SEL0310 - Ondas Eletromagnéticas

Resolução Quiz #5

1 Questão 1

Considere a configuração mostrada abaixo, sabendo que a fonte apresenta f = 15 MHz, V = 100 Volts, com impedância $Z_S = 50\ \Omega$. Essa fonte é conectada a uma linha de transmissão sem perdas. A indutância por unidade de comprimento é $L = (5/3) \times 10^{-7}$ H/m, e a capacitância por unidade de comprimento $C = (2/3) \times 10^{-10}$ F/m. A linha é terminada com uma antena com impedância $Z_{ant} = 50 + j50\ \Omega$. O comprimento da linha é de 2,5m. Encontre:

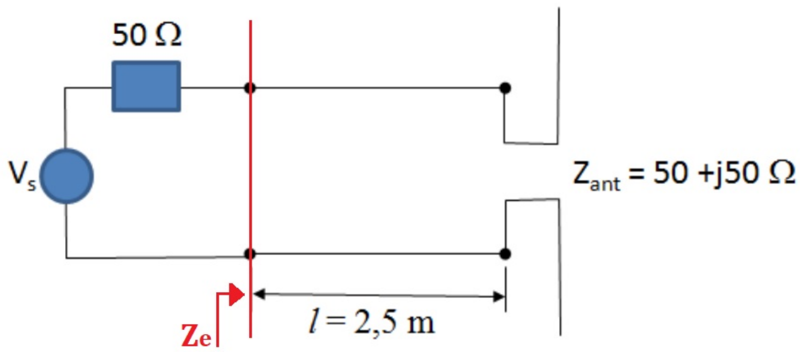


Figura 1: Esquemático da LT

(a) **A constante de propagação da linha de transmissão**

Seja a constante de propagação k para LT sem perdas dada por:

$$k = \omega\sqrt{LC} = 2\pi f\sqrt{LC} \Rightarrow \boxed{k = 0.314\ m^{-1}}$$

(b) **A impedância característica da linha**

Seja a impedância característica Z_0 da LT sem perdas dada por:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow \boxed{Z_0 = 50\ \Omega}$$

(c) **O coeficiente de reflexão na carga**

O coeficiente de reflexão na carga Γ_0 é dado por:

$$\Gamma_0 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

onde $Z_L = Z_{ant}$, tem-se:

$$\boxed{\Gamma_0 = 0.2 + j0.4 = 0.45\,\angle\,63.43^\circ}$$

(d) **A impedância vista pela fonte**

Seja a impedância ao longo da LT sem perdas, para $z \leq 0$, dada por:

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L - jZ_0\,tg(kz)}{Z_0 - jZ_L\,tg(kz)},$$

inicialmente, calcula-se a impedância de entrada Z_e da LT:

$$Z_e \equiv Z(z = -l) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0\,tg(kl)}{Z_0 + jZ_L\,tg(kl)} \Rightarrow \boxed{Z_e = 100 - j50\ \Omega = 111.80\angle - 26.57^\circ\ \Omega}$$

Dessa forma, considerando o gerador como sendo o conjunto formado pela fonte V e a impedância interna Z_S, a impedância vista pela fonte é dada pela associação em série da impedância interna do gerador com a impedância vista pelo gerador, ou seja, a impedância de entrada da linha de transmissão. Equaciona-se:

$$Z_V = Z_e + Z_S$$

Logo, a impedância vista pela fonte é $\boxed{Z_V = 150 - j50\ \Omega = 158.11\angle - 18.43^\circ\ \Omega}$

(e) **A porcentagem da potência média no tempo dissipada pela antena**

Seja a onda incidente de tensão $V^+(z)$ na LT sem perdas dada por:

$$V^+(z) = V^+\,e^{-jkz}$$

e a onda incidente de corrente $I^+(z)$ na LT sem perdas, por:

$$I^+(z) = \frac{V^+}{Z_0}\,e^{-jkz},$$

então a potência média P_m^+ da onda incidente será descrita como:

$$P_m^+ = \frac{1}{2} Re\left\{V^+(z)[I^+(z)]^*\right\}$$

$$P_m^+ = \frac{1}{2} Re\left\{V^+(z)\left[\frac{V^+(z)}{Z_0}\right]^*\right\}$$

$$P_m^+ = \frac{1}{2\,Z_0} Re\left\{V^+(z)\left[V^+(z)\right]^*\right\}$$

$$P_m^+ = \frac{|V^+|^2}{2\,Z_0}\ [W]$$

Seja a onda refletida de tensão e corrente da linha de transmissão sem perdas dada por:

$$V^-(z) = V^-\,e^{jkz} \quad e \quad I^-(z) = \frac{V^-}{Z_0}\,e^{jkz}$$

onde

$$V^- = \Gamma_0\,V^+,$$

então a potência média P_m^- da onda refletida na carga será descrita por:

$$P_m^- = \frac{1}{2} Re\left\{V^-(z)[I^-(z)]^*\right\}$$

$$P_m^- = \frac{1}{2} Re\left\{V^-(z)\left[\frac{V^-(z)}{Z_0}\right]^*\right\}$$

$$P_m^- = \frac{1}{2\,Z_0} Re\left\{V^-(z)\left[V^-(z)\right]^*\right\}$$

$$P_m^- = \frac{|V^-|^2}{2\,Z_0} = \frac{|\Gamma_0|^2|V^+|^2}{2\,Z_0}\ [W]$$

Nesse sentido, a potência média dissipada pela impedância de carga é dada por:

$$P_m^L = P_m^+ - P_m^-$$

$$P_m^L = \frac{|V^+|^2}{2\,Z_0}\left(1 - |\Gamma_0|^2\right) = \left(1 - |\Gamma_0|^2\right) P_m^+\ [W]$$

Assim, a porcentagem da potência média no tempo dissipada pela antena (carga) será:

$$P_m^{ant}/P_m^+ = 1 - |\Gamma_0|^2 \Rightarrow \boxed{P_m^{ant}/P_m^+ = 80\ \%}$$

2 Questão 2

Considere uma linha com $\boldsymbol{Z_0 = 500\ \Omega}$ e comprimento de 250m operando a uma frequência de 400 kHz. A constante de atenuação é $\boldsymbol{\alpha = 2,4 \times 10^{-3}}$ Np/m e a constante de fase é $\boldsymbol{\beta = 0,0212}$ rad/m. A impedância de carga é $\boldsymbol{Z_L = 424,3\angle 45^\circ\ \Omega}$. Encontre:

(a) **O comprimento da linha em comprimentos de onda**

Nesse caso, o comprimento de onda λ é dado por:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \Rightarrow \boxed{\lambda = 296.38 \text{ m}}$$

Assim, tem-se:

$$\boxed{l = 0.844\,\lambda}$$

(b) **O coeficiente de reflexão na carga**

$$\Gamma_0 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \Rightarrow \boxed{\Gamma_0 = 0.42\angle 103.13^\circ = -0.09 + j0.41}$$

(c) **O coeficiente de reflexão na entrada da linha**

Seja

$$k = \alpha + j\beta = (2.4 + j21.2) \times 10^{-3}\ m^{-1}$$

calcula-se o coeficiente de reflexão na entrada da linha:

$$\Gamma_e \equiv \Gamma(z = -l) = \Gamma_0\, e^{-2kl}$$

$$\boxed{\Gamma_e = 0.13\angle -144.21 = -0.10 - j0.07}$$

(d) **A impedância de entrada**

$$Z_e \equiv Z(z = -l) = Z_0 \frac{1 + \Gamma_0\, e^{-2kl}}{1 - \Gamma_0\, e^{-2kl}} = Z_0 \frac{Z_L + Z_0\, tgh(kl)}{Z_0 + Z_L\, tgh(kl)} \Rightarrow$$

$$\boxed{Z_e = 407.0\angle -8.59^\circ\ \Omega = 402.44 - j60.81\ \Omega}$$

onde

$$tgh(x) = \frac{senh(x)}{cosh(x)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

O coeficiente de reflexão na entrada da linha também pode ser calculado por:

$$\Gamma_e = \frac{Z_e - Z_0}{Z_e + Z_0}$$

(e) **Para uma tensão na carga $V_{s_L} = 50\angle 0°$ V, encontre V_s, a posição onde a tensão é máxima e o módulo desta tensão.**

Em estado estacionário, seja a tensão ao longo da linha de transmissão dada por:

$$V(z) = V^+ \, e^{-kz} + V^- \, e^{+kz},$$

com $V^+ = \Gamma_0 \, V^-$, tem-se:

$$V(z) = V^+ \left(e^{-kz} + \Gamma_0 \, e^{+kz}\right) \quad (1)$$

Assim,

$$V(z=0) = V_{s_L} = V^+ \,(1 + \Gamma_0) \Rightarrow V^+ = \frac{V_{s_L}}{1 + \Gamma_0} \Rightarrow$$

$$\boxed{V^+ = 45.83 - j20.83 \text{ V} = 50.34 \angle -24.44 \text{ V}}$$

Assim, seja V_s a tensão na fonte de impedância interna nula que alimenta a LT, o que corresponde igualmente a tensão na entrada da linha, tem-se:

$$V_s \equiv V(z=-l) = V^+ \left(e^{+kl} + \Gamma_0 \, e^{-kl}\right) \Rightarrow \boxed{V_s = 82.56\angle -85.51 = 6.46 - j82.30}$$

Nesse mesmo panorama, pode-se deduzir o módulo da tensão ao longo da linha a partir da Eq. 1:

$$|V(z)|^2 = V(z)V(z)^* = |V^+|^2 \left(e^{-\alpha z} \, e^{-j\beta z} + \Gamma_0 \, e^{+\alpha z} \, e^{+j\beta z}\right) \left(e^{-\alpha z} \, e^{+j\beta z} + \Gamma_0^* \, e^{+\alpha z} \, e^{-j\beta z}\right) \Rightarrow$$

$$|V(z)|^2 = |V^+|^2 \left(e^{-2\alpha z} + \Gamma_0 \, e^{+j2\beta z} + \Gamma_0^* \, e^{-j2\beta z} + |\Gamma_0|^2 \, e^{+2\alpha z}\right)$$

Tendo o coeficiente de reflexão na carga forma complexa $\Gamma_0 = |\Gamma_0| \, e^{j\phi_r}$, escreve-se:

$$\Gamma_0 \, e^{+j2\beta z} + \Gamma_0^* \, e^{-j2\beta z} = |\Gamma_0| \left[e^{+j(2\beta z + \phi_r)} + e^{-j(2\beta z + \phi_r)}\right] = 2\,|\Gamma_0| \, cos(2\beta z + \phi_r)$$

Logo, tem-se:

$$|V(z)|^2 = |V^+|^2 \left(e^{-2\alpha z} + 2\,|\Gamma_0| \, cos(2\beta z + \phi_r) + |\Gamma_0|^2 \, e^{+2\alpha z}\right) \quad (2)$$

Para encontrar-se os máximos de tensão ao longo da linha, deve-se operar no intervalo $z \in [-250, 0]$:

$$\frac{d}{dz} \left[e^{-2\alpha z} + 2\,|\Gamma_0| \, cos(2\beta z + \phi_r) + |\Gamma_0|^2 \, e^{+2\alpha z}\right] = 0$$

$$-2\alpha \, e^{-2\alpha z} - 4\beta |\Gamma_0| \, sen(2\beta z + \phi_r) + 2\alpha \, |\Gamma_0|^2 \, e^{+2\alpha z} = 0$$

Para resolver a equação sem solução analítica anterior, no intervalo considerado, utiliza-se o método de Newton. Como chute ou aproximação inicial, avalia-se a Eq. 2. Nesse sentido, percebe-se que o termo cossenoidal tem forte influência nos pontos de máximo de tensão, portanto, pode-se partir de um dos pontos de máximo do cosseno dentro do intervalo de z.

Assim,

$$2\,\beta\, z_{max} + \phi_r = 2n\pi \Rightarrow z_{max} = \frac{2n\pi - \phi_r}{2\,\beta},\ n = 0, -1, -2, -3...$$

Em $z \in [-250, 0]$, encontra-se dois pontos de máximo possível para o cosseno:

$$z_{max}^{0} = -42.45\ m$$

$$z_{max}^{-1} = -190.64\ m$$

O ponto $V(z = z_{max}^{-1})$ apresenta o maior valor de módulo entre as duas posições obtidas, logo, espera-se que este esteja na vizinhança do máximo de tensão global da LT.

Assim, utilizando o método de Newton com chute inicial em -190.64 m, tolerância de 10^{-10}, encontra-se:

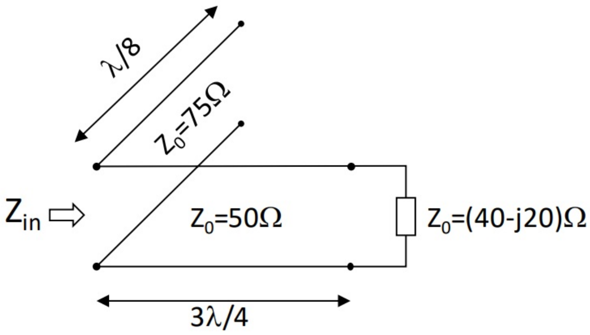
$$\boxed{z_{max} = -198.80 \text{ m}}$$

Nesta posição, o módulo da tensão equivale a:

$$\boxed{|V|_{max} = 93.63 \text{ V}}$$

3 Questão 3

Encontre a impedância de entrada do circuito abaixo sabendo que o *stub* de $Z_0 = 75\ \Omega$ é de circuito aberto.



A partir do circuito fornecido, observa-se que no plano de entrada (Z_{in}) em questão, existem duas impedâncias associadas em paralelo: (i) a impedância de entrada da linha principal de $Z_0 = 50\ \Omega$ e (ii) a impedância de entrada do *stub*.

Assim, de antemão, calcula-se tais impedâncias supondo LT sem perdas:

(i) Linha principal $Z_0 = 50\ \Omega$

$$kz\Big|_{z=-3\lambda/4} = -\frac{2\pi}{\lambda}\frac{3\lambda}{4} = -\frac{3\pi}{2}$$

Assim,

$$Z_{in}^{p} \equiv Z(z = -3\lambda/4) = Z_0\,\frac{Z_L + jZ_0\,tg\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{Z_0 + jZ_L\,tg\left(\frac{3\pi}{2}\right)} \Rightarrow \boxed{Z_{in}^{p} = 50 + j25\ \Omega = 55.90\angle 26.57^\circ\ \Omega}$$

(ii) *Stub* $Z_0 = 75\ \Omega$

$$kz\Big|_{z=-\lambda/8} = -\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{8} = -\frac{\pi}{4}$$

Seja $Z_L \to \infty$, então:

$$Z_{in}^{stub} \equiv Z(z = -\lambda/8) = Z_0\,\frac{1}{j\,tg\left(\frac{\pi}{4}\right)} \Rightarrow \boxed{Z_{in}^{stub} = -j75\ \Omega = 75\angle -90^\circ\ \Omega}$$

Portanto, a impedância na entrada será dada por:

$$Z_{in} = \frac{Z_{in}^{stub}\cdot Z_{in}^{p}}{Z_{in}^{stub} + Z_{in}^{p}} \Rightarrow \boxed{Z_{in} = 56.25 - j18.75\ \Omega = 59.29\angle -18.43^\circ\ \Omega}$$