Lista 4 - Cálculo Numérico

MAP-0151

Problema 1. *Encontre valores $a, b, c \in \mathbb{R}$ que minimizam*

(a)

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x - a - bx - cx^2)^2 dx$$

(b)

$$\int_{0}^{1} (a + bx + c\cos(2\pi x) - \sin(2\pi x))^2 dx$$

Problema 2. *Considerando o produto interno*

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

é possível obter um conjunto de ***polinômios ortogonais*** *denso no espaço de funções $L^2[-1, 1]$.*

Esses são os chamados ***Polinômios de Legendre****, sendo de fundamental importância na Análise Numérica e Teoria de Aproximações.*

Assim, os Polinômios de Legendre são polinômios dois-a-dois ortogonais, isto é,

$$\langle f, g \rangle = 0$$

que podem ser usados para aproximar qualquer função quadrado integrável.

(a) Encontre os Polinômios de Legendre de grau menor ou igual a 3.

Por uma mudança de parâmetros é possível encontrar um conjunto de polinômios densos no espaço de função $L^2[a, b]$ para qualquer intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$

(b) Encontre os Polinômios de Legendre de grau menor ou igual a 3 para $L^2[2, 3]$, isto é, para o espaço de funções munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{2}^{3} f(x)g(x)dx$$

(c) *Encontre os Polinômios de Legendre de grau menor ou igual a* 3 *para o espaço* $L^2[a,b]$, *onde*

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Problema 3. *Considerando os Polinômios de Legendre, encontre as aproximações das funções abaixo nos respectivos intervalos por polinômios de grau menor ou igual a* 2

(a) $f(x) = \cos x$ *em* $[0, \pi/2]$

(b) $f(x) = x^3$ *em* $[-2, 2]$

(c) $f(x) = 1 - |2x - 5|$ *em* $[2, 3]$

(d) $f(x) = 1 - |x|$ *em* $[-1, 1]$

(e) *Em* $[1, 5]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , 1 \le x \le 3 \\ -1 & , 3 < x \le 5 \end{cases}$$

Problema 4. *Efetue a análise harmônica para as funções abaixo até o harmônico de ordem primeira.*

(a) $f(x) = \pi - |x|$ *em* $[-\pi, \pi]$

(b) $f(x) = ||x| - \frac{1}{4}|$ *em* $[-1, 1]$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & , 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \\ x - \frac{3\pi}{2} & , \frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi \end{cases}$$

Problema 5. *Encontre a série de Fourier das funções* 2π*-periódicas abaixo*

(a) $f(x) = \frac{1}{7}\cos(2x) + \sin(3x) + 5\sin(9x)$

(b) $f(x) = 2\sin(x) + 3\sin(2x) + 4\sin(3x)$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , -\pi \le x \le 0 \\ 1 & , 0 < x \le \pi \end{cases}$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , -\pi \le x \le 0 \\ \sin x & , 0 < x \le \pi \end{cases}$$

(e) $f(x) = |\sin x|$ *em* $(-\pi, \pi]$

(f) $f(x) = x$ *em* $[-\pi, \pi)$ *(Função Rampa)*

Problema 6. *Os polinômios* $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2 - 1$,$p_3(x) = x^3 - 4x$ *são ortogonais em relação a um produto interto tal que* $\langle p_i, p_i \rangle = i + 1$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

(a) Sendo $p(x) = a_0p_0(x) + a_1p_1(x) + a_2p_2(x) + a_3p_3(x)$, *encontre uma expressão para* $\|p\|^2 = \langle p, p \rangle$ *em função dos seus coeficientes* $a_i's$.

(b) Se $p(0) = 1$ *qual o menor valor que* $\|p\|^2$ *pode assumir?*

(c) Dentre os polinômios de grau menor ou igual a 3, *qual terá a menor norma?*

Problema 7. *Sejam* $f(x) = x^5$, p_0, p_1, p_2, p_3 *os polinômios de Legendre de grau menor ou igual a* 3. *Ao aproximarmos* f *no intervalo* $[-1, 1]$ *por um polinômio de grau menor ou igual a* 2 *obtivemos*

$$p(x) = \frac{3}{7}p_1(x)$$

Considerando a aproximação por um polinômio de grau menor ou igual a 3

$$p(x) = a_0p_0(x) + a_1p_1(x) + a_2p_2(x) + a_3p_3(x)$$

determine a_0, a_1, a_2 *e* a_3.