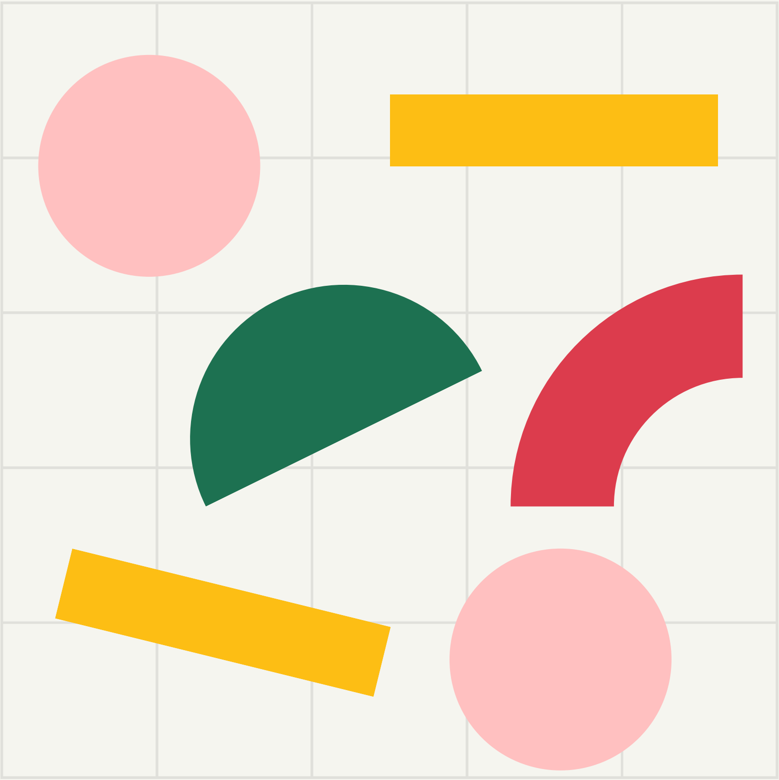
Congruências e Isometrias

Gabriela Mello Lyra
Gustavo Petim Silva
Isabela Santesso Carpena
Ivan K. Lima
Samuel M. Bustamante G.

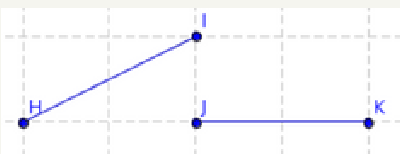
O que você pensa quando falamos de CONGRUÊNCIA?

Congruência

- Um conceito geométrico.
- Figuras congruentes são aquelas que possuem lados e ângulos correspondentes com medidas iguais.
- Não é possível afirmar que duas figuras congruentes são iguais. A igualdade entre elas é apenas entre as medidas de seus lados e de seus ângulos.

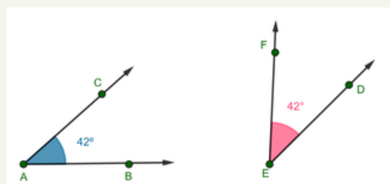


Congruência...



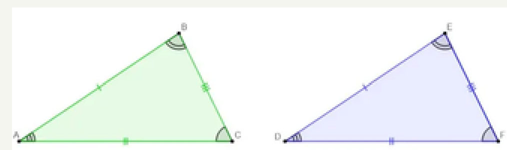
de Segmentos de retas

Dois segmentos de retas são congruentes quando possuem o mesmo comprimento



de Ângulos

Dois ângulos são congruentes quando possuem a mesma medida



de Triângulos

Dois triângulos são congruentes se seus lados e ângulos correspondentes forem congruentes

$$a \equiv b \bmod m \iff m \mid b - a$$

Modular

Mesma classe de equivalência.
A≡B (mod C)

A é congruente com B módulo C.

Congruência na BNCC

Citada no 3° ano, 4° ano, 5° ano, 8° e no Ensino Médio

No Ensino Fundamental – Anos Finais, o ensino de Geometria precisa ser visto como consolidação e ampliação das aprendizagens realizadas. Nessa etapa, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. Esses conceitos devem ter destaque nessa fase do Ensino Fundamental, de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio

MATEMÁTICA – 3º ANO (Continuação)

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	
Geometria	Figuras geométricas planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo): reconhecimento e análise de características	
	Congruência de figuras geométricas planas	

(EF03MA16) Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais.

MATEMÁTICA – 5º ANO (Continuação)

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO
Geometria	Ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas: reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes

(EF05MA18) Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais.

MATEMÁTICA – 8º ANO (Continuação)

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO
Geometria	Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros

(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.

MATEMÁTICA – 4º ANO

(EF04MA19) Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de *softwares* de geometria.

5.2. A ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança.

5.2.1. MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS NO ENSINO MÉDIO: COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS E HABILIDADES

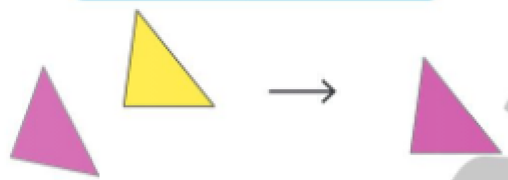
(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Livros Didáticos

FIQUE LIGADO!

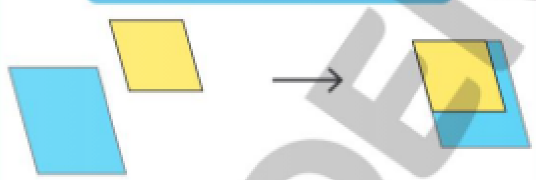
Dizemos que duas figuras são **congruentes** se, quando sobrepostas, elas coincidem. Observe.

Figuras congruentes



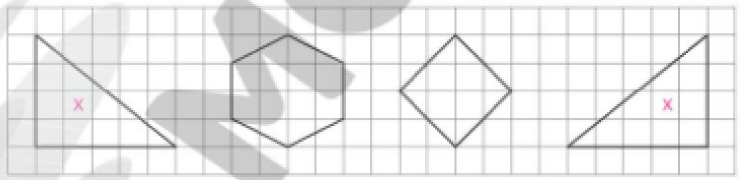
Ao sobrepô-las, as figuras coincidem.

Figuras não congruentes

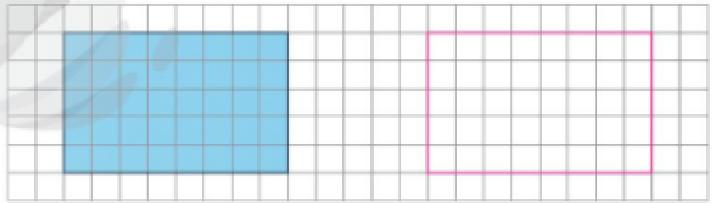


Ao sobrepô-las, as figuras não coincidem.

5. Pinte o par de figuras geométricas planas congruentes entre as representadas na malha quadriculada a seguir.

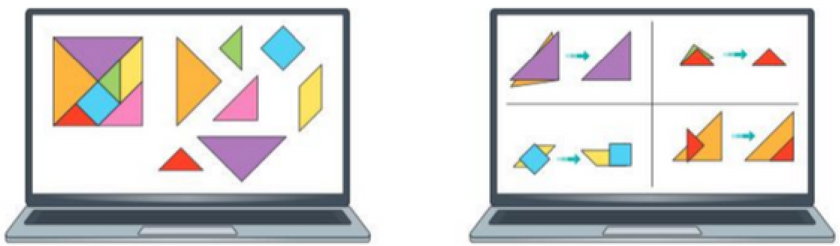


6. Na malha quadriculada a seguir, desenhe um retângulo congruente ao apresentado. Resposta na imagem.



Congruência de figuras

Certo programa de computador permite mover e fazer rotações das peças do tangram, cujo formato lembra polígonos. Utilizando esse programa, Heitor organizou esses polígonos e, ao sobrepor alguns deles, percebeu que há polígonos que coincidiram. Analise algumas sobreposições que ele fez.



ILUSTRAÇÕES: SERGIO LIMA/ARQUIVO DA EDITORA

Os polígonos que coincidiram são chamados **congruentes** e, nesse caso, dizemos que os triângulos verde e vermelho, por exemplo, são congruentes.

Também podemos estabelecer outras congruências: dois segmentos de reta são congruentes quando têm a mesma medida de comprimento; dois ângulos são congruentes quando têm a mesma medida.

> Dois ou mais polígonos são congruentes quando seus respectivos lados são congruentes e quando seus respectivos ângulos internos também são congruentes.

Por exemplo, os polígonos *ABCD* e *EFGH* a seguir são congruentes.

- Congruência dos lados: $\overline{AB} \cong \overline{EF}$; $\overline{BC} \cong \overline{FG}$; $\overline{CD} \cong \overline{GH}$; $\overline{AD} \cong \overline{EH}$.
- Congruência dos ângulos internos: $\hat{A} \cong \hat{E}$; $\hat{B} \cong \hat{F}$; $\hat{C} \cong \hat{G}$; $\hat{D} \cong \hat{H}$.

Atenção!

Utilizamos o símbolo $\cong$ para indicar congruência.

Triângulos congruentes

Para determinar se dois triângulos são congruentes, não é necessário medir o comprimento de todos os lados e todos os ângulos internos deles. Medindo o comprimento de lados e ângulos internos específicos, podemos garantir a congruência dos triângulos.

Atenção!

Os lados e os ângulos dos triângulos indicados com a mesma quantidade de "tracinhos" são congruentes.

Congruência de triângulos

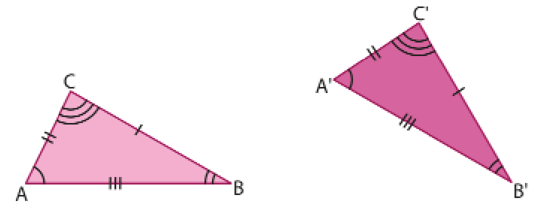
Intuitivamente, dois triângulos são congruentes se têm a mesma forma e o mesmo tamanho, isto é, a menos da posição no plano, são “iguais”. Vamos formalizar o conceito de congruência a partir da noção de correspondência biunívoca (ou aplicação bijetora, ou bijeção) entre os vértices de dois triângulos. Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, chamamos correspondência biunívoca entre os vértices desses dois triângulos a qualquer aplicação bijetora do conjunto $\{A, B, C\}$ no conjunto $\{A', B', C'\}$.

Definição

Dois triângulos são congruentes se, e somente se, existir uma correspondência biunívoca entre seus vértices de forma que os ângulos correspondentes sejam congruentes e os lados correspondentes sejam congruentes.

Sejam ΔABC e $\Delta A'B'C'$ tais que:

$$\left|\begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \end{array}\right. \text{ e } \left|\begin{array}{l} \hat{A} \cong \hat{A'} \\ \hat{B} \cong \hat{B'} \\ \hat{C} \cong \hat{C'} \end{array}\right.$$



Nesse caso, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes:

$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

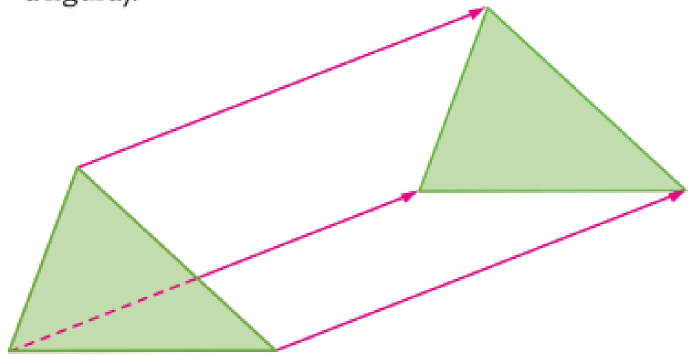
Observe que dois triângulos ABC e DEF são congruentes se, e somente se, são semelhantes de razão de semelhança $k = 1$.

Transformações geométricas e congruência de triângulos

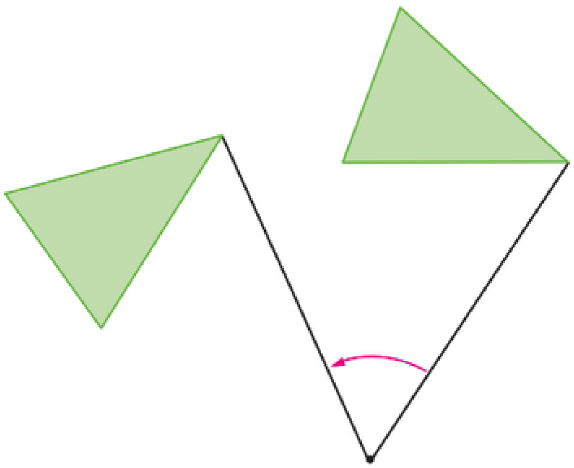
Uma maneira de observar congruências de triângulos é em termos de **transformações geométricas**, que são funções do plano no plano. Algumas das transformações são as chamadas **isometrias**, que mantêm o formato e o tamanho das formas.

Três dessas isometrias são importantes:

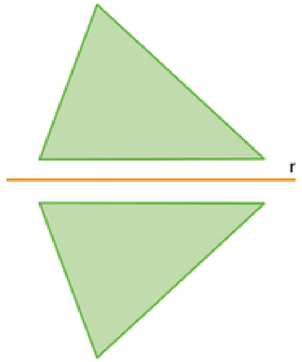
- **Translação** – Cada ponto é deslocado na mesma direção e sentido (o que equivaleria a "clicar e arrastar" a figura):



- **Rotação** – Rodamos cada ponto por um ângulo θ em torno de um ponto O, denominado **centro de rotação**:



- **Reflexão** – Refletimos a figura através de uma reta r:



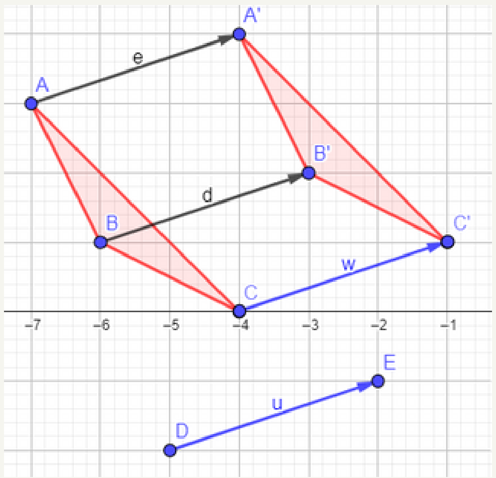
Figuras obtidas através de outras por isometrias são congruentes.

Uma ferramenta para o professor e o aluno

- Olhar crítico
- Propor constatações visuais
- Construir conceitos
- Otimizar o tempo de aula
- Ferramentas Digitais

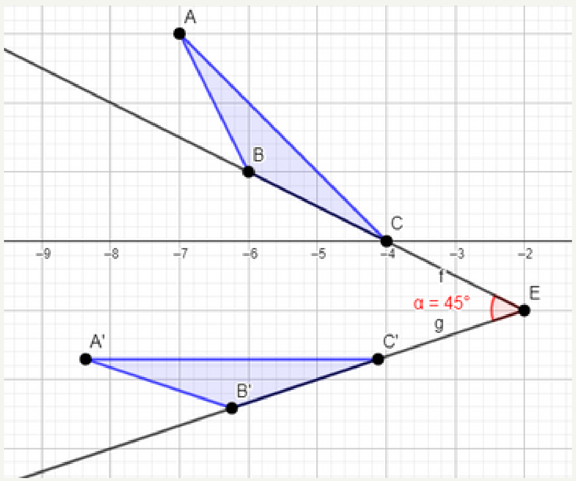
"...em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais" (BNCC, 2018)

Comandos de Transformação



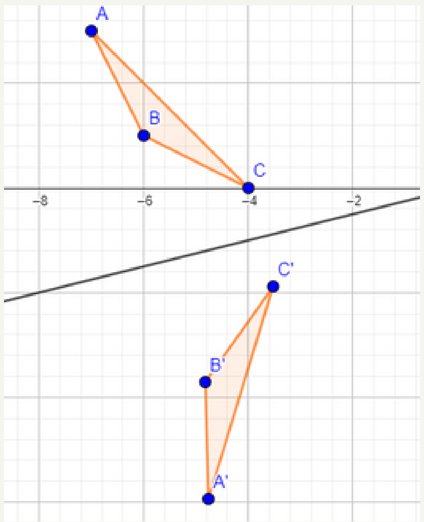
Translação

Selecionar um objeto e, em seguida, o vetor (feito previamente ou inserindo suas coordenadas)



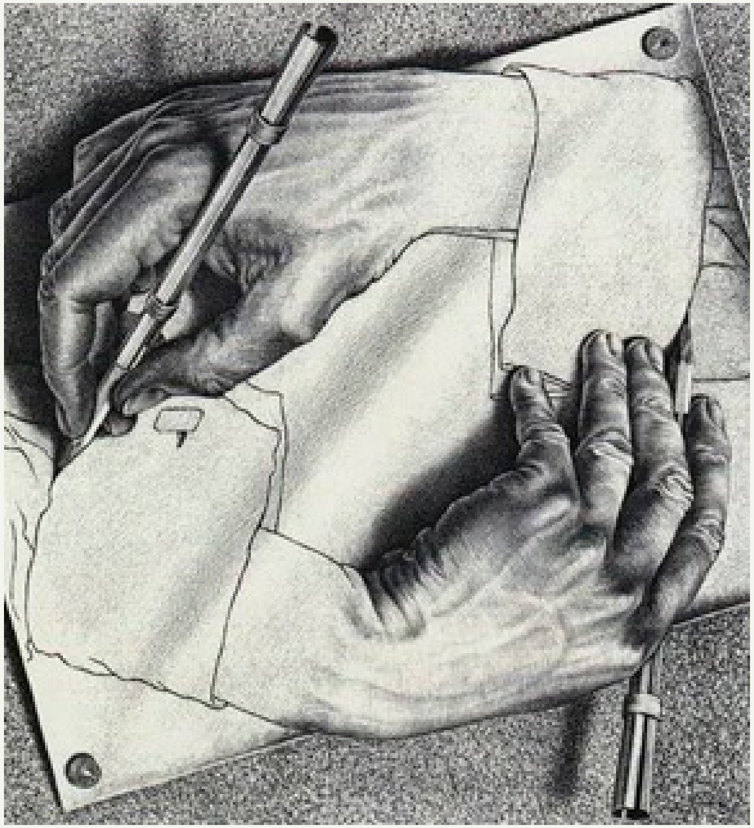
Rotação

Selecionar um objeto, em seguida, o ponto (centro de rotação) e, por fim, o ângulo de rotação (que pode ser um controle deslizante)



Reflexão

Selecionar um objeto e, em seguida, o ponto (reflexão em relação a um ponto) ou a reta (reflexão em relação a uma reta).

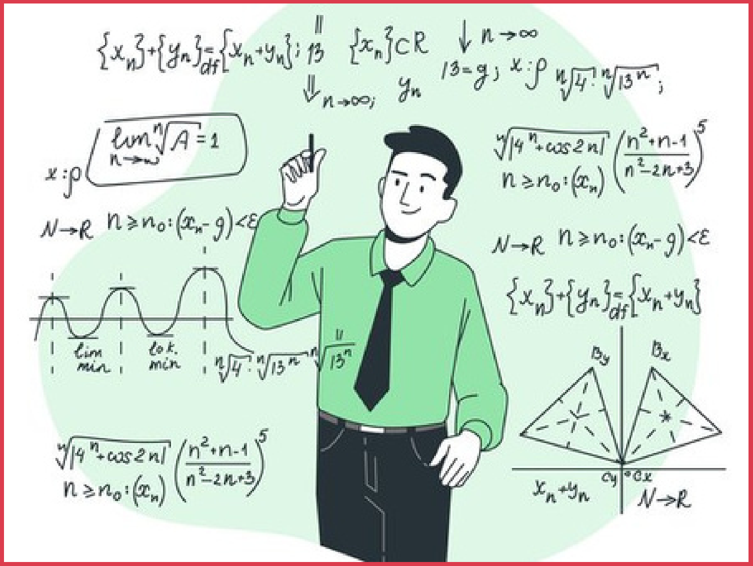


Qual transformação foi feita?

Interdisciplinaridade entre matemática e outras disciplinas

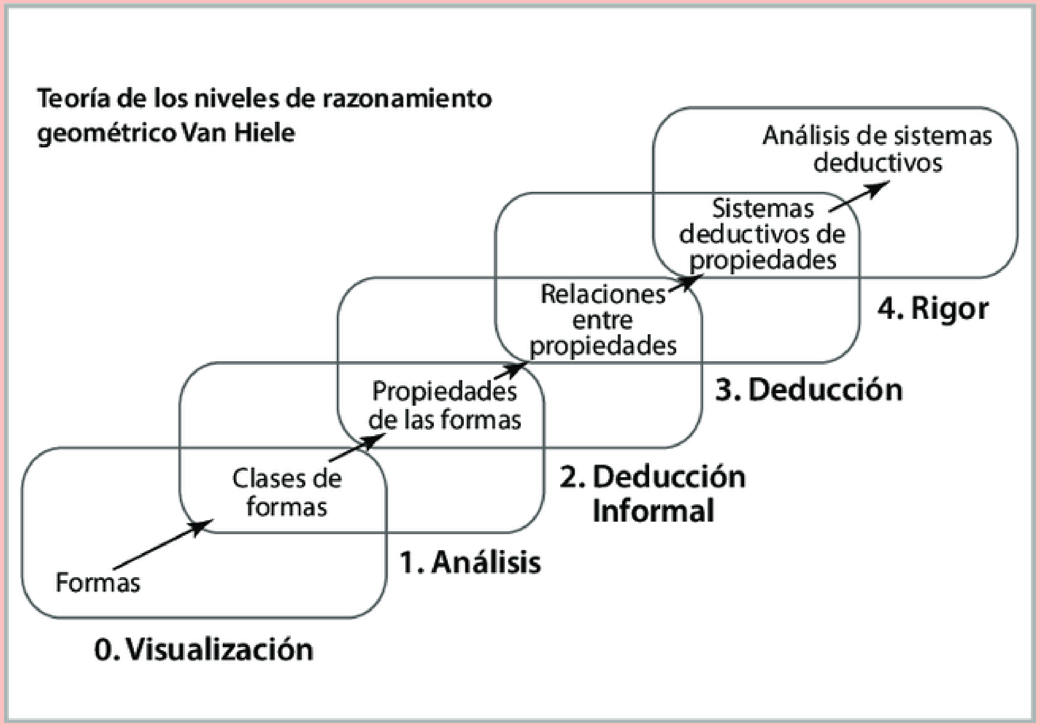
Isometrias e Congruências no Ensino Superior

Definições, proposições e teoremas.



Modelo de Van Hiele

No ensino superior: Dedução formal e Rigor



Capítulo VII
Isometrias e congruências: Classificação das isometrias

Isometrias do plano

Até aqui, são as seguintes **transformações** do plano: **Translação**, **Rotação**, **Reflexão em relação a uma reta** e **Reflexão transladada.**

Congruências

Até aqui, **só definimos congruencia de triangulos**. Dois triângulos são congruentes se os lados e ângulos correspondentes o forem. Além disso, já tínhamos os critérios de congruências de triângulos: LLL, LAL e ALA.

Proposição 7.1: Dois triângulos **$\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes** se, e só se, **existe uma única isometria F** tal que $F(A)=A'$, $F(B)=B'$ e $F(C)=C'$.
A isometria F é uma translação, uma rotação, uma reflexão em relação a uma reta ou uma reflexão transladada.

Ideia de demonstração

Lembrete! Teorema 2.6: Se F e G são isometrias tais que F(A)=G(A), F(B)=G(B), F(C)=G(C) para três pontos não colineares A, B, C do plano, então F=G.

- Todo triângulo tem três pontos não colineares, daí o **teorema 2.6 confirma que se existe uma isometria que leve o triângulo ABC ao A´B´C´, ela é única.**

Ideia de demonstração

Construções: Sabemos que os triângulos ABC e A´B´C´são congruentes, ou seja, temos os correspondentes segmentos orientados congruentes AB e A´B´.

- Caso 1.1: os **segmentos AB e A´B´ são paralelos e de mesmo sentido**. Daí, **F=Tv** (translação com v=AA´=BB´). Seja C1=Tv(C)

- Caso 2.1: o **ângulo orientado do segmento AB para o segmento A´B´ tem medida *a***, no intervalo]-π,π]. Daí, **F=Ro,*a*** (rotação centrada em um ponto O).
Seja C2=Ro,***a***(C)

Vamos fixar o segmento A´B´. Daí temos A´B´C´ e A´B´C´´ dois triângulos congruentes com o ABC. Os vértices C´e C´´ estão em semi-planos opostos com origem na reta A´B´= m.
Se C1=C´, então F=Tv (caso1.1)
Se C2=C´, então F=Ro,***a*** (caso 2.1)

- Caso 1.2: **Se C1=C´´**, temos **F=Rm o Tv**
*__se v=0__, então **F=Rm**
*__se v≠0 e v é perpendicular a m__, então **F=Rm o Tv=Rn**
*__se v≠0 e v não é perpendicular a m__, então, pelo teo. 6.13, **F=Rm o Tv é Reflexão transladada**

- Caso 2.2: Se C2=C´´, temos F=Rm o Ro,***a***
*__se O ∈ m__, então, pelo teo. 6.9, **F=Rm o Ro,*a*= Rw** (w reta)
*__se O ∉ m__, então, pelo teo. 6.13, **F=Rm o Ro,*a* é Reflexão transladada**

Figuras geométricas do plano:

Definição: Duas figuras geométricas A e A´do plano são congruentes se existe uma isometria F do plano tal que F(A´)=A

Teorema 7.2: **Duas figuras geométricas** do plano **são congruentes se, e só se**, estão relacionadas por uma translação, uma rotação, uma reflexão em relação a uma reta ou uma reflexão transladada.

Ideia de demonstração

A **demonstração é análoga à da proposição 7.1.** As relações são feitas com três pontos não colineares da figura geométrica, esses **três pontos são um subconjunto da figura**.

Atividade (2 ou 3 pessoas):

Sobreponha os triângulos A e B, que são congruentes, dobrando no máximo três vezes o papel manteiga, ou seja, realizando três reflexões em relação a retas. Marque os triângulos resultantes de cada reflexão.

Teorema 7.4: **Toda isometria** do plano é **composta** de, **no maximo**, **três reflexões em relação a retas**.

Isometrias próprias e impróprias

Definição: Uma isometria do plano é dita própria se é composta por um número par de reflexões a retas e imprópria caso seja composta por um número ímpar.

Teorema 7.5: Uma isometria do plano é **própria se**, e somente se, é uma translação ou uma rotação.

Uma isometria do plano é **imprópria** se, e somente se, é uma reflexão em relação a uma reta ou uma reflexão transladada.

Nenhuma isometria do plano é, simultaneamente, própria e imprópria.

Proposição 7.7: Uma **isometria** do plano, distinta da transformação identidade, **que fixa dois pontos distintos**, é a reflexão em relação à reta que passa por esses pontos.

Proposição 7.8: Uma **isometria** que fixa um ponto O é uma rotação de centro O ou uma reflexão em relação a uma reta que passa por O.

Corolário 7.9: : Uma **isometria** do plano que fixa um único ponto O é uma rotação de centro O, distinta da transformação identidade.

Teorema de classificação das isometrias do plano

Teorema 7.3: **Toda isometria** do plano, distinta da transformação identidade, **é uma, e apenas** uma das seguintes transformações: translação, rotação, reflexão em relação a uma reta, reflexão transladada.

Ideia de demonstração

Construções: Seja F uma isometria do plano, distinta da identidade, e O um ponto do plano tal que $O \neq O' = F(O)$.
Seja m a mediatriz do segmento OO'.
Temos O ponto fixo de Rm o F
Proposição 7.8: Uma isometria do plano fixa um ponto O é uma rotação de centro O ou uma reflexão em relação a uma reta que passa por O.

Pelo proposição 7.8:

- **Rm o F é rotação Ro,*a***, daí, F= Rm o Ro,***a***:

*__Se Ro,*a*= Id__, então, **F é reflexão em relação a reta.**
*__Se Ro,*a*≠Id__, então, **F é reflexão transladada.**

- **Rm o F é reflexão em relação a reta**, daí, F= Rm o Rn, com $O \in n$:

*__Se n//m__, então, **F é translação.**
*__Se n e m__ são concorrentes, então, **F é rotação.**

Obrigada!

Referências

ALVES, SÉRGIO; GALVÃO, MARIA ELISA. UM ESTUDO GEOMÉTRICO DAS TRANSFORMAÇÕES ELEMENTARES. SÃO PAULO, 1996.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR. BRASÍLIA: MEC, 2018.

DÉBORA COSTA CONA. ENSINO DE ISOMETRIAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA APLICAÇÃO DIDÁTICA EM SALA DE AULA. SÃO PAULO, 2017

SÉRGIO CARRAZEDO DANTAS; GUILHERME FRANCISCO FERREIR; MAURÍCIO BARBOSA DA SILVA; SIRLEI LOPES DA SILVA. MOSAICOS, FAIXAS, ROSETAS E FRACTAIS COM O GEOGEBRA. CURITIBA, 2013.