Aula 28: Compactificação de Stone-Čech, Paracompacidade, Partição da Unidade

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1^o **Semestre de 2023 - Curso de Topologia**

Definição 1

Dado X um espaço de Hausdorff, dizemos que K é uma compactificação de X se K é compacto, de Hausdorff e $\bar{X} = K$.

Note que, assim, para que um espaço admita alguma compactificação, ele precisa ser, no mínimo, completamente regular já que todo compacto de Hausdorff é completamente regular e tal propriedade é hereditária para subespaços.

Já vimos na Aula 15, exercício 17, como obter uma compactificação para espaços de Hausdorff localmente compactos — Compactificação de Alexandroff.

Nesta seção, vamos mostrar que, na verdade, todo espaço completamente regular admite uma compactificação natural e que tal compactificação tem propriedades bastante interessantes.

Definição 2

Seja (X, τ) *completamente regular. Chamamos de* $\beta X = \overline{\{(f(x))_{f \in \mathcal{F}} : x \in X\}} \subset [0,1]^{\mathcal{F}}$, *onde* $\mathcal{F}$ *é o conjunto de todas as funções contínuas* $f : X \to [0,1]$. βX *é a compactificação de Stone-Čech.*

A menos de homeomorfismos, podemos considerar $X \subset \beta X$ (pelo Teorema da Imersão). Desta forma, usaremos tal identificação ao longo desta seção.

A seguir, vamos mostrar que βX de fato é uma compactificação e também exibir uma propriedade importante de tal compactificação.

Lembrar: Dizemos que (X, τ) é $T_{3\frac{1}{2}}$ se, para todo $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tal que $x \notin F$ existir $f : X \to [0,1]$ contínua, tal que $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$, para todo $y \in F$. No caso que (X, τ) também é T_1, dizemos que (X, τ) é um espaço completamente regular.

Teorema 3

Seja (X, τ) completamente regular. Então:

(a) *βX é um compacto de Hausdorff tal que $\bar{X} = \beta X$.*

(b) *Para toda $f : X \to [0,1]$ contínua, existe $\tilde{f} : \beta X \to [0,1]$ extensão contínua de f.*

Demonstração. (a) Claramente βX é compacto Hausdorff, por ser definido como um subconjunto fechado de $[0,1]^{\mathcal{F}}$, que é um compacto de Hausdorff. Do Teorema da Imersão, temos que X é homeomorfo a $\{(f(x))_{f \in \mathcal{F}} : x \in X\}$. Assim, a igualdade $\beta X = \bar{X}$ segue diretamente pela definição.

Provemos (b). Sejam $g : X \to [0,1]$ contínua e $a \in \beta X$. Note que $a = (a_f)_{f \in \mathcal{F}}$, com cada $a_f \in [0,1]$ (lembre-se que $[0,1]^{\mathcal{F}} = \prod_{f \in \mathcal{F}}[0,1]$).

Defina $\tilde{g}(a) = a_g$. Vamos provar que, de fato, $\tilde{g}$ estende g.

Seja $x \in X$. Na imersão, identificamos $x = ((f(x))_{f \in \mathcal{F}}$. Desta forma, $\tilde{g}(x) = g(x)$ como queríamos. A continuidade segue do fato de que $\tilde{g} : \beta X \to [0,1]$ simplesmente é a função π_g (projeção na g-ésima coordenada).

Aqui vale fazer um comentário sobre a Compactificação de Stone-Čech para $\mathbb{N}$.

Podemos mostrar facilmente que esta compactificação não acrescenta apenas um ponto: veja a lista de Exercícios. Ou seja, a "Compactificação de Alexandroff para $\mathbb{N}$" não é a "Compactificação de Stone-Čech para $\mathbb{N}$".

A seguir vamos provar que as propriedades descritas no teorema acima na verdade caracterizam a compactificação de Stone-Čech.

Começamos mostrando que o intervalos $[0, 1]$ não apresenta um papel tão essencial na definição e que pode ser substituído por outro compacto de Hausdorff.

Proposição 4

Seja (X, τ) espaço completamente regular e Y um compacto de Hausdorff tal que $\bar{X} = Y$ e, para qualquer função $f : X \to [0,1]$ contínua, exista $\tilde{f} : Y \to [0,1]$ extensão contínua de f. Então, dada $f : X \to K$ contínua, onde K é compacto Hausdorff, existe $\tilde{f} : Y \to K$ extensão contínua de f.

Demonstração. Podemos supor $K \subset [0,1]^I$, pelo Teorema da Imersão, para algum conjunto I.

Seja $f : X \to K$ contínua. Considere, para cada $i \in I$, $f_i : X \to [0,1]$ dada por $f_i = \pi_i \circ f$. Por hipótese, existe $\tilde{f}_i : Y \to [0,1]$ extensão contínua de f_i.

Defina $\tilde{f} : Y \to [0,1]^I$ como $\tilde{f}(y) = \left(\tilde{f}_i(y)\right)_{i \in I}$. Note que $\tilde{f}$ é uma extensão contínua de f (abertos básicos da topologia produto e continuidade das $\tilde{f}_i$).

Só resta mostrar que $\tilde{f}(Y) \subset K$. Pelo, primeiro exercício da lista a seguir, temos

$$\tilde{f}(Y) = \tilde{f}(\bar{X}) \subset \overline{\tilde{f}(X)} \subset \bar{K} = K$$

Proposição 5

βX é o único espaço que satisfaz as condições (a) e (b) do Teorema 3 (a menos de homeomorfismo).

Demonstração. Seja Y satisfazendo (a) e (b).

Considere $i_1 : X \to Y$ a função inclusão. Pela proposição anterior, existe $f : \beta X \to Y$ extensão contínua de i_1. Considere $i_2 : X \to \beta X$ também a função inclusão.

Então existe $g : Y \to \beta X$ extensão contínua de i_2.

Note que $f \circ g : Y \to Y$ e $g \circ f : \beta X \to \beta X$ são contínuas e $f \circ g \mid_X = g \circ f \mid_X = id_X$. Logo, f e g são bijeções contínuas, uma a inversa da outra (pois X é denso e Y e βX são Hausdorff).

Para o último argumento acima lembrar: "Considere $F, G : W \to Z$, onde Z é Hausdorff e $D \subset W$ é denso. Se $F \mid_D = G \mid_D$, então $F = G$".

Vamos encerrar essa seção apresentando algumas propriedades de $\beta\mathbb{N}$.

Proposição 6

Seja $F \subset \beta\mathbb{N}$ fechado infinito. Então F contém um subespaço homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$.

Demonstração. Note que podemos construir famílias $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde, para todo $n \in \mathbb{N}$,

- $a_n \in V_n \cap F$
- V_n é aberto;
- $V_n \cap V_m = \emptyset$ se $n \neq m$.

Note que $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ é homeomorfo a $\mathbb{N}$ (já que é discreto).

Seja $g : A \to [0,1]$. Considere $G : \mathbb{N} \to [0,1]$ dada por

$$G(n) = \begin{cases} g(a_k) & \text{se } n \in V_k \cap \mathbb{N} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja $\tilde{G} : \beta\mathbb{N} \to [0,1]$ extensão contínua de G. Dado $a_k \in A$, temos:

$$
\begin{aligned}
\tilde{G}\left(a_k\right) &\in \tilde{G}\left(V_k\right) \\
&\subset \tilde{G}\left(\overline{V_k}\right) \\
&= \tilde{G}\left(\overline{V_k \cap \mathbb{N}}\right) \quad \text{(porque } \mathbb{N} \text{ é denso e } V_k \text{ é aberto)} \\
&\subset \overline{\tilde{G}\left(V_k \cap \mathbb{N}\right)} \quad \text{(exercício 1 a seguir)} \\
&= \{g\left(a_k\right)\} \quad (\tilde{G}\mid_{\mathbb{N}} = G \text{ e da def. de } G)
\end{aligned}
$$

Logo, $\tilde{G}$ é uma extensão contínua para g para $\beta\mathbb{N}$ todo e, em particular, para $\bar{A}$. Logo, como $\bar{A}$ é compacto de Hausdorff, temos que $\bar{A}$ é homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$ (pela Proposicao 5).

Como $\bar{A} \subset F$, temos o resultado.

Corolário 7

Seja $F \subset \beta\mathbb{N}$ fechado infinito. Então $|F| = |\beta\mathbb{N}|$.

O corolário acima nos dá facilmente a seguinte aplicação.

Corolário 8

$\beta\mathbb{N}$ é um compacto onde nenhuma sequência não trivial é convergente.

Demonstração. Uma sequência convergente não trivial, juntamente com o ponto limite, seria um subconjunto fechado, infinito e enumerável (veja o exercício, $\beta\mathbb{N}$ é não enumerável).

1. Sejam X e Y espaços topológicos $f : X \to Y$ contínua. Dado $A \subset X$, mostre que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.
2. Sejam X espaço topológico, $A \subset X$ aberto e $D \subset X$ denso. Mostre que $\bar{A} = \overline{A \cap D}$.
3. Mostre que $\beta\mathbb{N}$ é não enumerável.
4. Seja F compacto infinito e de Hausdorff.
   (a) Note que existe $x \in F$ ponto de acumulação de F.
   (b) Note que existe $y \in F$ distinto de x e existem A, B abertos disjuntos tais que $x \in A$ e $y \in B$.
   (c) Mostre que existem $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde cada $a_n \in V_n$ e $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são abertos dois a dois disjuntos.

5. Considere $X = \mathbb{N} \cup \{a\}$ é um compacto de Hausdorff tal que $\mathbb{N}$ tem a topologia usual (como subespaço) e $\overline{\mathbb{N}} = X$
   (a) Mostre que X é homeomorfo ao espaço da sequência convergente.
   (b) Mostre que $f : \mathbb{N} \to [0, 1]$ dada $f(n) = 0$ se n é par e $f(n) = 1$ se n é impar, não admite extensão contínua para X.
   (c) Conclua que X não é a compactificação de Stone-Čech de $\mathbb{N}$.
6. Mostre que se X é um compacto Hausdorff separável, então existe $f : \beta\mathbb{N} \to X$ contínua sobrejetora.
7. Considere $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \to [0, 1]\}$. Note que $|\mathcal{F}| = |\mathbb{R}|$. Assim, $\left|\prod_{f\in\mathcal{F}}[0, 1]\right| =| \wp(\mathbb{R}) |$. Com essas informações, mostre que $|\beta\mathbb{N}| = |\wp(\mathbb{R})|$.
8. Mostre que $\mathbb{R}$ admite uma compactificação K tal que $|K\backslash\mathbb{R}| = 1$
9. Mostre que $\mathbb{R}$ admite uma compactificação K tal que $|K\backslash\mathbb{R}| = 2$.
10. Mostre que as duas compactificações de $\mathbb{R}$ dos exercícios anteriores não são homeomorfas a $\beta\mathbb{R}$.

11. Este é um roteiro para mostrar que não existe uma compactificação K de $\mathbb{R}$ tal que $|K \backslash \mathbb{R}| = 3$.
    (a) Suponha que exista compactificação K para $\mathbb{R}$ tal que $K \backslash \mathbb{R} = \{a, b, c\}$ com a, b, c distintos. Mostre que existem A, B, C abertos disjuntos tais que $a \in A$, $b \in B$ e $c \in C$.
    (b) Mostre que $K \backslash (A \cup B \cup C)$ é um compacto contido em $\mathbb{R}$.
    (c) Mostre que existe um intervalo fechado $[\alpha, \beta]$ tal que $K \backslash (A \cup B \cup C) \subset [\alpha, \beta]$.
    (d) Mostre que pelo menos dois dos conjuntos A, B, C são ilimitados em $(\beta, +\infty)$ ou pelo menos dois deles são ilimitados em $(-\infty, \alpha)$.
    (e) Mostre que $(\beta, +\infty)$ ou $(-\infty, \alpha)$ podem ser escritos como união de dois abertos disjuntos.
    (f) Note que o último item é uma contradição.
12. Considere $K = \overline{\mathbb{Q}} \subset \beta\mathbb{R}$. Mostre que K é uma compactificação de $\mathbb{Q}$ mas que não é homeomorfa a $\beta\mathbb{Q}$.

Vamos apresentar aqui uma forma alternativa de se construir o espaço $\beta\mathbb{N}$. Considere em todos os exercícios o conjunto $U = \{u \subset \wp(\mathbb{N}) : u$ é ultrafiltro sobre $\mathbb{N}\}$.

13. Considere $a \subset \mathbb{N}$. Defina $a^* = \{u \in U : a \in u\}$. Mostre que
    (a) Dados $a, b \subset \mathbb{N}$, $a^* \cap b^* = (a \cap b)^*$.
    (b) Dados $a, b \subset \mathbb{N}$, $a^* \cup b^* = (a \cup b)^*$.
    (c) Dado $a \subset \mathbb{N}$, $U \backslash a^* = (\mathbb{N} \backslash a)^*$.
14. Mostre que $\{a^* : a \subset \mathbb{N}\}$ forma uma base de abertos fechados sobre U.

Nos exercícios a seguir, considere U com a topologia dada pela base acima.

15. Mostre que U é de Hausdorff.
16. Seja $n \in \mathbb{N}$. Note que $u_n = \{a \subset \mathbb{N} : n \in a\}$ é um ultrafiltro. Mostre que u_n é um ponto isolado em U.

17. Considere $N = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. Note que N é homeomorfo a $\mathbb{N}$ e que $\bar{N} = U$.
18. Mostre que U é compacto.
19. Fixe $f : \mathbb{N} \to [0, 1]$.
    (a) Dado $u \in U$, mostre que $\bigcap_{a \in u} \overline{f[a]}$ é um conjunto unitário.
    (b) Dado $n \in \mathbb{N}$, mostre que $\bigcap_{a \in u_n} \overline{f[a]}$ é o conjunto $\{f(n)\}$.
    (c) Dado $u \in U$, seja $x_u \in [0, 1]$ tal que $\bigcap_{a \in u} \overline{f[a]} = \{x_u\}$. Defina $\tilde{f} : U \to [0, 1]$ como $f(u) = x_u$. Mostre que $\tilde{f}$ é uma extensão contínua de f.
20. Conclua que U é homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$.

Vamos analisar agora uma propriedade sobre coberturas que generaliza simultâneamente a compacidade e a metrizabilidade. Sua definição é um pouco mais trabalhosa que as outras apresentadas nesse texto, mas ela permite construções elaboradas, como veremos nessa e na próxima seção.

Definição 9

Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que uma família $\mathcal{F} \subset \wp(X)$ é localmente finita se, para todo $x \in X$, existe V aberto tal que $x \in V$ e $\{F \in \mathcal{F} : V \cap F \neq \emptyset\}$ é finito.

Definição 10

Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\mathcal{C}$ uma cobertura para X. Dizemos que $\mathcal{F}$ é um refinamento para $\mathcal{C}$ se $\mathcal{F}$ é uma cobertura e para todo $F \in \mathcal{F}$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $F \subset C$.

Definição 11

Dizemos que (X, τ) é um espaço paracompacto se toda cobertura aberta admite refinamento aberto localmente finito.

Note que é imediato da definição que todo espaço compacto é paracompacto.

Proposição 12

Seja (X, τ) um espaço topológico com base enumerável e regular. Então (X, τ) é paracompacto.

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta para X. Seja $\mathcal{B}$ uma base enumerável para X. Para cada $x \in X$, sejam $B_x, C_x \in \mathcal{B}$ tais que $x \in B_x \subset \overline{B_x} \subset C_x \subset C$ para algum $C \in \mathcal{C}$. Como o conjunto de todos os B_x 's é enumerável, fixe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de forma que $\{B_{x_n} : n \in \mathbb{N}\} = \{B_x : x \in X\}$. Defina $W_0 = C_{x0}$ e $W_n = C_{x_n} \setminus \bigcup_{k<n} \overline{B_{x_n}}$, para $n > 0$. Vamos mostrar que

$(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é o refinamento desejado. Claramente, cada W_n é aberto. Além disso, temos também as seguintes propriedades:

Cobertura: Dado x, seja k o menor tal que $x \in \overline{B_{x_k}}$. Note que, assim, $x \in W_{x_k}$ Refinamento: Basta notar que $W_n \subset C_{x_n} \subset C$ para algum $C \in \mathcal{C}$. Localmente finito: Sejam $x \in X$ e x_j tais que $x \in B_{x_j}$ e j seja o menor possível com tal propriedade. Note que $W_n \cap B_{x_j} = \emptyset$ se $j < n$. Logo, $\left|\{W_n : W_n \cap B_{x_j} \neq \emptyset\}\right| \leq j$.

A ideia do próximo resultado é dizer que, para famílias localmente finitas, união dos fechos é o fecho da união.

Lema 13

Seja $\mathcal{F}$ uma familia localmente finita. Então, $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} \bar{F} = \overline{\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F}$. Em particular, $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} \bar{F}$ é fechado.

Demonstração. Note que $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} \bar{F} \subset \overline{\bigcup_{F\in\mathcal{F}} \bar{F}} = \overline{\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F}$. Por outro lado, sejam $x \in \overline{\bigcup_{F\in F} F}$ e A aberto tal que $\mathcal{F}_0 = \{F \in \mathcal{F} : F \cap A \neq \emptyset\}$ é finito. Note que $x \in \overline{\bigcup_{F\in\mathcal{F}_0} F}$ pela definição de $\mathcal{F}_0$. Pelo fato de $\mathcal{F}_0$ ser finito, temos $\overline{\bigcup_{F\in\mathcal{F}_0} F} = \bigcup_{F\in\mathcal{F}_0} \bar{F} \subset \bigcup_{F\in\mathcal{F}} \bar{F}$. Logo, $x \in \bigcup_{F\in\mathcal{F}} \bar{F}$ como queriamos.

O próximo lema nos dá uma condição suficiente para que dois fechados num paracompacto possam ser separados.

Lema 14

Sejam (X, τ) um espaço paracompacto e $A, B \subset X$ fechados disjuntos. Se, para todo $x \in B$, existem abertos U_x e V_x tais que $A \subset U_x$, $x \in V_x$ e $U_x \cap V_x = \emptyset$, então existem U e V abertos tais que $A \subset U$ e $B \subset V$.

Demonstração. Note que $\{V_x : x \in B\} \cup \{X \setminus B\}$ é uma cobertura aberta para X. Logo, existe $\{W_s : s \in S\}$ refinamento finito aberto para $\{V_x : x \in B\}$ (só olhamos para os que cobrem o próprio B). Note que, como cada $W_s \subset B_x$ para algum x, temos que $\overline{W_s} \cap A = \emptyset$ (U_x atesta isso). Seja $V = \bigcup_{s \in S} W_s$. Note que $B \subset V$. Pelo Lema 13, $V' = \bigcup_{s \in S} \overline{W_s}$ é fechado. Como $A \subset X \setminus V'$, basta fazermos $U = X \setminus V'$.

Teorema 15

Todo espaço de Hausdorff paracompacto é normal.

Demonstração. Seja (X, τ) um espaço de Hausdorff. Pelo Lema 14, (X, τ) é regular (faça $A = \{x\}$ e B fechado tal que $x \notin B$). Como (X, τ) é regular, o Lema 14 implica que (X, τ) é normal.

Vamos terminar esta seção mostrando que todo espaço métrico é paracompacto. Novamente, vamos precisar do Princípio da boa ordem (todo conjunto não vazio admite uma boa ordem).

Teorema 16

Todo espaço métrico é paracompacto.

Demonstração. Seja (X, d) um espaço métrico. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta para X. Seja $\preceq$ uma boa ordem sobre $\mathcal{C}$. Para cada $C \in \mathcal{C}$, vamos definir uma família $(D_n(C))_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ por indução sobre n. Para cada $C \in \mathcal{C}$, defina $D_1(C) = \bigcup_{x\in A} B_{\frac{1}{2}}(x)$, onde

$$A = \left\{x \in C : C = \min\left\{C' \in \mathcal{C} : x \in C'\right\} \text{ e } B_{\frac{3}{2}}(x) \subset C\right\}$$

Suponha definidos $D_k(C)$ para todo $k < n$ e todo $C \in \mathcal{C}$. Defina $D_n(C) = \bigcup_{x\in A} B_{\frac{1}{2^n}}(x)$, onde

$$A = \left\{x \in C : C = \min\left\{C' \in \mathcal{C} : x \in C'\right\}, x \notin D_k\left(C'\right)\right.$$
$$\left.\text{para qualquer } \; k < n \text{ e } C' \in \mathcal{C} \text{ e } B_{\frac{3}{2n}}(x) \subset C\right\}$$

Vamos mostrar que $\{D_n(C) : n \in \mathbb{N}_{>0}, C \in \mathcal{C}\}$ é o refinamento desejado. Primeiramente, note que, de fato, $D_n(C) \subset C$. Vejamos que, de fato, cobre. Seja $x \in X$. Seja $C = \min\{C' \in \mathcal{C} : x \in C'\}$. Assim, existe algum $n \in \mathbb{N}$ de forma que $B_{\frac{3}{2^n}}(x) \subset C$. Desta forma, $x \in D_n(C)$ ou $x \in D_k(C')$ para algum $k \leq n$ e $C^{2'} \in \mathcal{C}$.

Resta mostrar que $\{D_n(C) : n \in \mathbb{N}_{>0}, C \in \mathcal{C}\}$ é localmente finito. Seja $x \in X$. Seja $C = \min\{C' \in \mathcal{C} : x \in D_n(C')$ para algum $n \in \mathbb{N}\}$. Seja $j \in \mathbb{N}$ de forma que $B_{\frac{1}{2j}}(x) \subset D_n(C)$, onde n é tal que $x \in D_n(C)$. Note que é suficiente mostrarmos que:

(a) Se $i \geq n + j$, então $B_{\frac{1}{2^{n+j}}}(x)$ não intercepta $D_i(C')$ para qualquer $C' \in \mathcal{C}$.

(b) Se $i < n + j$, então $B_{\frac{1}{2^{n+j}}}(x)$ intercepta $D_i(C')$ para, no máximo, um $C' \in \mathcal{C}$.

Vamos provar (a). Como $n \geq i$, toda bola utilizada na criação de $D_i\left(C'\right)$ tem centro fora de $D_n(C)$. Como $B_{\frac{1}{2^j}}(x) \subset D_n(C)$, temos que $d(x,y) \geq \frac{1}{2^j}$
para todo y centro de alguma bola utilizada na criação de $D_i\left(C'\right)$. Como $i \geq j+1$ e $n+j \geq j+1$, temos que $B_{\frac{1}{2^{n+j}}}(x) \cap B_{\frac{1}{2^i}}(y) = \emptyset$.

Agora vamos provar (b). Sejam $p \in D_i(E)$ e $q \in D_i(F)$ com $E \prec F$. Vamos mostrar que $d(p,q) \geq \frac{1}{2^{n+j-1}}$. Note que isso é suficiente. Como $p \in D_i(E)$, existe y tal que $p \in B_{\frac{1}{2^i}}(y) \subset D_i(E)$ e $B_{\frac{3}{2^i}}(y) \subset E$. Como $q \in D_i(F)$, existe z tal que $q \in B_{\frac{1}{2^i}}(z) \subset D_i(F)$. Note que $z \notin E$ (pois $E \prec F$). Logo, $d(y,z) \geq \frac{3}{2^2}$. $\log 0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2^i} &\leq d(y,z) \\
&\leq d(y,p) + d(p,q) + d(q,z) \\
&\leq \frac{2}{2^i} + d(p,q)
\end{aligned}$$

Assim, $d(p,q) \geq \frac{1}{2^i} \geq \frac{1}{2^{n+j-1}}$.

Paracompacidade - exercicios

1. Se $\mathcal{F}$ é uma família localmente finita, então $\{\bar{F} : F \in \mathcal{F}\}$ também é.
2. Seja (X, τ) um espaço topológico paracompacto e $F \subset X$ fechado. Mostre que F é paracompacto.
3. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura para X. Seja $\mathcal{A}$ um refinamento de $\mathcal{C}$ e seja $\mathcal{B}$ um refinamento de $\mathcal{A}$. Mostre que $\mathcal{B}$ é um refinamento de $\mathcal{A}$.
4. Seja (X, τ) espaço topológico T_1. Mostre que $D \subset X$ é um discreto (i.e, com a topologia induzida é discreto) fechado se, e somente se, $\{\{d\} : d \in D\}$ é localmente finito.

Definição 17

Seja (X,τ) um espaço topológico. Dizemos que $\mathcal{F}$ família de subconjuntos de X é uma família discreta se, para todo $x \in X$, existe V aberto tal que $x \in V$ e existe no máximo um $F \in \mathcal{F}$ tal que $V \cap F \neq \emptyset$.

5. Mostre que se X é regular e $\mathcal{F}$ é uma família discreta, para todo $x \in X$ existe V aberto tal que $x \in V$ e existe no máximo um $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \cap \bar{V} \neq \emptyset$

Definição 18

Dizemos que (X,τ) é coletivamente normal se X é T_1 e, para todo família discreta $\{F_i : i \in I\}$ de fechados, existe uma uma família de abertos $\{V_i : i \in I\}$ dois a dois disjuntos tal que $F_i \subset V_i$ para todo $i \in I$.

6. Mostre que todo espaço coletivamente normal é normal.
7. Mostre que todo espaço paracompacto de Hausdorff é coletivamente normal.

Uma vez contando com a propriedade da paracompacidade, podemos definir uma família de funções contínuas que podem ser utilizadas em diversas aplicações.

Definição 19

Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma família $(f_s)_{s\in S}$ de funções contínuas de X em $[0,1]$ é chamada de uma partição da unidade se $\sum_{s\in S} f_s(x) = 1$ para todo $x \in X$.

Note que se $(f_s)_{s\in S}$ é uma partição da unidade, então, para todo $x \in X$, $\{s \in S : f_s(x) \neq 0\}$ é enumerável.

Definição 20

Dizemos que uma partição da unidade $(f_s)_{s\in S}$ é localmente finita, se $\left\{f_s^{-1}\left(\,(0,1]\,\right) : s \in S\right\}$ é localmente finito.

Note que, nesse caso, $\left\{f_s^{-1}\left(\,(0,1]\,\right) : s \in S\right\}$ é uma cobertura aberta e $\sum_{s\in S} f_s(x)$ é, na verdade, uma soma finita para cada ponto fixado.

Definição 21

Uma partição da unidade $(f_s)_{s\in S}$ *é dita subordinada a uma cobertura* $\mathcal{C}$ *se para todo* $s \in S$ *existe* $C \in \mathcal{C}$ *tal que* $f_s^{-1}\left(\,(0,1]\,\right) \subset C$*.*

Lema 22

Seja (X, τ) *um espaço topológico regular. Se toda cobertura aberta para* X *admite refinamento localmente finito (não necessariamente aberto ou fechado), então, para toda cobertura aberta* $\{U_s : s \in S\}$*, existe cobertura fechada localmente finita* $\{F_s : s \in S\}$ *tal que para todo* $s \in S$*,* $F_s \subset U_s$*.*

Demonstração. Seja $\{U_s : s \in S\}$ cobertura aberta. Como (X, τ) é regular, existe uma cobertura aberta $\mathcal{W}$ tal que $\{\bar{W} : W \in \mathcal{W}\}$ refina $\{U_s : s \in S\}$, Seja $\mathcal{A} = \{A_t : t \in T\}$ refinamento de $\mathcal{W}$ localmente finito. Para cada $t \in T$, seja $s(t) \in S$ tal que $\overline{A_t} \subset U_{s(t)}$. Para cada $s \in S$, seja $F_s = \bigcup_{s(t)=s} \overline{A_t}$. Como $\{A_t : t \in T\}$ é localmente finito, temos que F_s é fechado.

Note, também, que $F_s \subset U_s$. Resta mostrar que $\{F_s : s \in S\}$ é localmente finito (é cobertura, pois $(A_t)_{t\in T}$ é cobertura). Seja $x \in X$. Como $\left\{\overline{A_t} : t \in T\right\}$ é localmente finito, existe A aberto tal que $x \in A$ e $T' = \left\{t \in T : \overline{A_t} \cap A \neq \emptyset\right\}$ é finito. Note que se mostrarmos que

$$\left\{s(t) : t \in T'\right\} = \{s \in S : F_s \cap A \neq \emptyset\}$$

teremos o resultado, já que T' é finito. Vejamos as duas inclusões. Seja s tal que $s = s(t)$ para algum $t \in T'$. Então $\overline{A_l} \cap A \neq \emptyset$. Como $\overline{A_t} \subset F_s$, temos que $F_s \cap A \neq \emptyset$. Por outro lado, seja $s \in S$ tal que $F_s \cap A \neq \emptyset$. Como $F_s = \bigcup_{s(t)=s} \overline{A_t}$, temos que existe t tal que $s(t) = s$ tal que $A \cap \overline{A_t} \neq \emptyset$. Assim, $t \in T'$.

Lema 23

Seja (X,τ) um espaço topológico e seja $\mathcal{U}$ cobertura aberta para X. Se existe $(f_s)_{s\in S}$ partição da unidade subordinada a $\mathcal{U}$, então $\mathcal{U}$ admite refinamento aberto localmente finito.

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que, para cada $g : X \to [0,1]$ contínua e para cada $x_0 \in X$ tal que $g\left(x_0\right) > 0$, existe U aberto tal que $x_0 \in U$ e existe $S' \subset S$ finito tal que

$$\forall s \in S \backslash S', \forall x \in U, f_s(x) < g(x). \tag{1}$$

De fato, existe $S' \subset S$ finito tal que

$$1 - \sum_{s\in S'} f_s\left(x_0\right) < g\left(x_0\right)$$

Por outro lado, temos que

$$\sum_{s\in S\backslash S'} f_s\left(x_0\right) = 1 - \sum_{s\in S'} f_s\left(x_0\right)$$

Como $\sum_{s \in S'} f_s$ é uma função contínua, existe um aberto U tal que $x_0 \in U$ e

$$\forall x \in U, \sum_{s \in S \setminus S^+} f_s(x) < g(x),$$

portanto, temos (1).

Vamos mostrar que $f = \sup\{f_s : s \in S\}$ é uma função contínua. De fato, para cada $x_0 \in X$, existe $s_0 \in S$ tal que $f_{s_0}(x) > 0$. Por (1), existem $S' \subset S$ finito e U aberto tais que $x_0 \in U$ e

$$\forall s \in S \setminus S', \forall x \in U, f_s(x) < f_{s_0}(x).$$

Portanto, para cada $x \in U, \sup\{f_s(x) : s \in S\} = \max\{f_s(x) : s \in S'\}$. Logo, $f|_U$ é contínua, já que a função máximo é contínua (exercício).

Vamos agora ao refinamento. Para cada $s \in S$, temos que $V_s = \{x \in X : f_s(x) > \frac{1}{2}f(x)\}$ é aberto. Note que $\mathcal{V} = \{V_s : s \in S\}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$, pois $V_s \subset f_s^{-1}((0,1])$. Além disso, $\mathcal{V}$ é localmente finito (basta tomar $g = \frac{1}{2}f$ em (1)).

Agora vamos ao principal teorema da seção.

Teorema 24

Seja (X, τ) espaço T_1. São equivalentes:

(a) *(X, τ) é paracompacto e de Hausdorff;*

(b) *Toda cobertura aberta de X admite partição da unidade subordinada a ela localmente finita;*

(c) *Toda cobertura aberta de X admite partição da unidade subordinada a ela.*

Demonstração. $(a \Rightarrow b)$. Seja $\mathcal{A}$ cobertura aberta para X. Seja $(U_s)_{s \in S}$ refinamento aberto localmente finito (decorrente da paracompacidade). Pelo Lema 22, existe $\{F_s : s \in S\}$ cobertura fechada localmente finita tal que $F_s \subset U_s, \forall s \in S$. Como X é normal (Teorema 16) podemos usar o Lema de Urysohn e definir, para cada $s \in S, g_s : X \to [0, 1]$ contínua tal que $g_s(X \backslash U_s) = \{0\}$ e $g_s(F_s) = \{1\}$

Defina $g(x) = \sum_{s \in S} g_s(x)$. Como $(U_s)_{s \in S}$ é localmente finita, g está bem definida e é contínua (dado $x \in X$ qualquer, existe um número finito de abertos de $(U_s)_{s \in S}$ tais que $x \in U_s$ e assim g é localmente uma soma finita de funções contínuas). Para cada $s \in S$, defina $f_s(x) = \frac{g_s(x)}{g(x)}$. Note que $(f_s)_{s \in S}$ é a partição desejada.

$(b \Rightarrow c)$. Imediato.

$(c \Rightarrow a)$. Pelo Lema 23 , resta mostrar que (X, τ) é de Hausdorff. Sejam $x_1, x_2 \in X$ distintos. Como (X, τ) é $T_1, \mathcal{U} = \{X \setminus \{x_1\}, X \setminus \{x_2\}\}$ é uma cobertura aberta. Logo, por (c), existe $(f_s)_{s \in S}$ partição da unidade subordinada a $\mathcal{U}$. Seja $s_0 \in S$ tal que $f_{s_0}(x_1) = a > 0$. Note que $f_{s_0}^{-1}((0,1]) \not\subset X \setminus \{x_1\}$, logo $f_{s_0}^{-1}((0,1]) \subset X \setminus \{x_2\}$, e assim $f_{s_0}(x_2) = 0$. Note, por fim, que $U_1 = f_{s_0}^{-1}\left(\left(\frac{a}{2}, 1\right]\right)$ e $U_2 = f_{s_0}^{-1}\left(\left[0, \frac{a}{2}\right)\right)$ são abertos disjuntos que contém x_1 e x_2, respectivamente.

Partição da unidade - Exercícios

1. Mostre que existe uma partição da unidade $(f_i)_{i \in I}$ sobre $\mathbb{R}$ onde para cada $i \in I, \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ é compacto.