therefore$ Ao nível 0,05, os dados sugerem diferenças nos consumos médios.

7) H_0 : As cinco candidatas são equivalentes

H_a : Pelo menos uma das candidatas tende a ter preferência

Teste de Friedman

$$T = \frac{12}{b k (k+1)} \sum_{j=1}^k \left[R_j - \frac{b(k+1)}{2} \right]^2$$

$$b=7 \quad k=5$$

$$\frac{b(k+1)}{2} = 21$$

$$R_1=26 \quad R_2=11 \quad R_3=16 \quad R_4=20 \quad R_5=32$$

$$T = \frac{12}{7 \cdot 5 \cdot 6} (25 + 100 + 25 + 1 + 121) = 15,543$$

$$\chi^2_{6,4}(0,05) = 9,488$$

Rejeita-se H_0 . Os dados sugerem que pelo menos uma das candidatas tem maior preferência

$$\begin{aligned} 9) \quad H_0: x_{0,5} &= 103 \Leftrightarrow P(X \leq 103) = 0,5 \Leftrightarrow p = 0,5 \quad p = P(X \leq 103) \\ H_a: x_{0,5} &\neq 103 \quad P(X \leq 103) \neq 0,5 \quad p \neq 0,5 \end{aligned}$$

$$T = \text{n}^\circ \text{ de valores amostrais } \leq 103 \quad \text{ sob } H_0 \quad T \sim b(20, 1/2)$$

$$RC = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{15, 16, 17, 18, 19, 20\} \Rightarrow \alpha = 2 \times 0,0209$$

$T_{obs} = 6 \notin RC$ Não rejeitamos H_0 . Não podemos rejeitar a hipótese de que a mediana da v.a. X é 103.