SEL0310 - Ondas Eletromagnéticas

Resolução Quiz #1

A partir do que foi proposto pelo enunciado, deduz-se um caso de onda em polarização TE (*h-wave*), incidindo de maneira descendente, com plano de incidência x-z ($\phi = 0°$), em uma interface isotrópica-biaxial. Dessa forma, tem-se para os vetores de onda incidente e de ondas refletidas (horizontal e vertical):

$$\vec{k}_i = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} - k_{0z}\hat{z}$$
$$\vec{k}_r = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_{0z}\hat{z}$$

onde, considerando que a onda incide com ângulo θ na interface, tem-se:

$$\begin{aligned} k_x &= k_0 \cdot sen\,(\theta) \\ k_y &= 0 \\ k_{0z} &= k_0 \cdot cos\,(\theta) \end{aligned}$$

Por sua vez, os vetores unitários de campo elétrico devem ser equivalente a:

$$\hat{h}_0^+ = \hat{h}_0^- = \hat{y}$$
$$\hat{v}_0^+ = -cos\,(\theta)\,\hat{x} + sen\,(\theta)\,\hat{z}$$

A partir deste momento, é necessário definir os vetores de onda das duas ondas transmitidas $\vec{k}_a = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z^{ad}\,\hat{z}$ e $\vec{k}_b = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z^{bd}\,\hat{z}$, bem como os vetores unitários de campo elétrico $\hat{a}^-$ e $\hat{b}^-$, utilizando a Equação Booker de quarto grau (cf. Capítulo 2.1.1.1 *Unbounded Media* do artigo *Arbitrarily Oriented Biaxially Anisotropic Media Wave Behavior and Microstrip Antennas*). Nesse sentido, de antemão, considera-se os vetores:

$$\vec{s} = \vec{k}_i \times \hat{q} = -k_0 \cdot sen\,(\theta)\,\hat{y}$$

$$\vec{t} = \hat{q} \times \vec{s} = k_0 \cdot sen\,(\theta)\,\hat{x}$$

onde $\hat{q} = -\hat{z}$ é o vetor unitário normal à interface apontando do meio isotrópico (Região 0) para o meio anisotrópico (Região 1). Dessa forma, os vetores propagação das ondas transmitidas serão dados por:

$$\vec{k}_a = \vec{t} + q_a\,\hat{q}$$

$$\vec{k}_b = \vec{t} + q_b\,\hat{q}$$

onde q_a e q_b são as duas raízes positivas da equação

$$Aq^4 + Bq^3 + Cq^2 + Dq + F = 0$$

Seja o tensor de permissividade biaxial sem rotação da Região 1

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

tem-se:

$$\begin{aligned}
&A = \epsilon_z \\
&B = D = 0 \\
&C = -k_0^2 \cdot \epsilon_z \cdot (\epsilon_x + \epsilon_y) + k_0^2 \cdot sen^2\,(\theta) \cdot (\epsilon_x + \epsilon_z) \\
&F = -k_0^4 \cdot sen^2\,(\theta) \cdot \epsilon_x \cdot (\epsilon_y + \epsilon_z) + k_0^4 \cdot sen^4\,(\theta) \cdot \epsilon_x + k_0^4 \cdot det(\epsilon)
\end{aligned}$$

Com essas ferramentas, é possível determinar

$$\begin{aligned}
k_z^{ad} &= q_a \\
k_z^{bd} &= q_b
\end{aligned}$$

Em mãos dos vetores propagação das ondas transmitidas, define-se os vetores unitários de campo elétrico:

$$\begin{aligned}
\hat{a}^- &= (\,\nu^{\alpha d}\,)^{-\frac{1}{2}}\;\overline{\overline{\chi}} \cdot \hat{\alpha}^- \\
\hat{b}^- &= (\,\nu^{\beta d}\,)^{-\frac{1}{2}}\;\overline{\overline{\chi}} \cdot \hat{\beta}^-
\end{aligned}$$

onde $\overline{\overline{\chi}}$ é equivalente a $\overline{\overline{\epsilon}}^{\,-1}$ e ν é um fator de normalização definido por:

$$\nu^{\,id} = \hat{i}^- \cdot \overline{\overline{\chi}}^2 \cdot \hat{i}^- \quad com\ i = \alpha\ ou\ \beta$$

Os vetores $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são os vetores unitários dos dois vetores de deslocamento característicos do meio, computados a partir de:

$$\hat{\alpha}^- = \frac{1}{h^{ad}}\left[\frac{\vec{k}_a \times \hat{o}_1}{|\vec{k}_a \times \hat{o}_1|} + \frac{\vec{k}_a \times \hat{o}_2}{|\vec{k}_a \times \hat{o}_2|}\right]$$

$$\hat{\beta}^- = \frac{1}{h^{bd}}\left[\frac{\vec{k}_b \times (\vec{k}_b \times \hat{o}_1)}{|\vec{k}_b \times \hat{o}_1|} + \frac{\vec{k}_b \times (\vec{k}_b \times \hat{o}_2)}{|\vec{k}_b \times \hat{o}_2|}\right]$$

onde h é o fator de normalização dos vetores unitários de deslocamento e os termos $\hat{o}$ são os vetores unitários na direção do eixo óptico. Computa-se:

$$h^{id} = \sqrt{2}\left[1 + \frac{(\vec{k}_i \times \hat{o}_1) \cdot (\vec{k}_i \times \hat{o}_2)}{|\vec{k}_i \times \hat{o}_1||\vec{k}_i \times \hat{o}_2|}\right]^{\frac{1}{2}} \quad com\ i = a\ ou\ b$$

$$\begin{pmatrix} \hat{o}_1 \\ \hat{o}_2 \end{pmatrix} = \pm g_1 \hat{x} + g_2 \hat{z}$$

onde

$$g_1 = \left[\frac{\epsilon_{max}(\epsilon_{mid} - \epsilon_{min})}{\epsilon_{mid}(\epsilon_{max} - \epsilon_{min})}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$g_2 = \left[\frac{\epsilon_{min}(\epsilon_{max} - \epsilon_{mid})}{\epsilon_{mid}(\epsilon_{max} - \epsilon_{min})}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Por fim, utiliza-se a equação matricial apresentada no capítulo 2.2.1.1.1 *Horizontally polarized wave downward incident upon isotropic-biaxial interface* do artigo *Arbitrarily Oriented Biaxially Anisotropic Media Wave Behavior and Microstrip Antennas* para resolver numericamente o problema, encontrando os coeficientes de reflexão e transmissão desejados.