Prova 2 - Matemática II - CCM - Junho 23

Q1 Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$.

(a) Escreva f como uma função de duas variáveis, isto é, se $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$, escreva $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$, onde f_1 e f_2 são funções que tomam valores em $\mathbb{R}$.

(b) Fixando $y = x_0$, podemos definir $h_{y_0}(x) = (f_1(x,y_0), f_2(x,y_0))$. Para x variando, $h_{y_0}(x)$ percorre a imagem, por f, da reta horizontal

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = y_0\}$$

Descreva essas imagens. Analogamente, para cada $x = x_0$, definindo $v_{x_0}(y) = (f_1(x_0,y), f_2(x_0,y))$, para y variando, $v_{x_0}(y)$ descreve a imagem, por f, da reta vertical

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_0\}.$$

Descreva-as também.

(c) Calcule as derivadas $h'_{y_0}(x)$, $v'_{x_0}(y)$ e mostre que $h'_{y_0}(x_0)$ e $v'_{x_0}(y_0)$ são vetores perpendiculares em $\mathbb{R}^2$.

Como as retas horizontais e verticais são perpendiculares, isso mostra que f leva retas perpendiculares em curvas que se intersectam perpendicularmente. Essa é uma manifestação de um fenômeno mais geral: se $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tem derivada complexa, então f preserva ângulos (é "conforme") em pontos onde $f'(z_0) \neq 0$.

Q2 (a) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua e $f(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$.

Mostre que, se
$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$
então $f\equiv 0$ (isto é, $f(x)=0$, $\forall x\in[a,b]$).

(b) Denotamos por V o conjunto de todas as funções definidas em $[a,b]$ com valores em $\mathbb{R}$. Dadas $f,g\in V$, defina
$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

Prove que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é um "produto escalar" em V, isto é, valem as seguintes propriedades $\forall f,g,h\in V$, $\forall c\in\mathbb{R}$:

(i) $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$

(ii) $\langle f+g,h\rangle = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$

(iii) $\langle cf,g\rangle = c\langle f,g\rangle$

(iv) $\langle f,f\rangle \geq 0$ e $\langle f,f\rangle = 0 \Rightarrow f\equiv 0$.

(c) Prove a desigualdade de Cauchy-Schwarz: $\langle f,g\rangle^2 \leq \langle f,f\rangle \cdot \langle g,g\rangle$.

(d) Conclua que, se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f(x)^2\,dx .$$

Q3 Para cada uma das seqüências a seguir, decida se é ou não convergente.

Se for convergente, denotando por ℓ o limite, encontre $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $|x_n - \ell| < \varepsilon$, para os seguintes valores de ε: $1, 0.1, 0.01$.

(a) $\dfrac{n^2+1}{n} - \dfrac{n^2}{n+1}$

(b) $\dfrac{n^{1/2}\cos(n!)}{n^2+2n}$

(c) $\dfrac{n^3}{3^n}$

(d) $e^{i\sqrt{n}}$

(e) $\dfrac{2^{n!}}{n!}$

(f) $\dfrac{n!}{2^{2^n}}$

Atenção: $2^{2^n} \neq 4^n$.

Q4 A função $\text{arctg}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a inversa da função $\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$ restrita ao intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, isto é,

$$\text{arctg}\,(\text{tg}\, x) = x \quad , \quad \forall x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

(a) Mostre que $\dfrac{d}{dx} \text{arctg}\, x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Sugestão: Você pode usar o teorema de cálculo que diz que se f é diferenciável e $f(y) = x$, então $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(y)}$.

Use também $\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$.

(b) Use (a) e a série geométrica $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ para encontrar uma série de potências que representa $\text{arctg}\, x$. Encontre o raio de convergência da série. Justifique tudinho que você faz.

Entre outras coisas, justifique por que a série converge, mas também por que converge para arctg x.