MAP 2210 - Álgebra Linear e Aplicações

Propriedades de Transformações/ matrizes hermitianas,
Transformações/ matrizes simétricas, etc

CUIDADO: Não revisada!

PARTE I - Algumas definições e proposições vistas em sala

Observação 1 Dicionário: *auto-adjunta = hermitiana.*

Definição 1 Matriz hermitiana (ou auto-adjunta) e matriz simétrica

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C})$ *[resp.* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$*].*

Dizemos que A *é hermitiana ou auto-adjunta [resp. simétrica] se* $\overline{A}^t = A$ *[resp.* $A^t = A$*].*

Proposição 1

(a) $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$ *é simétrica se e só se* $\langle\, Au \mid v \,\rangle = \langle\, u \mid Av \,\rangle, \forall u, v \in \mathbf{R}^n$.

(b) $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C})$ *é hermitiana se e só se* $\langle\, Au \mid v \,\rangle = \langle\, u \mid Av \,\rangle, \forall u, v \in \mathbf{C^n}$.

Prova: Feita em sala.

Observação 2 O resultado do exercício acima motiva a definição abaixo.

Definição 2 Transformação hermetiana e transformação simétrica

Seja $T : \mathbf{C^n} \to \mathbf{C^n}$ *linear [resp.* $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *linear].*

Dizemos que T *é hermitiana [resp. simétrica] se* $\langle\, T(u) \mid v \,\rangle = \langle\, u \mid T(v) \,\rangle, \forall u, v \in \mathbf{C^n}$ *[resp.* $\forall u, v \in \mathbf{R}^n$*].*

Proposição 2 *Seja* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C})$.

(a) *Se* A *for hermitiana então todas as raízes do polinômio característico de* A *são reais, ou seja, todos os autovalores de* A *são reais.*

(b) *Se* A *for real simétrica então todas as raízes do polinômio característico de* A *são reais, e portanto, são autovalores de* A.

Prova: Feita em sala.

Proposição 3 *Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C})$ hermitiana [resp. $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$ simétrica] e sejam $u, v \in \mathbf{C^n}$ [resp. $u, v \in \mathbf{R}^n$] autovetores de A associados a autovalores distintos. Então u e v são ortogonais.*

Prova: Feita em sala.

Definição 3 Matriz unitária e matriz ortogonal

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C})$ [resp. $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$].

Dizemos que A é unitária [resp. ortogonal] se as colunas de A formam uma base ortonormal de $\mathbf{C^n}$ [resp. de $\mathbf{R}^n$], isto é, se $\overline{A}^t A = I$ [resp. $A^t A = I$].

Definição 4 Matriz/Transformação de Householder

Dados $u, v \in \mathbf{R}^n$ tais que $\|u\| = \|v\| \neq 0$, a Transformação de Householder que leva u em v é a transformação linear cuja matriz na base canônica é

$$P = I - ww^t, \text{ onde } w = \frac{v-u}{\|v-u\|}.$$

Uma tal matriz P é chamada Matriz de Householder.

Proposição 4 *Se P é uma Matriz de Housholder como acima então:*

(i) $Pu = v$.

(ii) P é uma matriz simétrica

(ii) P é ortogonal.

Prova: Feita em sala.

PARTE II - Exercícios

Exercício 1 Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C^n})$ e $T : \mathbf{C^n} \to \mathbf{C^n}$ linear. Suponha que A é a matriz de T na base canônica.

Mostre que T é hermitiana se e só se A é hermitiana.

Exercício 2 Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R}^n)$ e $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ linear. Suponha que A é a matriz de T na base canônica.

Mostre que T é simétrica se e só se A é simétrica.

Definição 5 Matriz anti-hermitiana e matriz antissimétrica]

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C})$ *[resp.* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$*].*

Dizemos que A *é anti-hermitiana [resp. antissimétrica] se* $\overline{A}^t = A$ *[resp.* $A^t = A$*.*

Exercício 3 Mostre que

(a) $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$ é antissimétrica se e só se $\langle\, Au \mid v \,\rangle = -\langle\, u \mid Av \,\rangle, \forall u, v \in \mathbf{R}^n$.

(b) $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C})$ é anti-hermitiana se e só se $\langle\, Au \mid v \,\rangle = -\langle\, u \mid Av \,\rangle, \forall u, v \in \mathbf{C^n}$.

Observação 3 O resultado do exercício acima motiva a definição abaixo.

Definição 6 Transformação anti-hermetiana e transformação antissimétrica

Seja $T : \mathbf{C^n} \to \mathbf{C^n}$ *linear [resp.* $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *linear].*

Dizemos que T *é anti-hermitiana [resp. antissimétrica] se*

$\langle\, T(u) \mid v \,\rangle = -\langle\, u \mid T(v) \,\rangle, \forall u, v \in \mathbf{C^n}$ *[resp.* $\forall u, v \in \mathbf{R}^n$*].*

Exercício 4 Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C^n})$ e $T : \mathbf{C^n} \to \mathbf{C^n}$ linear. Suponha que A é a matriz de T na base canônica.

Mostre que T é anti-hermitiana se e só se A é anti-hermitiana.

Exercício 5 Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R}^n)$ e $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ linear. Suponha que A é a matriz de T na base canônica.

Mostre que T é antissimétrica se e só se A é antissimétrica.

Proposição 5 Seja $T : \mathbf{C^n} \to \mathbf{C^n}$ linear [resp. $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ linear].

Então existe uma e uma só transformação linear $T^* : \mathbf{C^n} \to \mathbf{C^n}$ [resp. $T^* : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$] satisfazendo

$\langle\, Tu \mid v \,\rangle = \langle\, u \mid T^*v \,\rangle, \forall u, v \in \mathbf{C^n}$ [resp. $\forall u, v \in \mathbf{R}^n$].

Exercício 6 Prove a proposição anterior.

Definição 7 Adjunta de uma transformação linear

A única T^* *mencionada na definição anterior é chamada adjunta da transformação* T*.*

Exercício 7 Mostre que

(a) $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ linear é simétrica [resp. antissimétrica] se e só se $T^* = T$ [resp. $T^* = -T$].

(b) $T : \mathbf{C^n} \to \mathbf{C^n}$ linear é hermitiana [resp. anti-hermitiana] se e só se $T^* = T$ [resp. $T^* = -T$].

Definição 8 Matriz normal

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C})$ [resp. $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$].

Dizemos que A é normal se ela comuta com sua transposta conjugada [resp. sua transposta], isto é, se $\overline{A}^t A = A\overline{A}^t$ [resp. $A^t A = AA^t$].

Exercício 8 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C})$ [resp. $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$].

Mostre que A é normal se e só se $\langle\, Au \mid Av \,\rangle = \langle\, \overline{A}^t u \mid \overline{A}^t v \,\rangle, \forall u, v \in \mathbf{C^n}$ [resp. $\forall u, v \in \mathbf{R}^n$].

Definição 9 Transformação linear normal

Seja $T : \mathbf{C^n} \to \mathbf{C^n}$ linear [resp. $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ linear].

Dizemos que T é normal se T comuta com T^*, isso é, $T \circ T^* = T^* \circ T$.

Exercício 9 Seja $T : \mathbf{C^n} \to \mathbf{C^n}$ linear [resp. $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ linear].

Mostre que T é normal se e só se $\langle\, T(u) \mid T(v) \,\rangle = \langle\, T^*(u) \mid T^*(v) \,\rangle, \forall u, v \in \mathbf{C^n}$ [resp. $\forall u, v \in \mathbf{R}^n$].

Exercício 10 Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C})$ [resp. $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R}^n)$] e $T : \mathbf{C^n} \to \mathbf{C^n}$ linear [resp. $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ linear]. Suponha que A é a matriz de T na base canônica.

Mostre que T é normal se e só se A é normal.

Exercício 11 Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C})$ [resp. $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R}^n)$] e $T : \mathbf{C^n} \to \mathbf{C^n}$ linear [resp. $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ linear]. Suponha que A é a matriz de T na base canônica.

Mostre que T é unitária [resp. ortogonal] se e só se A é unitária [resp. ortogonal].

Exercício 12 Mostre que:

(a) Produto de matrizes unitárias [resp. ortogonais] é unitária [resp. ortogonal].

(b) Composta de transformações unitárias [resp. ortogonais] de $\mathbf{C^n}$ em $\mathbf{C^n}$ [resp. de $\mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}^n$] é unitária [resp. ortogonal].

Exercício 13 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$ simétricas.

(a) Mostre que se A e B comutam, então AB é simétrica.

(d) Vale resultado análogo para matrizes complexas hermitianas?

(c) Dê exemplo em que AB não é simétrica, apesar de A e B o serem.

Exercício 14 Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C})$ hermitiana e $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C})$.

(a) Mostre que se Q é unitária então $B = Q^{-1}AQ$ é hermitiana.

(b) Dê exemplo em que $B = Q^{-1}AQ$ não é hermitiana apesar de A o ser.

Exercício 15 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C})$.

(a) Mostre que se A for anti-hermitiana então os autovalores de A são imaginários puros.

(b) Mostre que se A for real antissimétrica então o único escalar real que pode ser autovalor de A é o zero.

Exercício 16 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C})$ anti-hermitiana e sejam $u, v \in \mathbf{C^n}$ autovetores de A associados a autovalores distintos. Mostre que u e v são ortogonais.

Exercício 17 (a) Mostre que produto de matrizes ortogonais [resp. unitárias] é matriz ortogonal [resp. unitária].

(b) Mostre que matriz ortogonal [resp. unitária] leva base conjunto ortogonal de $\mathbf{R}^n$ [resp. de $\mathbf{C^n}$] em conjunto ortogonal.

Exercício 18 Ache a matriz de Householder que leva $u = (1, 2, 3, 4)$ em $v = (5, 0, 4, 1)$, depois de verificar que $\|u\| = \|v\| \neq 0$.

Exercício 19 Use matrizes de Householder para fazer a decomposição QR da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercício 20 Use o Método dos Mínimos Quadrados para aproximar a função tabelada abaixo um polinômio de grau ≤ 2. Resolva o sistema normal envolvido

(a) Pelo Método de Eliminação de Gauss (ou por decomposição LU)

(b) Usando decomposição QR e Matrizes de Householder.

t	-2	-1	0	1	2	3
f(t)	1	3	4	4	2	0

Exercício 21 Use o Método dos Mínimos Quadrados para aproximar a função tabelada abaixo uma função da forma $g(t) = a_0g_0(t) + a_1g_1(t) + a_2g_2(t) = a_0 + a_12^t + a_22^{-t}$.

t	-2	-1	0	1	2	3
f(t)	1	3	4	4	2	0

Exercício 22 Seja $V = C_0^\infty([0,\pi])$ o espaço vetorial das funções de $[0,\pi]$ em $\mathbf{R}$ de classe C^∞ cuja primeira derivada se anula em 0 e em π.

Em V considere o produto interno

$$\langle\ h \mid k\ \rangle = \int_0^\pi h(x)k(x)dx.$$

Considere o operador linear $T : V \to V$ definido por $T[g] = g'' - g$

(a) T é simétrico?

(b) Determine os autovalores de T e os correspondentes autovetores.

Dado: A solução geral de $y'' = \sigma y$ é

$$y(x) = \begin{cases} a + bx, & \text{se } \sigma = 0, \\ ae^{\sqrt{\sigma}x} + be^{-\sqrt{\sigma}x}, & \text{se } \sigma > 0, \\ a\cos(\sqrt{-\sigma}x) + b\sin(\sqrt{-\sigma}x), & \text{se } \sigma < 0, \end{cases}$$

onde a e b são constantes arbitrárias.

Exercício 23 Seja $V = \mathcal{P}(\mathbf{R})$ o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais.

Em V considere o produto interno definido por

$$\langle\ p \mid q\ \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Seja $\phi(x) = x^2$.

Considere o operador linear $T : V \to V$ definido por $T[p] = p\phi$.

Note que para $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, resulta que $T[p]$ é o polinômio dado por $T[p](x) = p(x)\phi(x) = a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + \cdots + a_nx^{n+2}$.

Mostre que T é simétrico.