EXERCÍCIO 2 PARA ENTREGAR - MAP 2313

PROFESSOR: PEDRO T. P. LOPES

Prazo de entrega: 7 de julho de 2023.

Exercício. O objetivo desse exercício é mostrar unicidade da solução u de

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y,z) &= f(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \Omega, \\ u(x,y,z) &= g(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Vamos assumir que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um aberto limitado, regular e conexo (consiste apenas de um pedaço). O conjunto $\partial\Omega$ é a fronteira de Ω e as funções $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ e $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ são dados do problema. Para facilitar, vamos assumir que f e g são infinitamente deriváveis.

i) Mostre que

$$\nabla \cdot (u \nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v, \tag{0.2}$$

em que $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$, $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ e $\nabla \cdot (F_1, F_2, F_3) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$.

ii) Mostre que, se u_1 e u_2 são soluções de (0.1), então $w = u_1 - u_2$ é solução de

$$\begin{aligned} \Delta w(x,y,z) &= 0, \quad (x,y,z) \in \Omega, \\ w(x,y,z) &= 0, \quad (x,y,z) \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{0.3}$$

iii) O Teorema da Divergência nos diz que

$$\int\int_{\partial\Omega} F.ndS = \int\int\int_{\Omega} \nabla \cdot F dxdydz,$$

em que $F = (F_1, F_2, F_3) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ é de classe C^1 e $n : \partial\Omega \to \mathbb{R}^3$ é a normal que aponta para fora de Ω.

Integre a Equação (0.2) em Ω com $u = v = w$, em que w satisfaz (0.3). Aplique o teorema da divergência e (0.3) para mostrar que $\nabla w = 0$ para todo $(x,y,z) \in \Omega$. Use este fato e a condição de contorno de (0.3), para mostrar que $u_1 = u_2$ e, portanto, se existir uma solução de (0.1), então ela é única.

Formulário:

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto limitado, regular e conexo. Logo

1) Se $\int\int\int_\Omega h(x,y,z)dxdydz = 0$ e $h : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e não negativa ($h \geq 0$), então $h(x,y,z) = 0$, para todo ponto $(x,y,z) \in \Omega$.

2) Se $\nabla h(x,y,z) = 0$ para todo $(x,y,z) \in \Omega$, então h é uma constante.