Física do spin

F.S. Navarra

navarra@if.usp.br

Richard Terra (monitor)

richard.terra@usp.br

edisciplinas.if.usp.br

(buscar: física do spin)

Plano do curso

13/03 aula 1: Partículas elementares e idéias da física quântica

20/03 aula 2: Átomo de Bohr, quantização do momento angular

27/03 aula 3: Momento de dipolo magnético, Stern - Gerlach

10/04 aula 4: Efeito Zeeman anômalo

17/04 1ª Prova

24/04 aula 5: Equações de autovalores, matrizes de Pauli

08/05 aula 6: Comutadores, medidas SG sequenciais

15/05 aula 7: Medidas e valores médios

22/05 aula 8: Precessão de Larmor

29/05 aula 9: Adição de spins

05/06 2ª Prova

12/06 aula 10: Princípio da exclusão de Pauli

19/06 aula 11: Interação hiperfina no hidrogênio

26/06 aula 12: EPR (Rafael)

03/07 aula 13: RMN (Paulo)

10/07 3ª Prova

Avaliação

Três provas : P1 P2 P3

Média das duas melhores : $P = (P_i + P_j)/2$

Substitutiva aberta

Aula 11

Interação hiperfina no hidrogênio

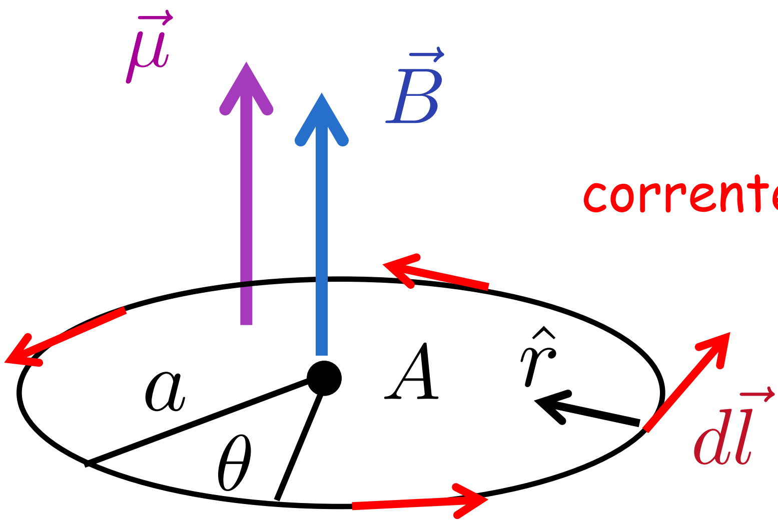
A linha de 21 cm

A rotação das galáxias

Interação hiperfina no átomo de hidrogênio

Modelo:
interação magnética
entre duas espiras

Campo magnético de uma espira



Biot-Savart :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$d\vec{l} \times \hat{r} = |d\vec{l} \times \hat{r}|\, \hat{k} = dl\, \hat{k}$$

$$d\vec{l} \times \hat{r} = r\, d\theta\, \hat{k}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r}{r^2} d\theta\, \hat{k}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^{2\pi} d\theta\, \hat{k}$$

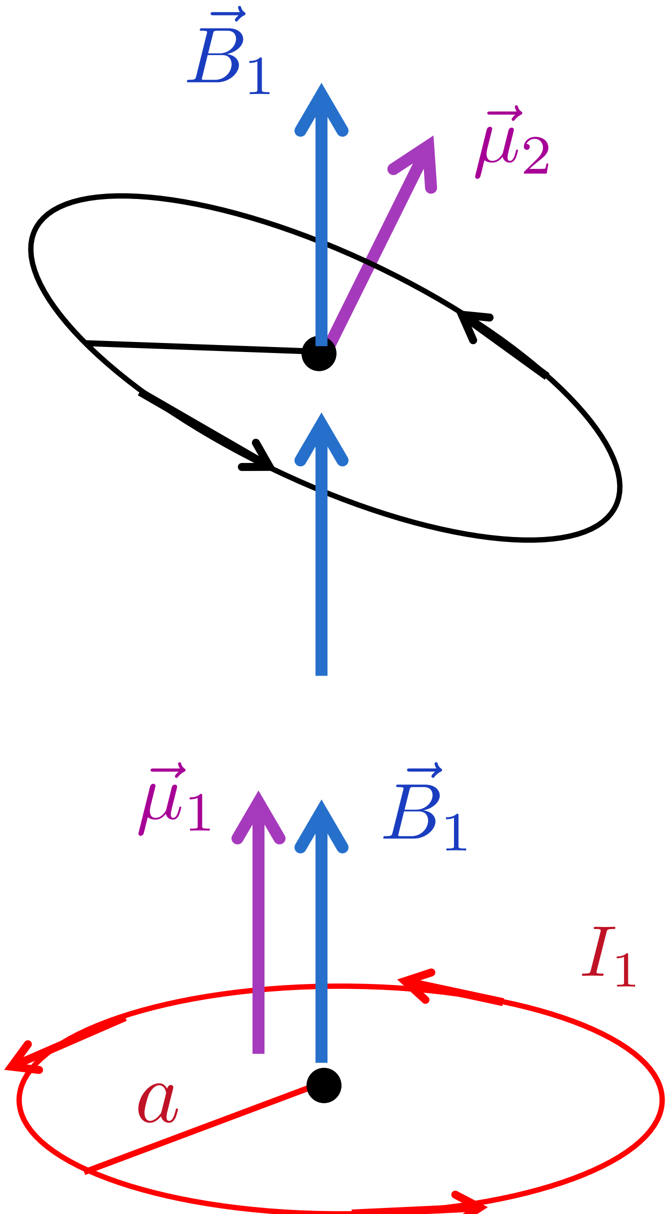
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2a} \hat{k}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2a} \frac{\pi a^2}{\pi a^2} \hat{k}$$

$$\vec{\mu} = I A \hat{k} = I \pi a^2 \hat{k}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi a^3} \vec{\mu}}$$

Interação entre duas espiras



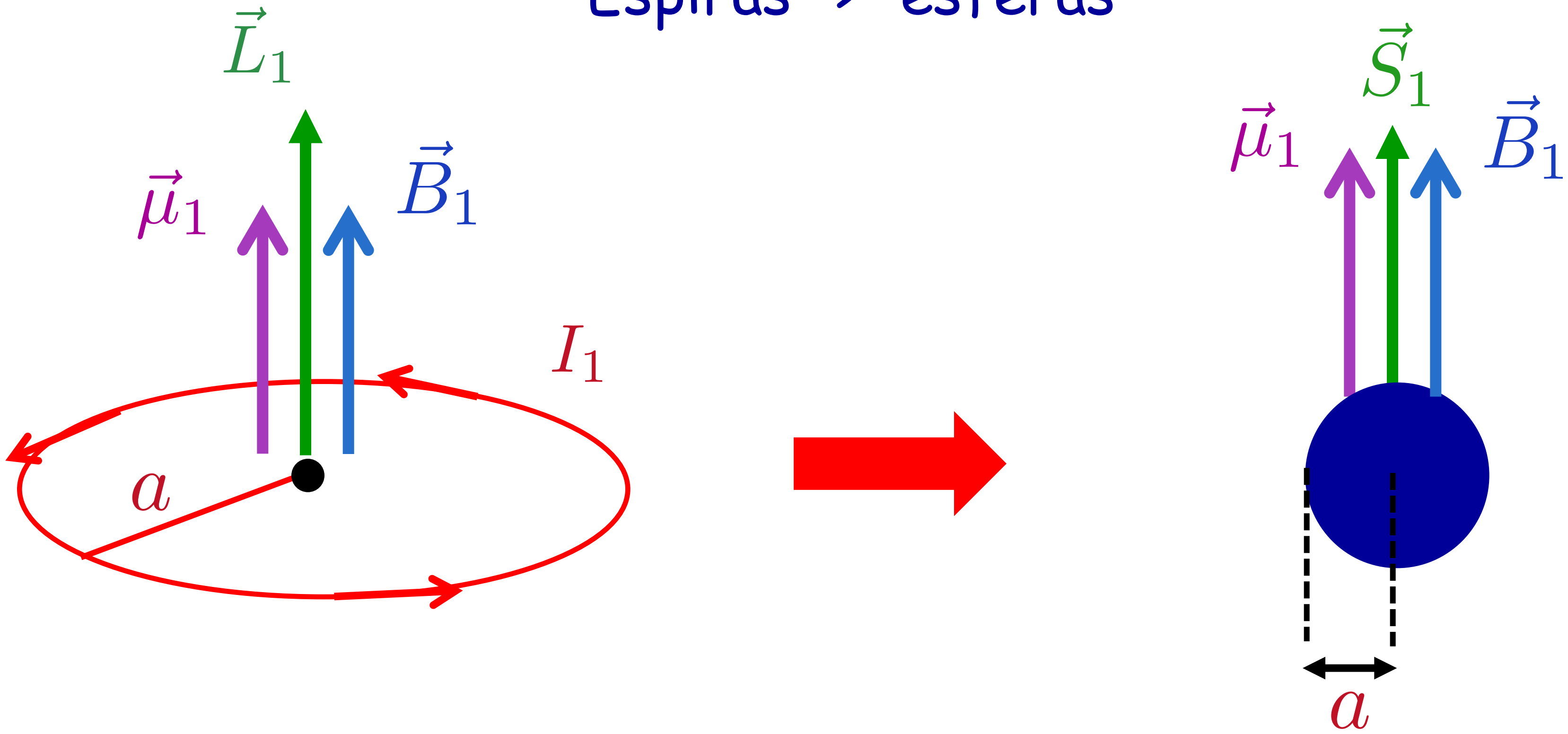
$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\,\pi\,a^3}\,\vec{\mu}_1$$

$$U = -\,\vec{\mu}_2\,.\,\vec{B}_1$$

$$H = U = -\,\frac{\mu_0}{2\,\pi\,a^3}\,\vec{\mu}_1\,.\,\vec{\mu}_2$$

(cargas positivas
em movimento)

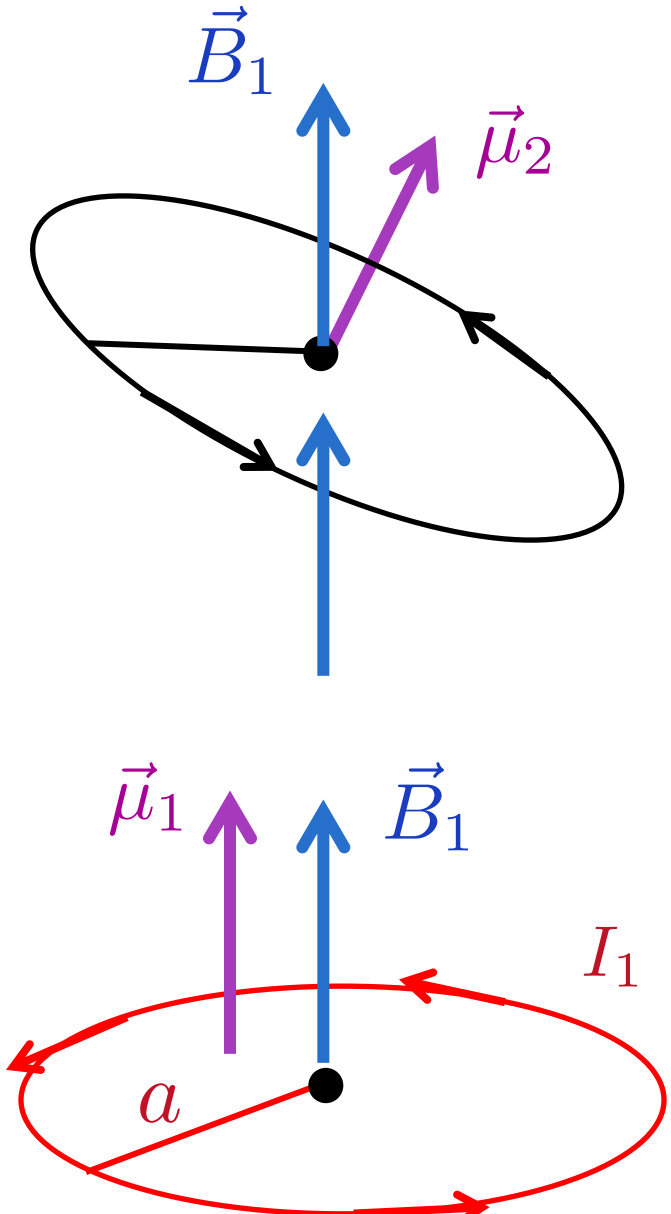
Espiras -> "esferas"



$$\vec{\mu}_1 = \gamma_1 \vec{S}_1 \qquad \vec{\mu}_2 = \gamma_2 \vec{S}_2 \qquad \gamma = \frac{g\,e}{2\,m}$$

$$H = -\frac{\mu_0}{2\,\pi\,a^3}\,\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2 \longrightarrow H = -\frac{\mu_0\,\gamma_1\,\gamma_2}{2\,\pi\,a^3}\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

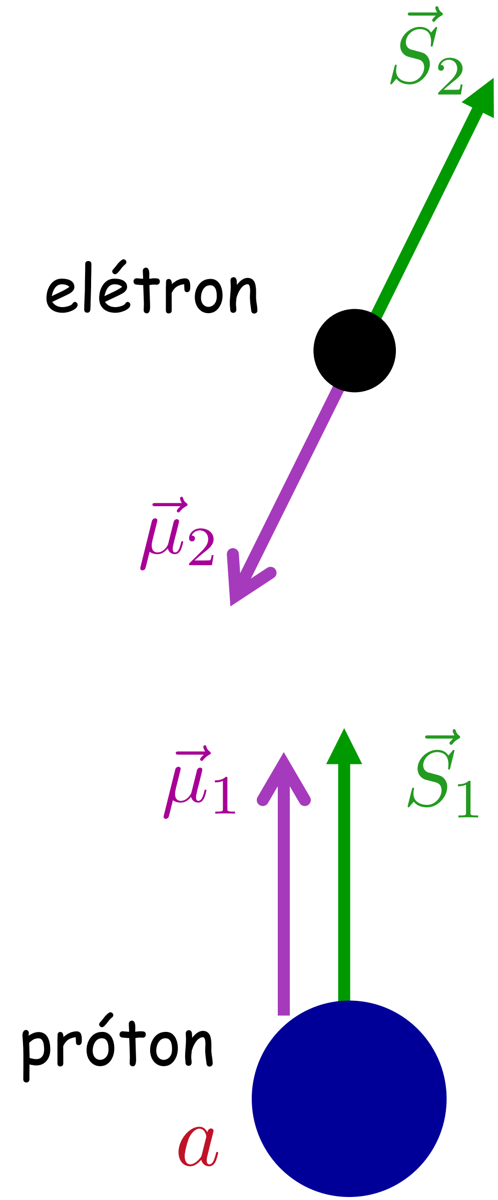
Espiras -> “esferas”



(cargas negativas em movimento)

$$\gamma_2 \rightarrow -\gamma_2$$

$$\vec{\mu}_2 = -\gamma_2 \vec{S}_2$$



$$H = -\frac{\mu_0\,\gamma_1\,\gamma_2}{2\,\pi\,a^3}\,\vec{S}_1\,.\,\vec{S}_2 \quad \xrightarrow[\gamma_2 \to -\gamma_2]{} \quad H = \frac{\mu_0\,\gamma_1\,\gamma_2}{2\,\pi\,a^3}\,\vec{S}_1\,.\,\vec{S}_2$$

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

$$\vec{S}^2 = \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2\,\vec{S}_1\,.\,\vec{S}_2$$

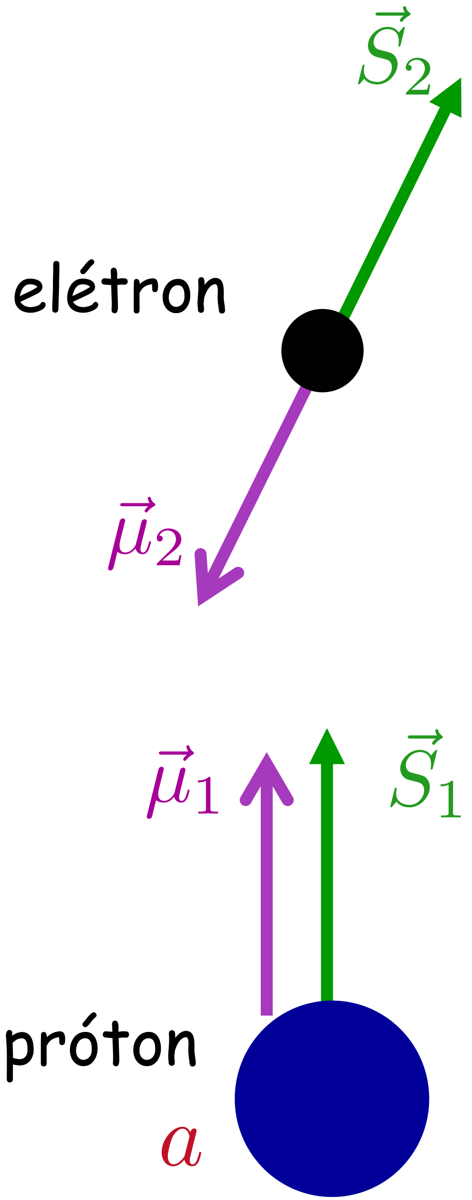
$$\vec{S}_1\,.\,\vec{S}_2 = \frac{\vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2}{2}$$

$$H = \frac{\mu_0\,\gamma_1\,\gamma_2}{2\,\pi\,a^3}\,\frac{\vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2}{2}$$

versão quântica: funções viram operadores !

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{S} \to \hat{S} \\ H \to \hat{H} \end{array} \right.$$

Energia de interação hiperfina (spin-spin)



$$E = \langle \hat{H} \rangle = \langle \chi \,|\, \hat{H} \,|\, \chi \rangle$$

$$|\, \chi \,\rangle = |s, m\rangle$$

Estado de spin de duas partículas
com spin total s e projeção m

Tripleto : $\begin{cases} |1\ 1\rangle \\ |1\ 0\rangle \\ |1\ -1\rangle \end{cases}$

Singleto : $|0\ 0\rangle$

$$E = \frac{\mu_0\,\gamma_1\,\gamma_2}{2\,\pi\,a^3}\left(\frac{\langle s\,m|\vec{S}^2\,|s\,m\rangle - \langle s\,m|\vec{S}_1^2|s\,m\rangle - \langle s\,m|\vec{S}_2^2|s\,m\rangle}{2}\right)$$

Singleto : $|0\;0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\frac{1}{2}\;+\frac{1}{2}\rangle\,|\frac{1}{2}\;-\frac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\frac{1}{2}\;-\frac{1}{2}\rangle\,|\frac{1}{2}\;+\frac{1}{2}\rangle$

$$\langle 0\;0|\,\hat{S}^2\,|0\;0\rangle = 0$$

$$\langle 0\;0|\,\hat{S}_1^2\,|0\;0\rangle = \frac{3}{4}\,\hbar^2$$

$$\langle 0\;0|\,\hat{S}_2^2\,|0\;0\rangle = \frac{3}{4}\,\hbar^2$$

$$\boxed{E_{singleto} = \frac{\mu_0\,\gamma_1\,\gamma_2}{2\,\pi\,a^3}\,(-\frac{3}{4}\,\hbar^2)}$$

$$E = \frac{\mu_0\,\gamma_1\,\gamma_2}{2\,\pi\,a^3}\left(\frac{\langle s\,m|\vec{S}^2\,|s\,m\rangle - \langle s\,m|\vec{S}_1^2|s\,m\rangle - \langle s\,m|\vec{S}_2^2|s\,m\rangle}{2}\right)$$

Tripleto : $|1\ \ -1\rangle = |\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\rangle\,|\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\rangle$ (por exemplo)

$$\langle 1\ \ -1|\,\hat{S}^2\,|1\ \ -1\rangle = 2\,\hbar^2$$ (veja aula 9)

$$\langle 1\ \ -1\,|\,\hat{S}_1^2\,|1\ \ -1\rangle = \frac{3}{4}\,\hbar^2$$

$$\langle 1\ \ -1\,|\,\hat{S}_2^2\,|1\ \ -1\rangle = \frac{3}{4}\,\hbar^2$$

$$\boxed{E_{tripleto} = \frac{\mu_0\,\gamma_1\,\gamma_2}{2\,\pi\,a^3}\,(+\frac{1}{4}\,\hbar^2)}$$

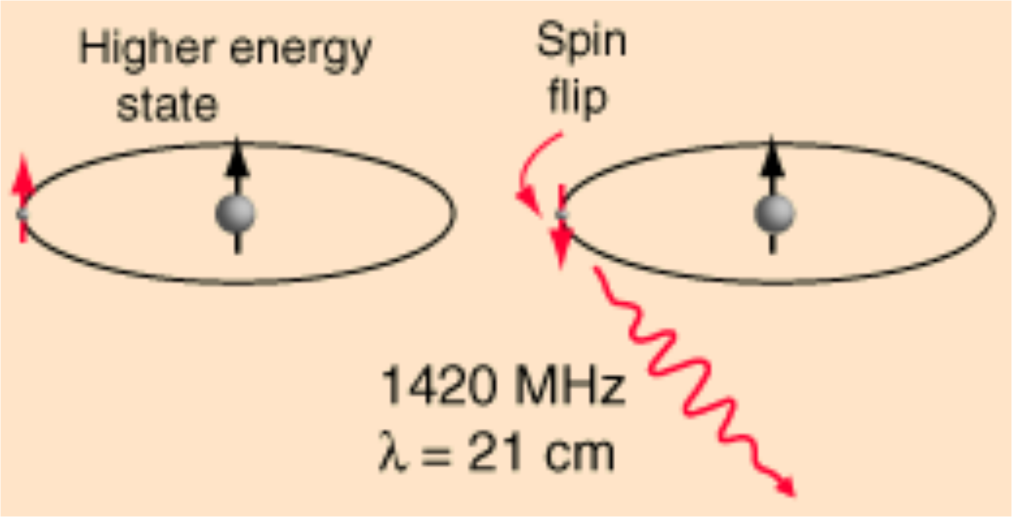
$$\Delta E_{hf} = E_{tripleto} - E_{singleto} = \frac{\mu_0\, \gamma_1\, \gamma_2}{2\,\pi\, a^3}\, \hbar^2 \qquad \gamma = \frac{g\, e}{2\, m}$$

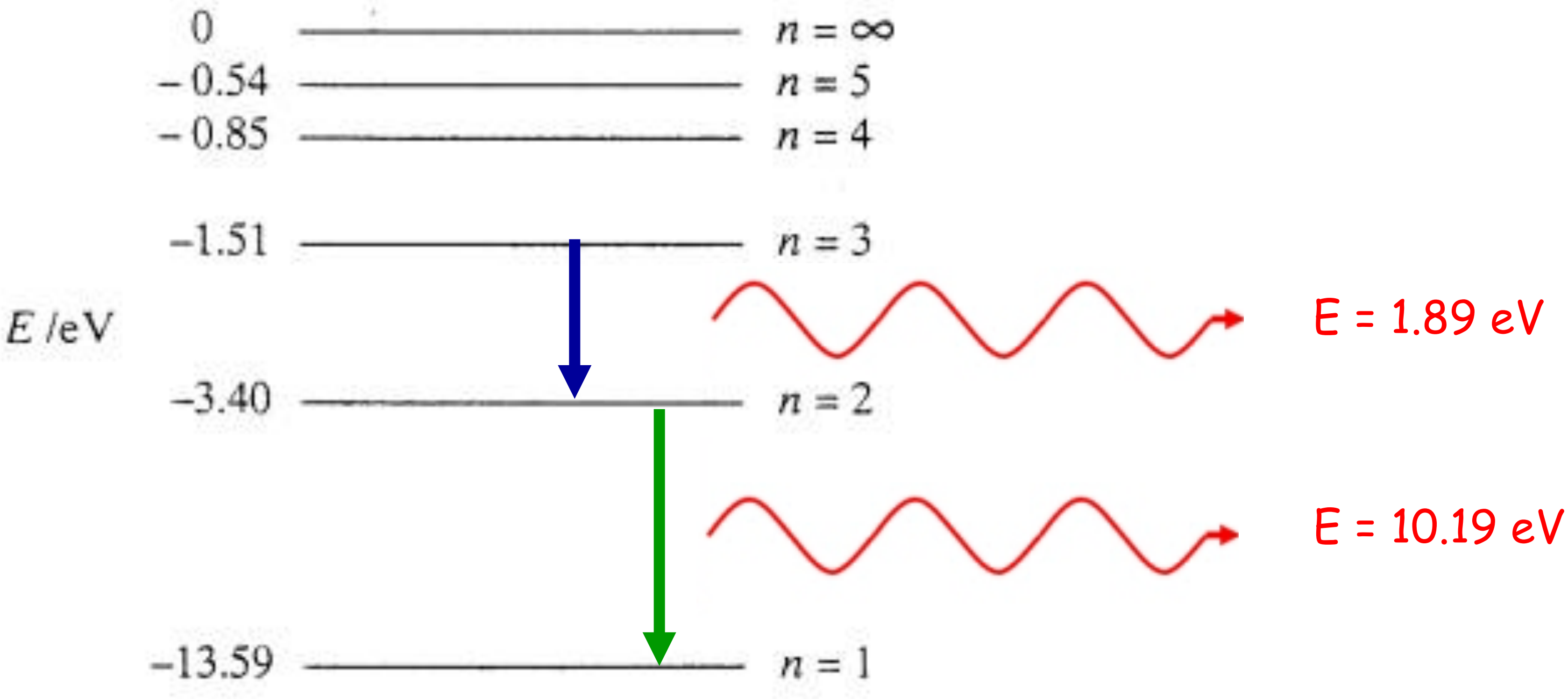
$$\Delta E_{hf} \simeq 5.884 \times 10^{-6}\, \mathrm{eV}$$

$$\nu = \frac{\Delta E_{hf}}{h} \simeq 1422.8 \ \mathrm{MHz}$$

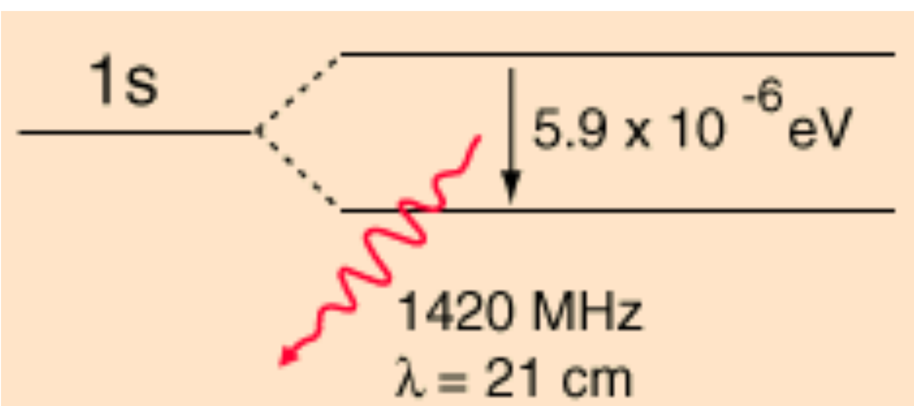
$$\boxed{\lambda = \frac{c}{\nu} = 21.07 \ \mathrm{cm}}$$

(micro-ondas : 12 cm)





Estrutura hiperfina do hidrogênio



O fóton hiperfino
tem energia
MUITO MENOR !

É um só !

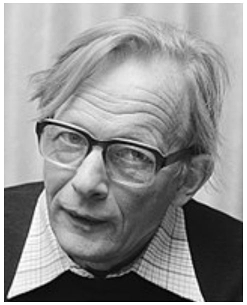
Astronomia de 21 cm !

A "linha de 21 cm"

1944 Jan Oort : o Universo pode estar cheio de hidrogênio !

1945 H. Van de Hulst : H emite os fotons de 21 cm

Eles podem atravessar a poeira interestelar



1951 H. Ewen e E. Purcell: medida

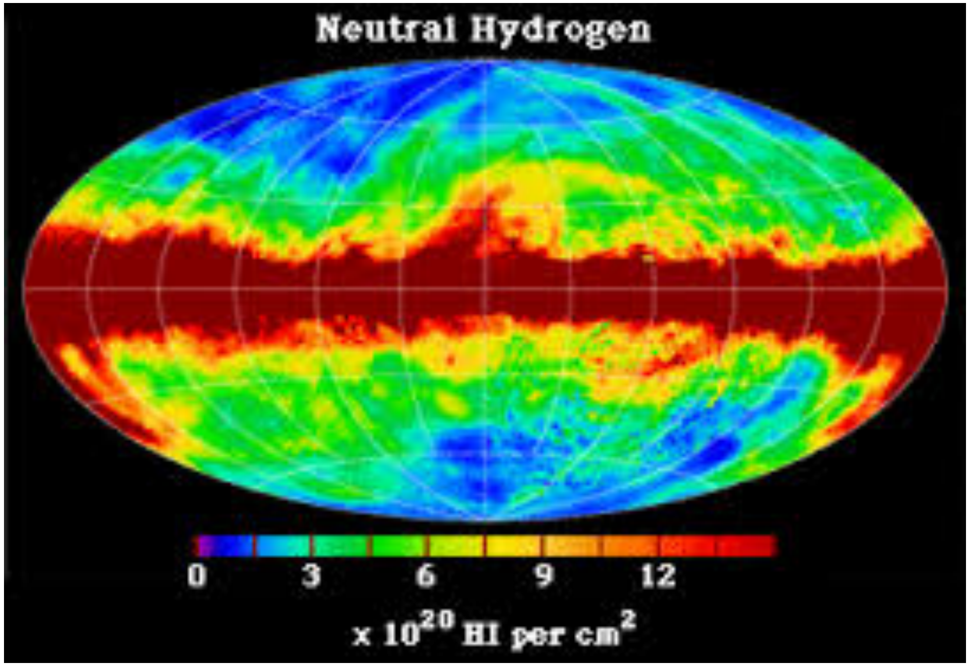
da linha de 21 centímetros

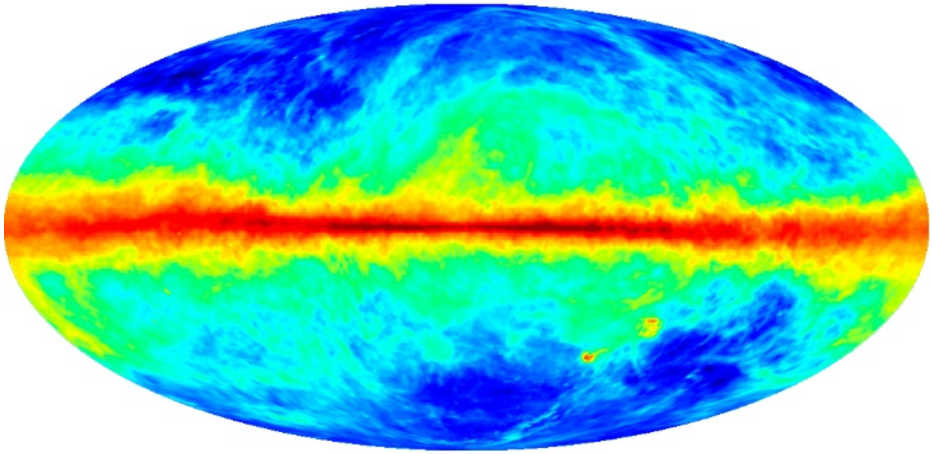
O Universo está cheiro de hidrogênio !

(1 átomo por cm^3)

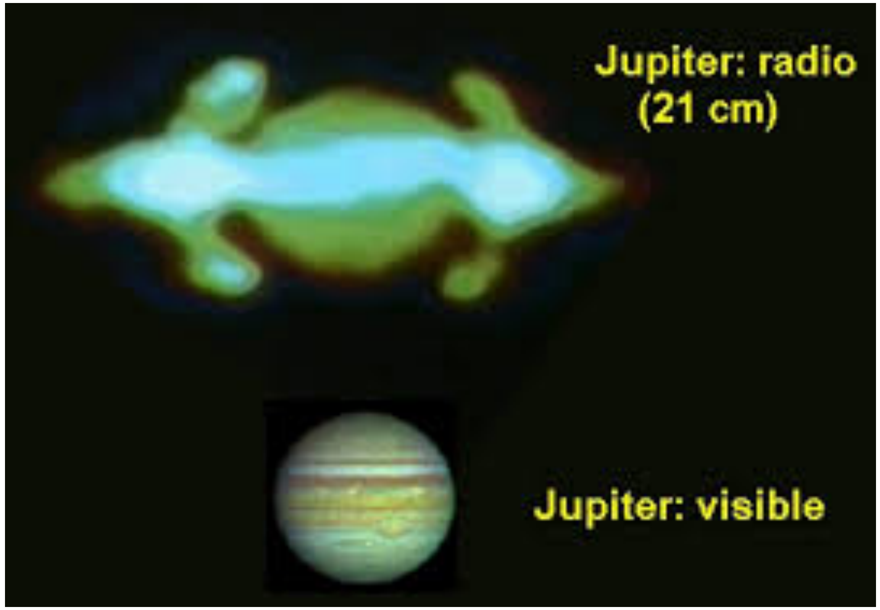
Estes átomos emitem fotons, emitem a "linha de 21 cm" !

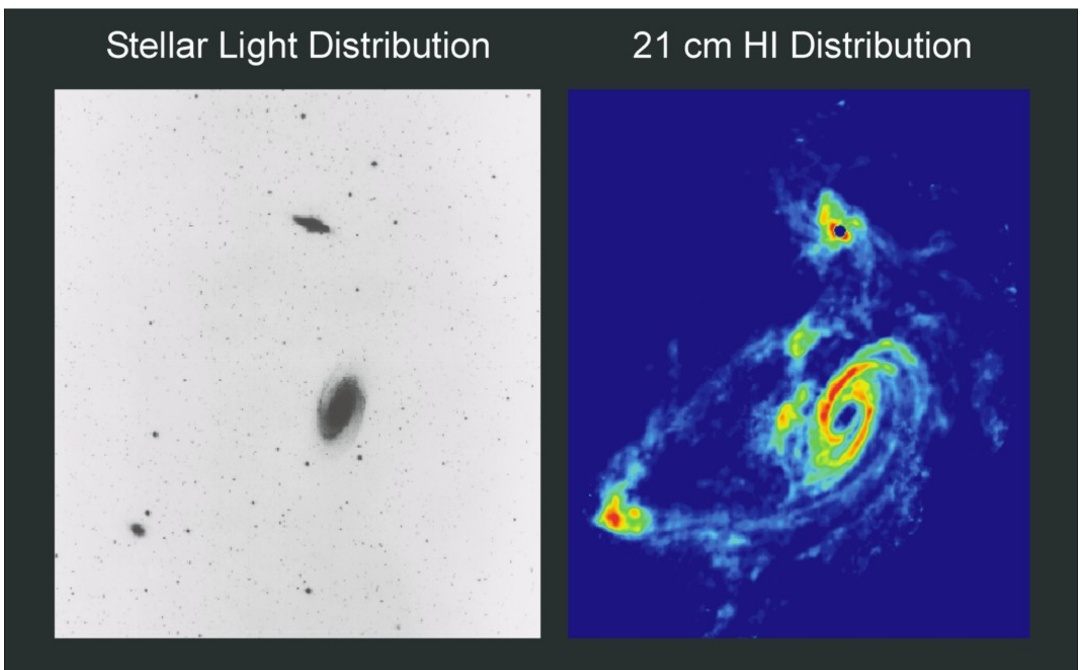
Podemos ajustar o telescópio e tirar "fotos" da "luz" de 21 cm :





Kalberla et al 2005, from WMAP LAMBDA


Jupiter: radio
(21 cm)
Jupiter: visible


Stellar Light Distribution
21 cm HI Distribution

Os fotons de 21 cm são muito penetrantes !

Atravessam o meio intergalático ! (IGM)

Trazem informações de partes remotas da galáxia !

Os átomos de H se movem junto com as estrelas

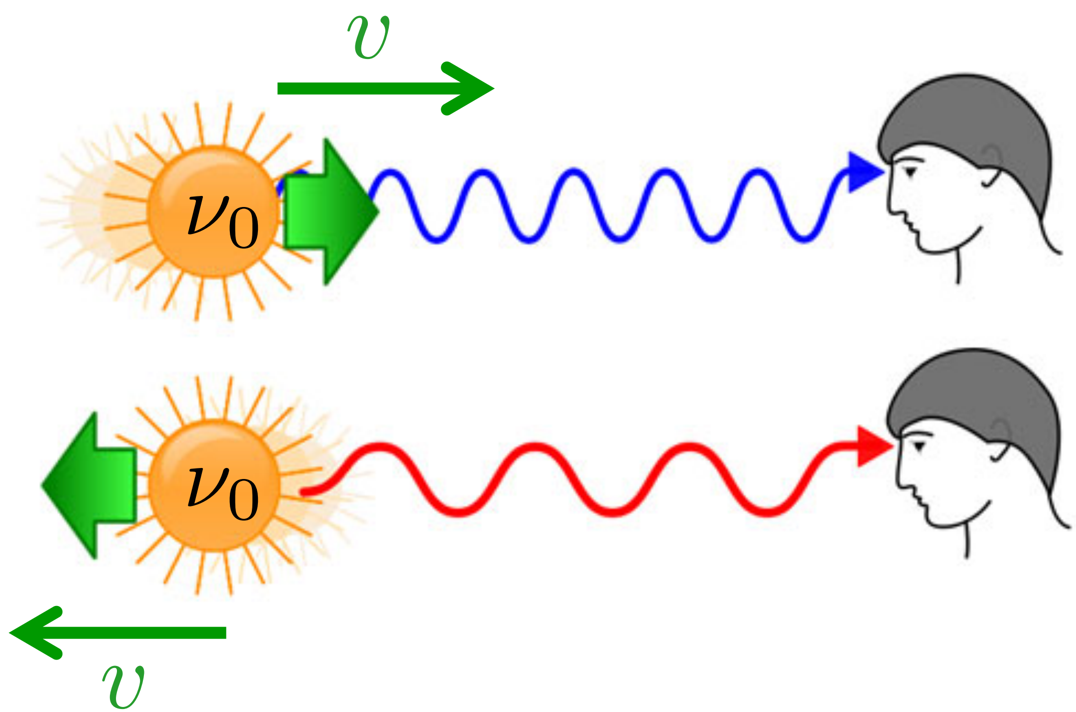
Eles emitem luz com frequência bem definida ν_0

A luz emitida sofre efeito Doppler !

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$

frequência aumenta

a fonte se aproxima

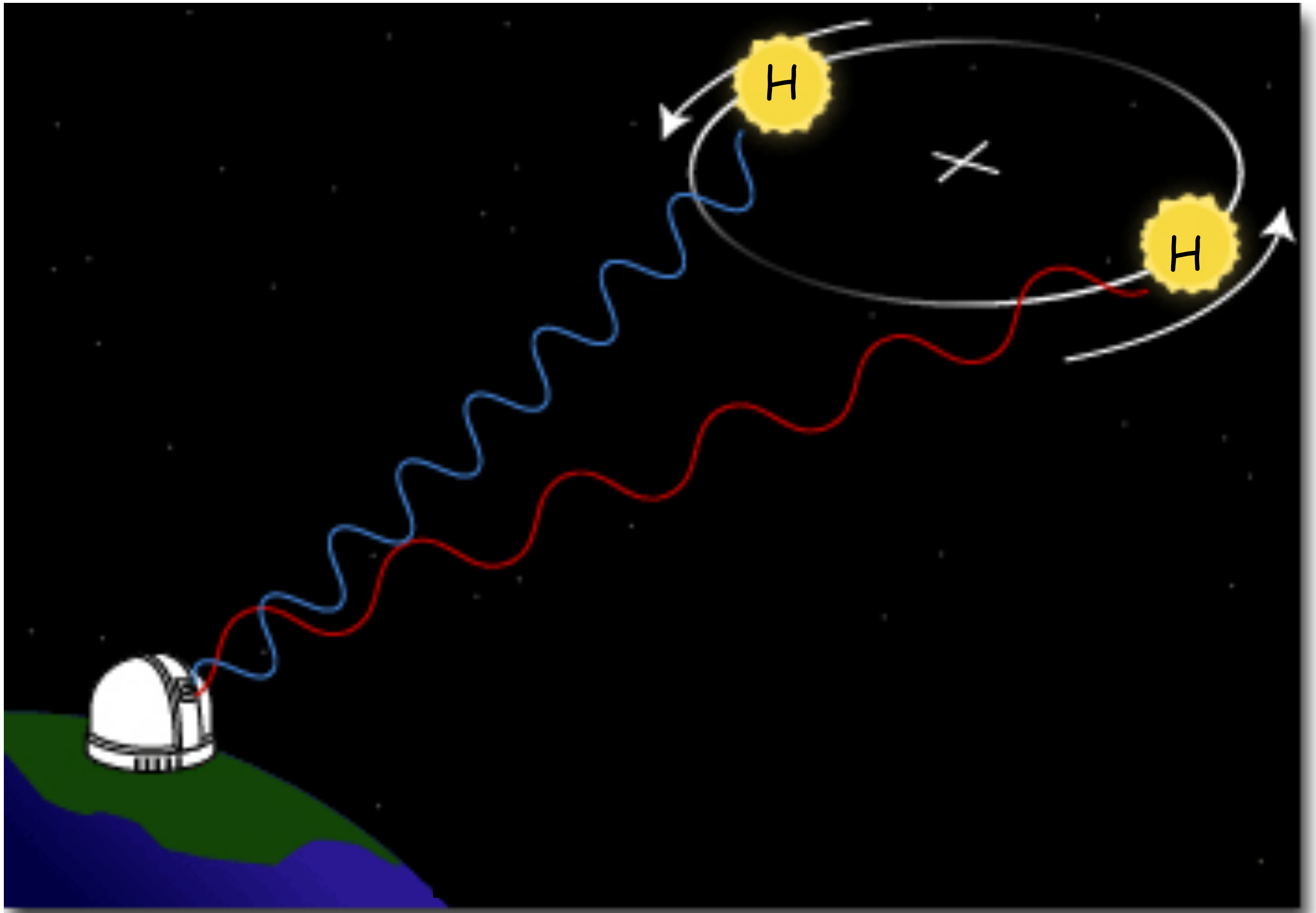


observador parado

a fonte se afasta

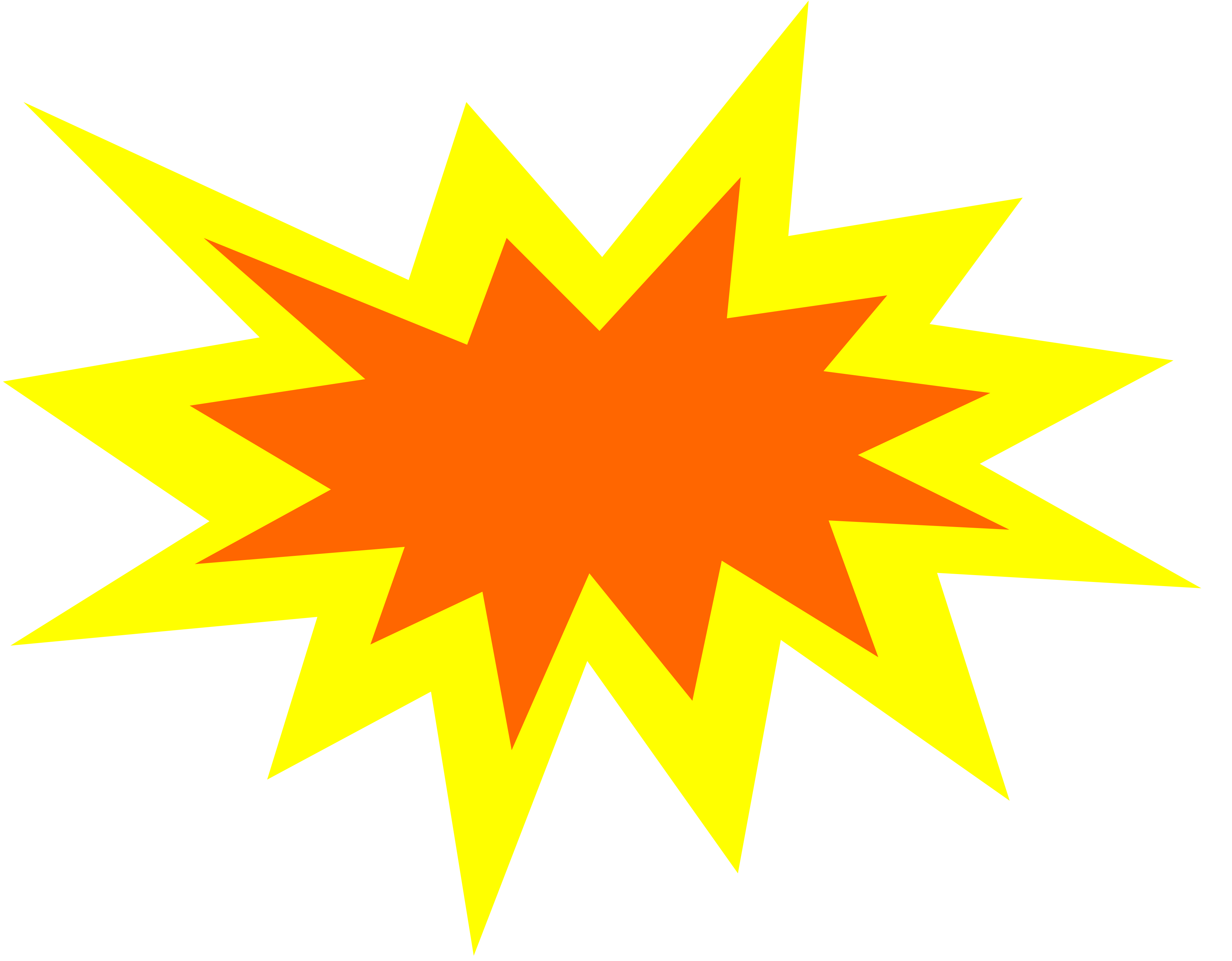
$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

frequência diminui



Medimos as duas frequências e descobrimos as velocidades !

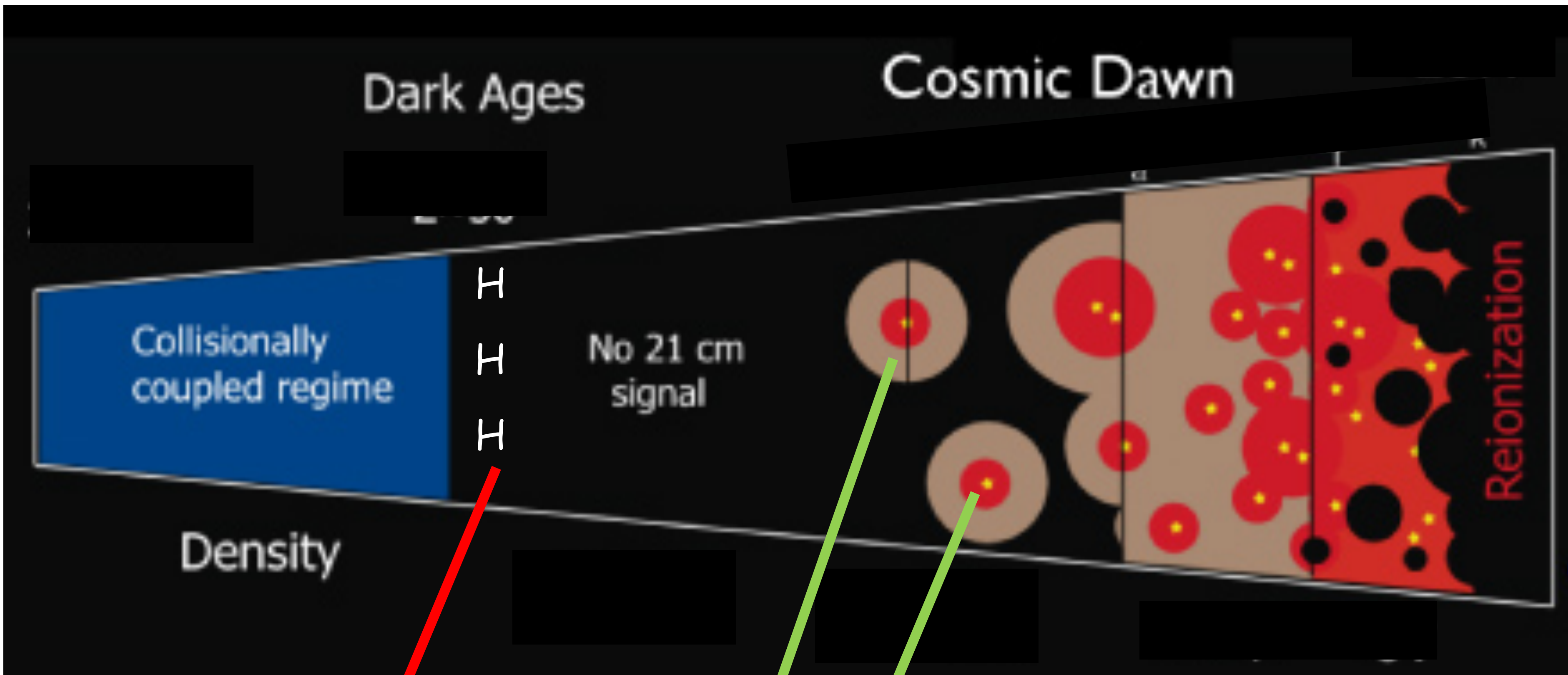
Medida precisa da rotação das galáxias !



Cosmologia de 21 cm !

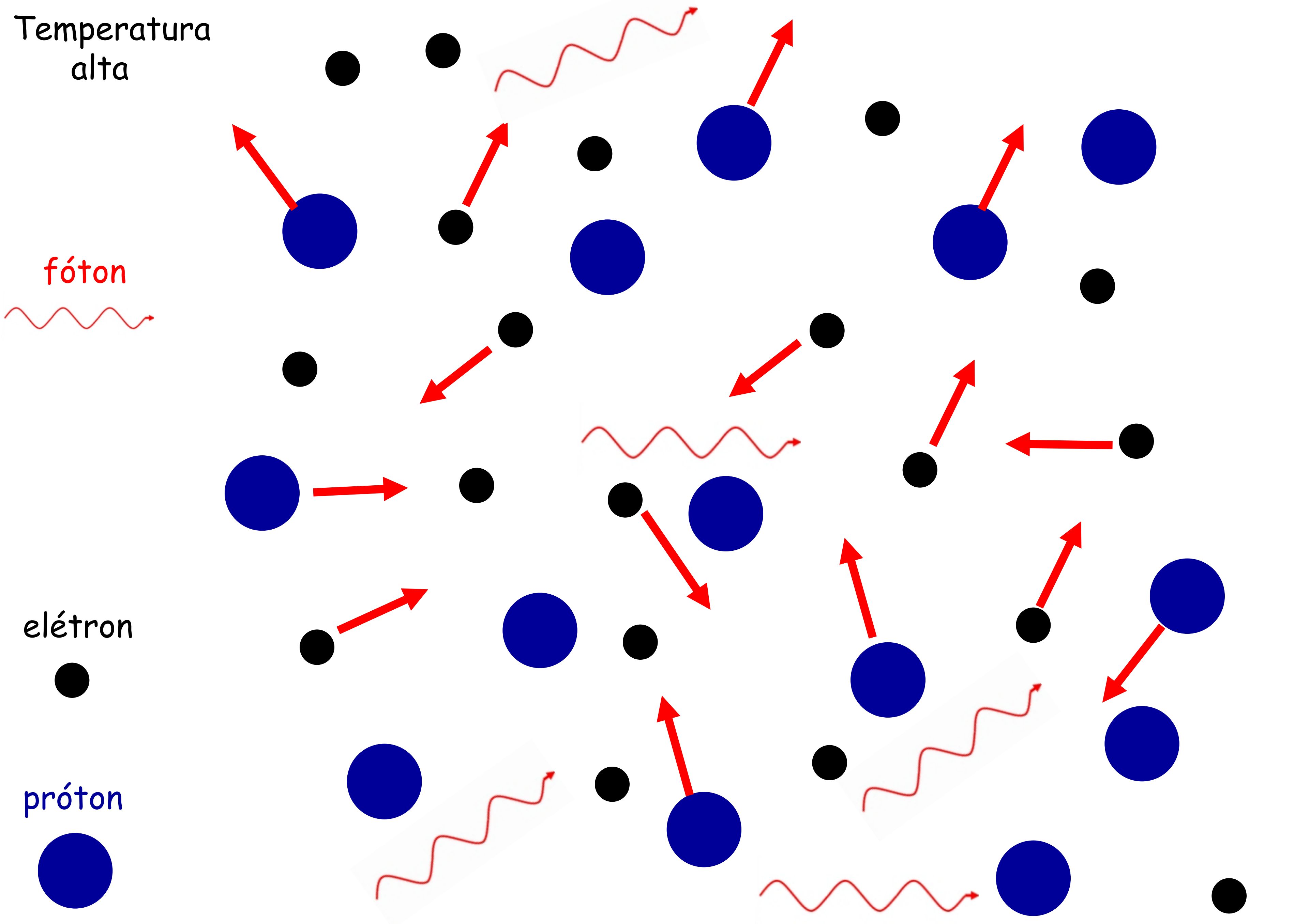
Cosmologia de 21 cm !

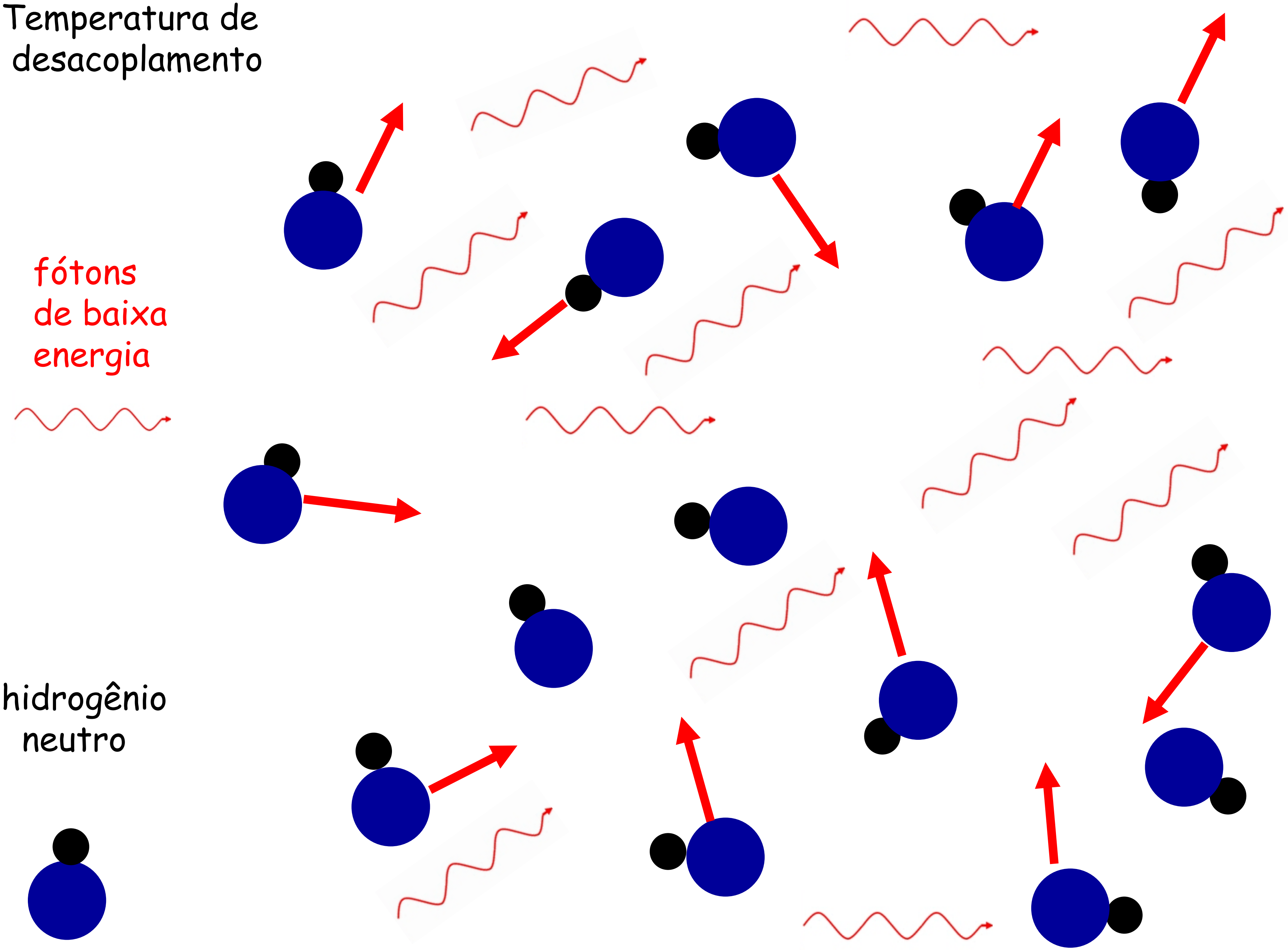
H foi produzido no Universo primordial

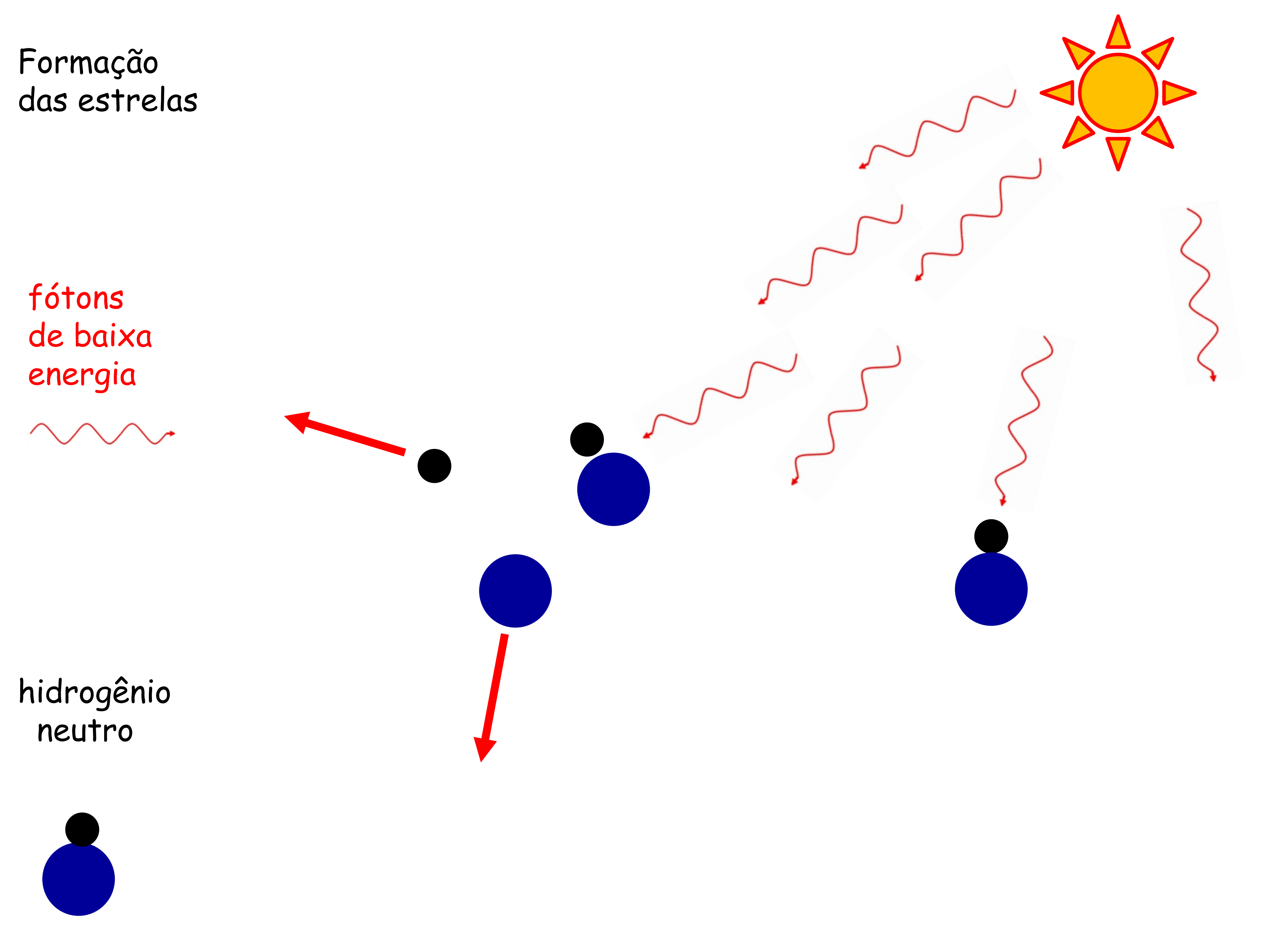


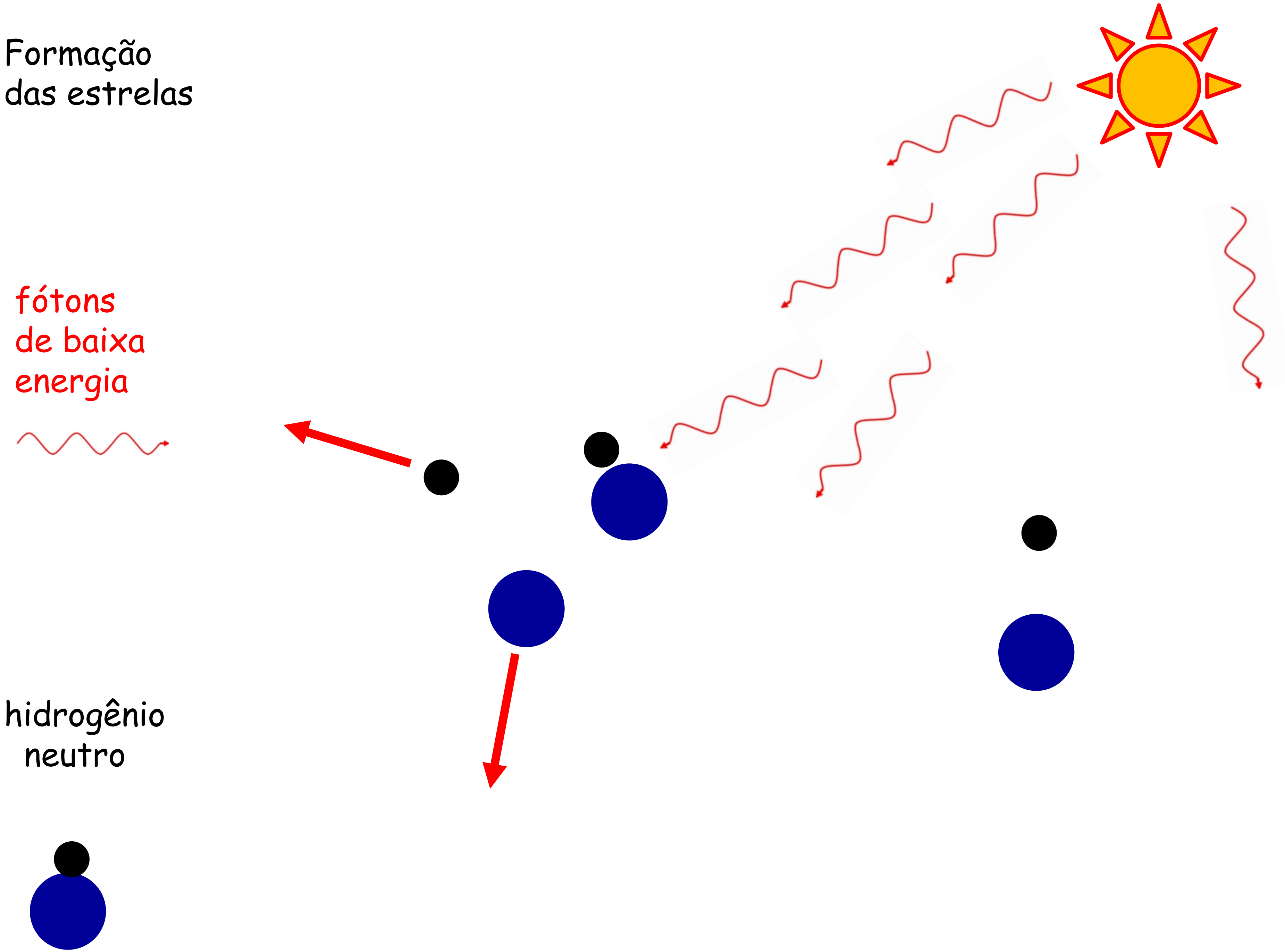
Formação de H

Formação das primeiras estrelas !

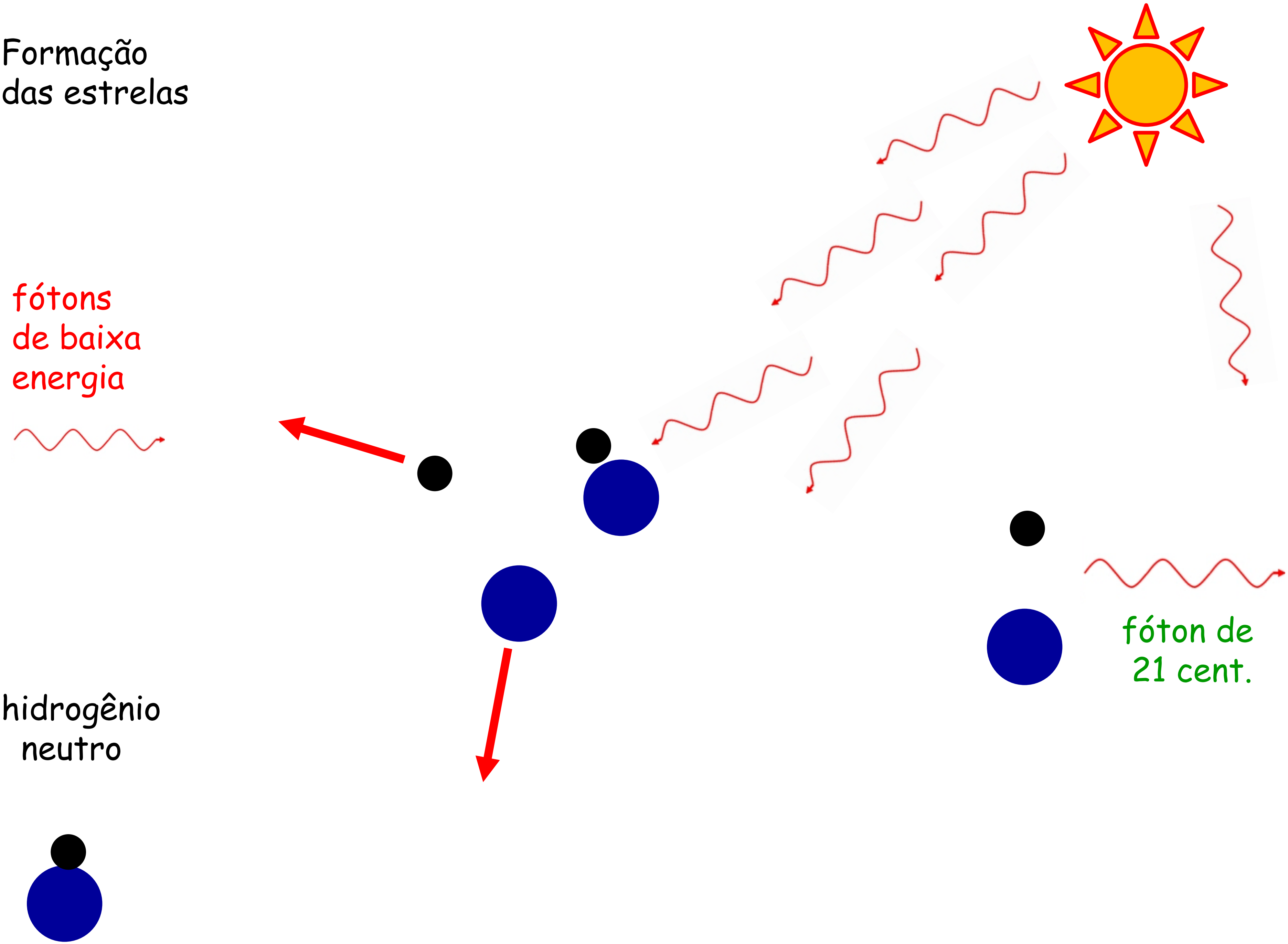

Temperatura
alta
fóton
elétron
próton


Temperatura de desacoplamento
fótons de baixa energia
hidrogênio neutro

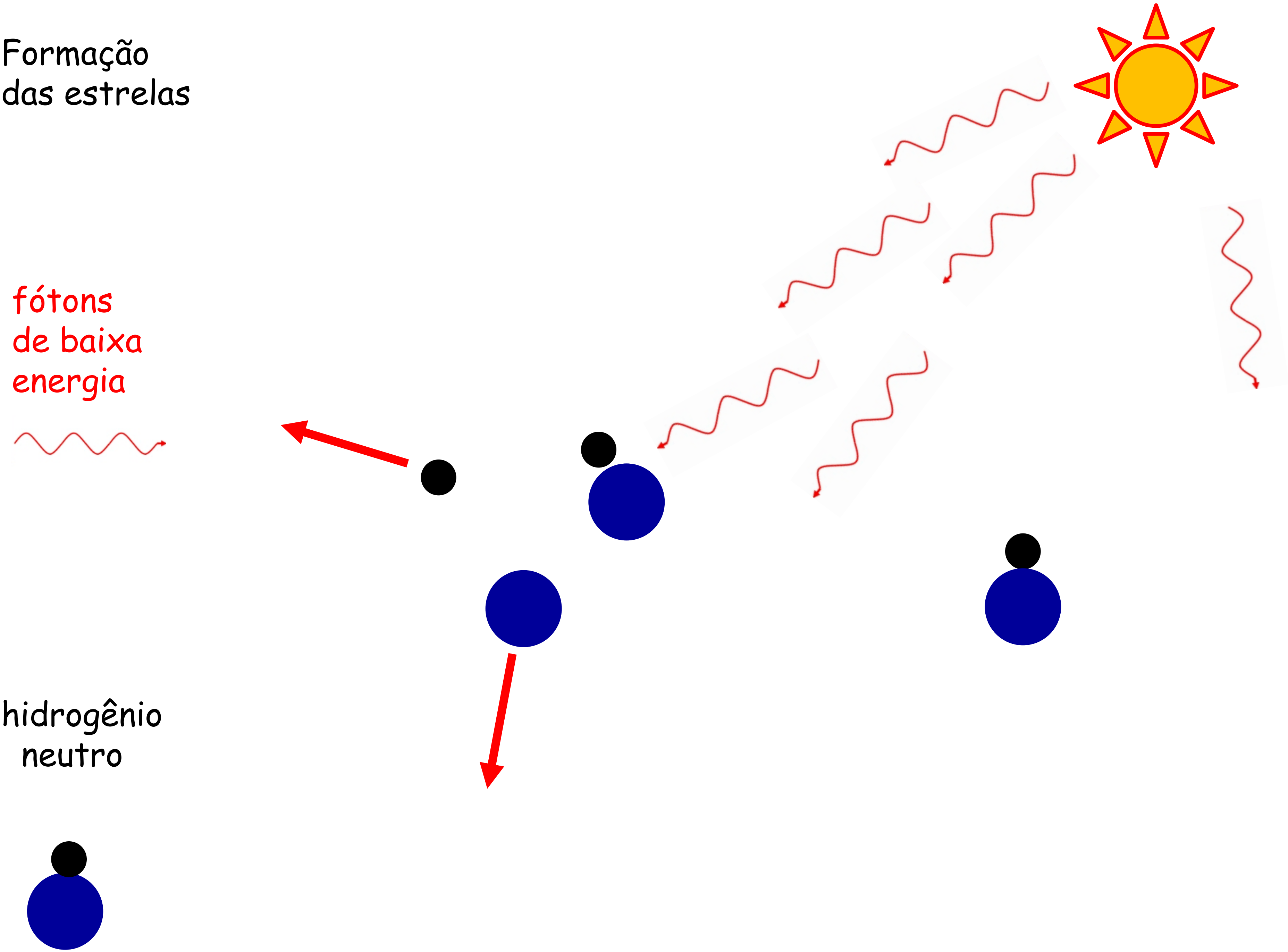

Formação
das estrelas
fótons
de baixa
energia
hidrogênio
neutro


Formação
das estrelas
fótons
de baixa
energia
hidrogênio
neutro

Formação
das estrelas



Formação das estrelas



$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\,\pi\,a^3}\,\vec{\mu}}$$

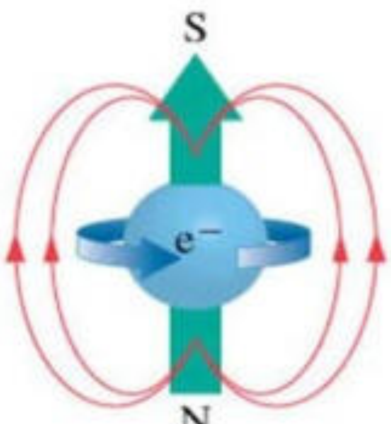
momento magnético gera
campo magnético !

$$\vec{\mu} = \gamma\,\vec{S} \qquad \gamma = \frac{g\,e}{2\,m}$$

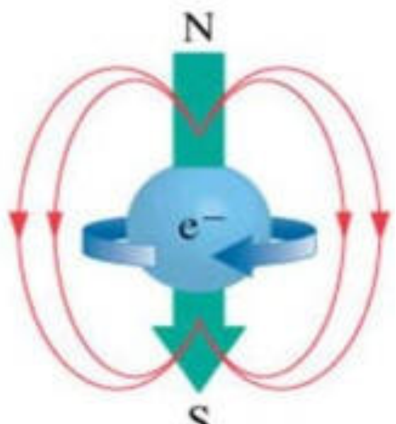
spin gera momento magnético !

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,a^3}\,\gamma\,\vec{S}$$

spin gera
campo magnético !



$m_s = +\frac{1}{2}$



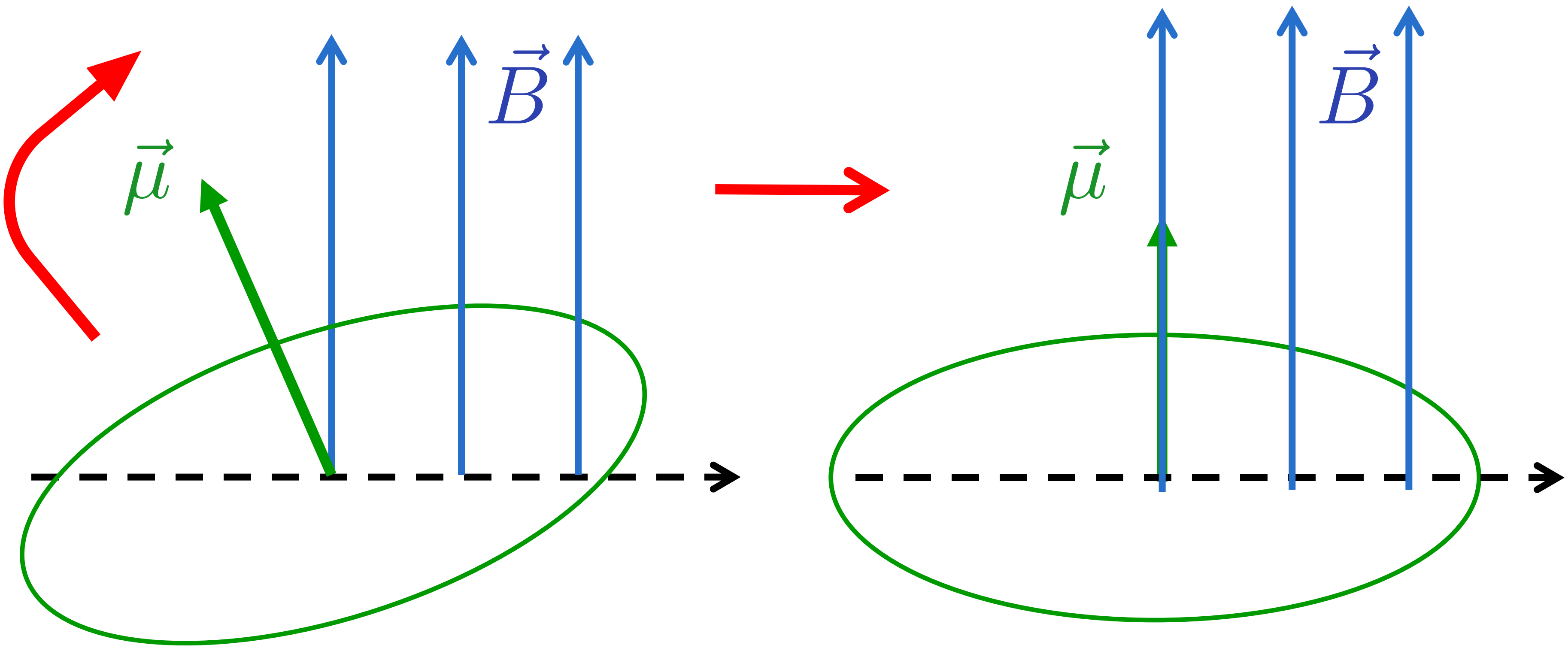
$m_s = -\frac{1}{2}$

Conclusão

Spin útil em astronomia : rotação das galáxias

Spin útil em cosmologia : nascimento das estrelas

Espira tenta se alinhar como uma bússola !



mais energia !

menos energia !

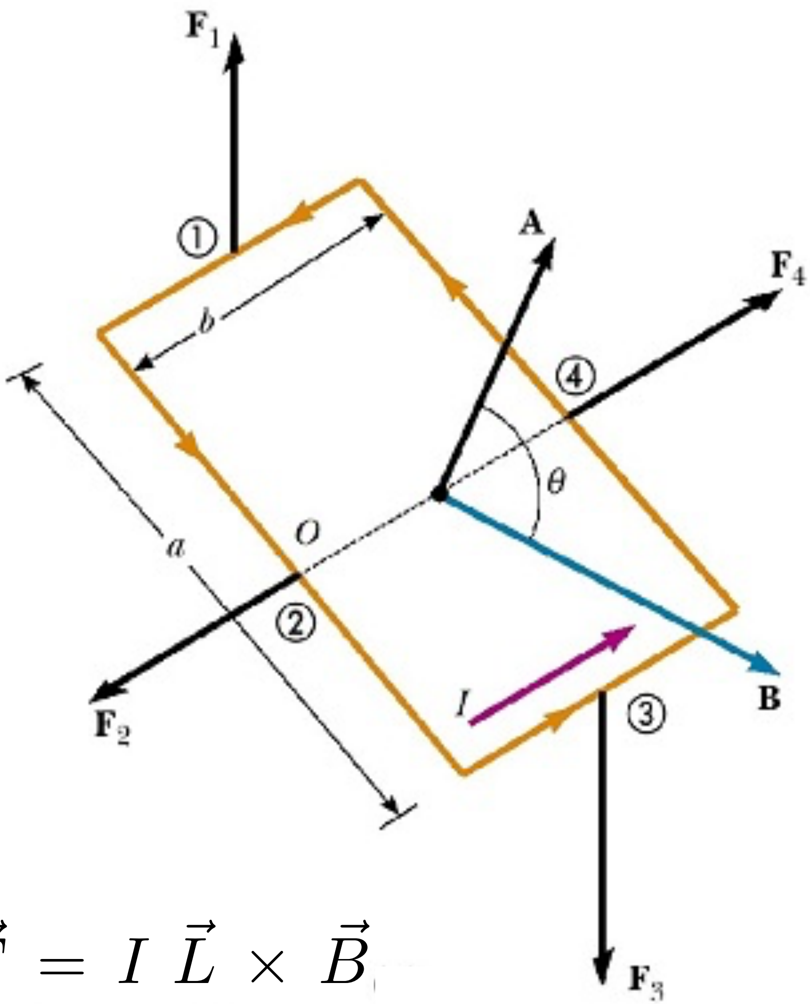
Energia potencial de orientação

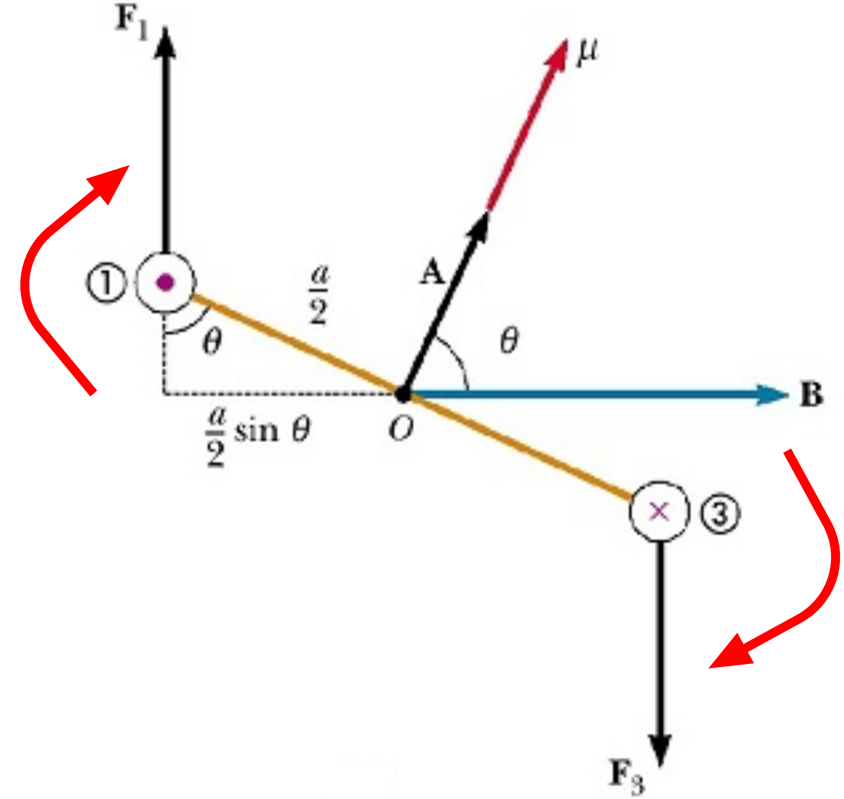
$$\boxed{U = -\vec{\mu}\,.\,\vec{B}}$$

Espira sofre um torque !

$$\vec{\mu} = I\,\vec{A}$$

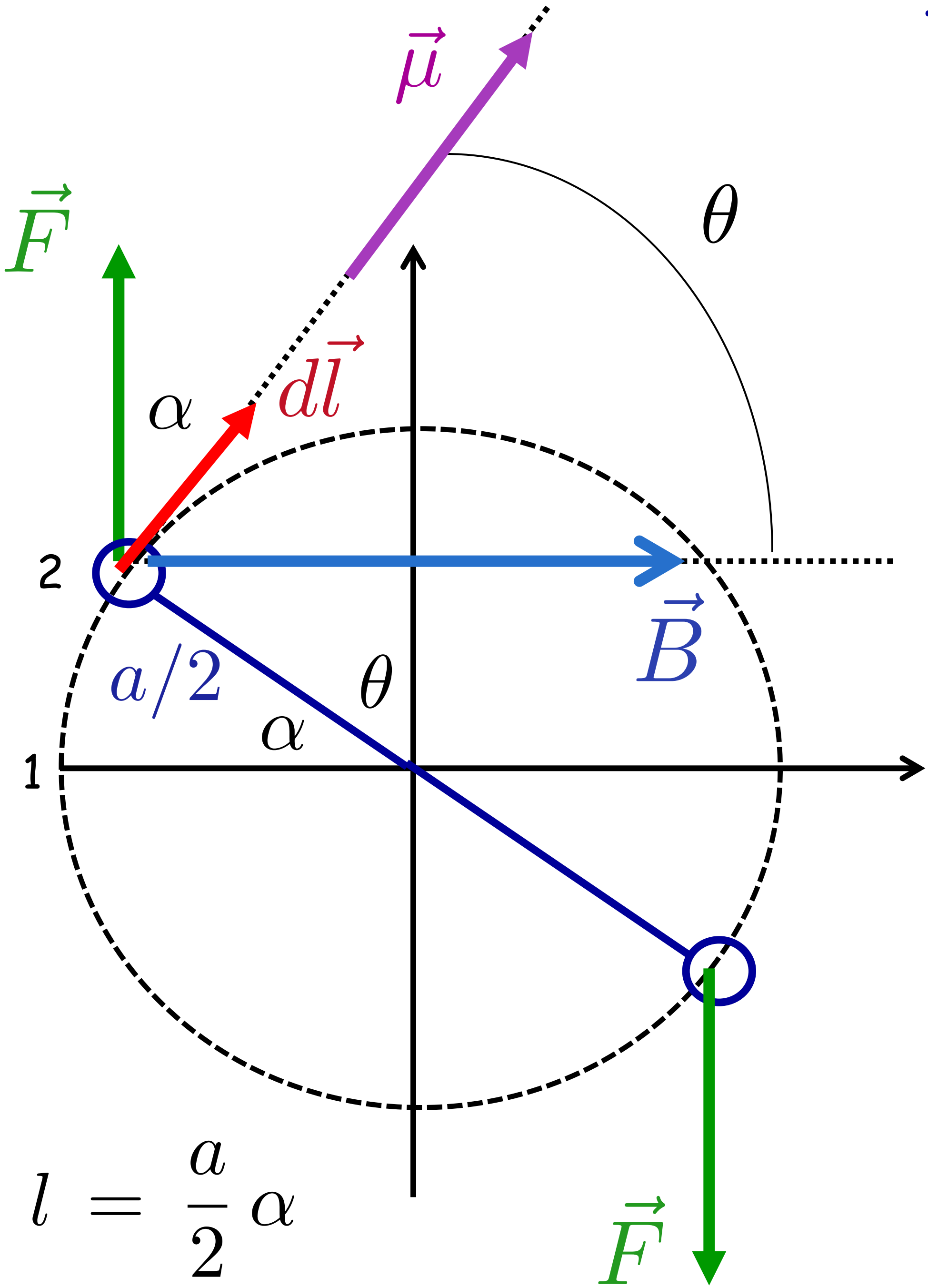
$$\mu = I\,a\,b$$





$$\vec{F} = I\,\vec{L} \times \vec{B}$$

$$F = I\,b\,B$$



$$l = \frac{a}{2}\,\alpha$$

Trabalho da força F quando a espira vai de 1 a 2. :

$$dW = \vec{F}\,.\,d\vec{l}$$

$$= F\,dl\,cos\alpha$$

$$= F\,\frac{a}{2}\,d\alpha\,cos\alpha$$

$$W = \int_0^{\alpha} F\,\frac{a}{2}\cos\alpha\;d\alpha$$

$$W = F\,\frac{a}{2}\,sen\,\alpha$$

$$W = F\,\frac{a}{2}\cos\theta$$

$$W = F\,\frac{a}{2}\,cos\,\theta$$

Somando a contribuição da barra inferior (3) :

$$W = F\,a\,cos\,\theta \qquad F = I\,b\,B$$

$$W = I\,a\,b\,B\,cos\,\theta \qquad \mu = I\,a\,b$$

$$W = \mu\,B\,cos\,\theta$$

$$W = \vec{\mu}\,.\,\vec{B} \qquad W = -U$$

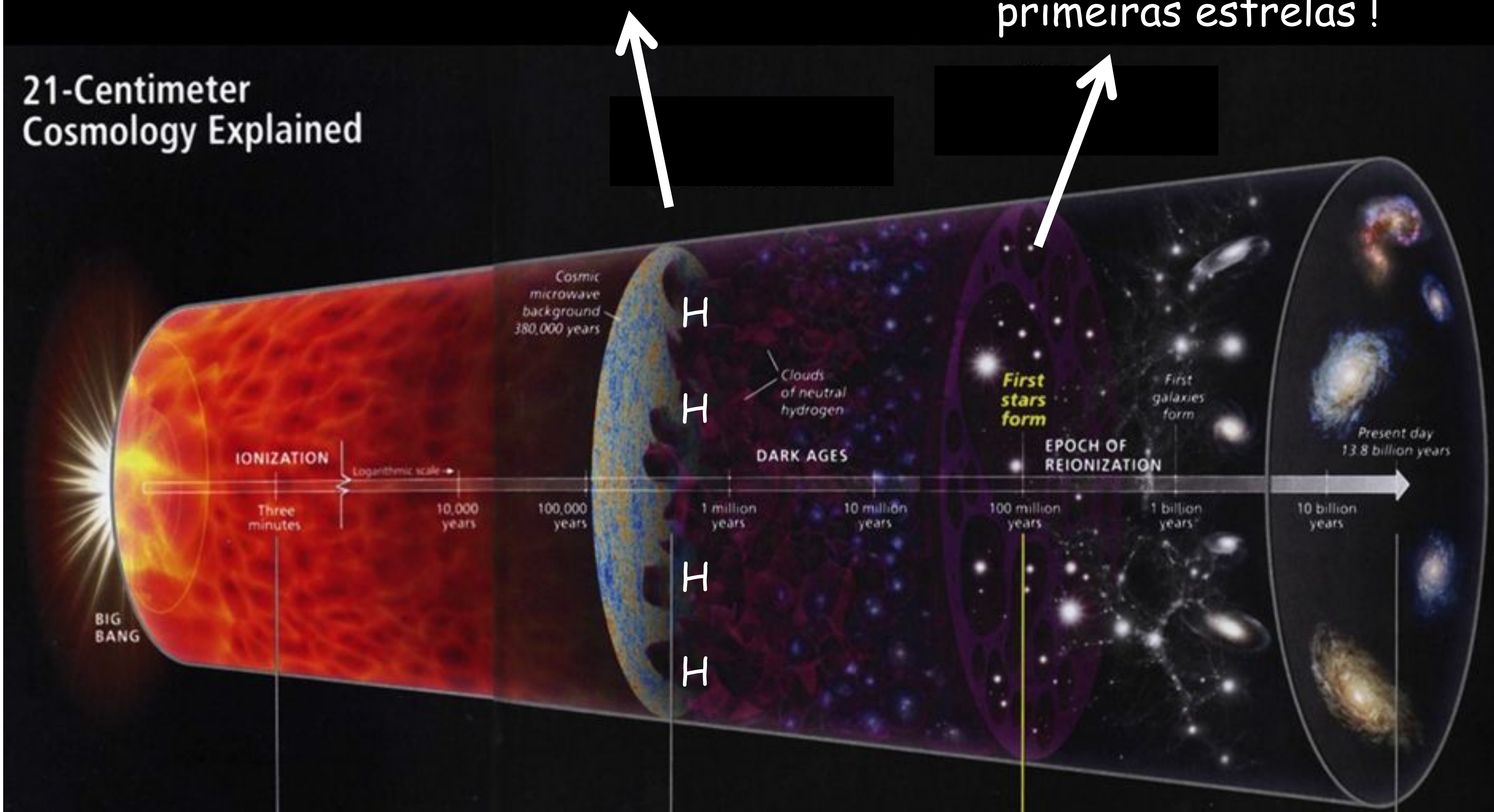
$$\boxed{U = -\vec{\mu}\,.\,\vec{B}}$$

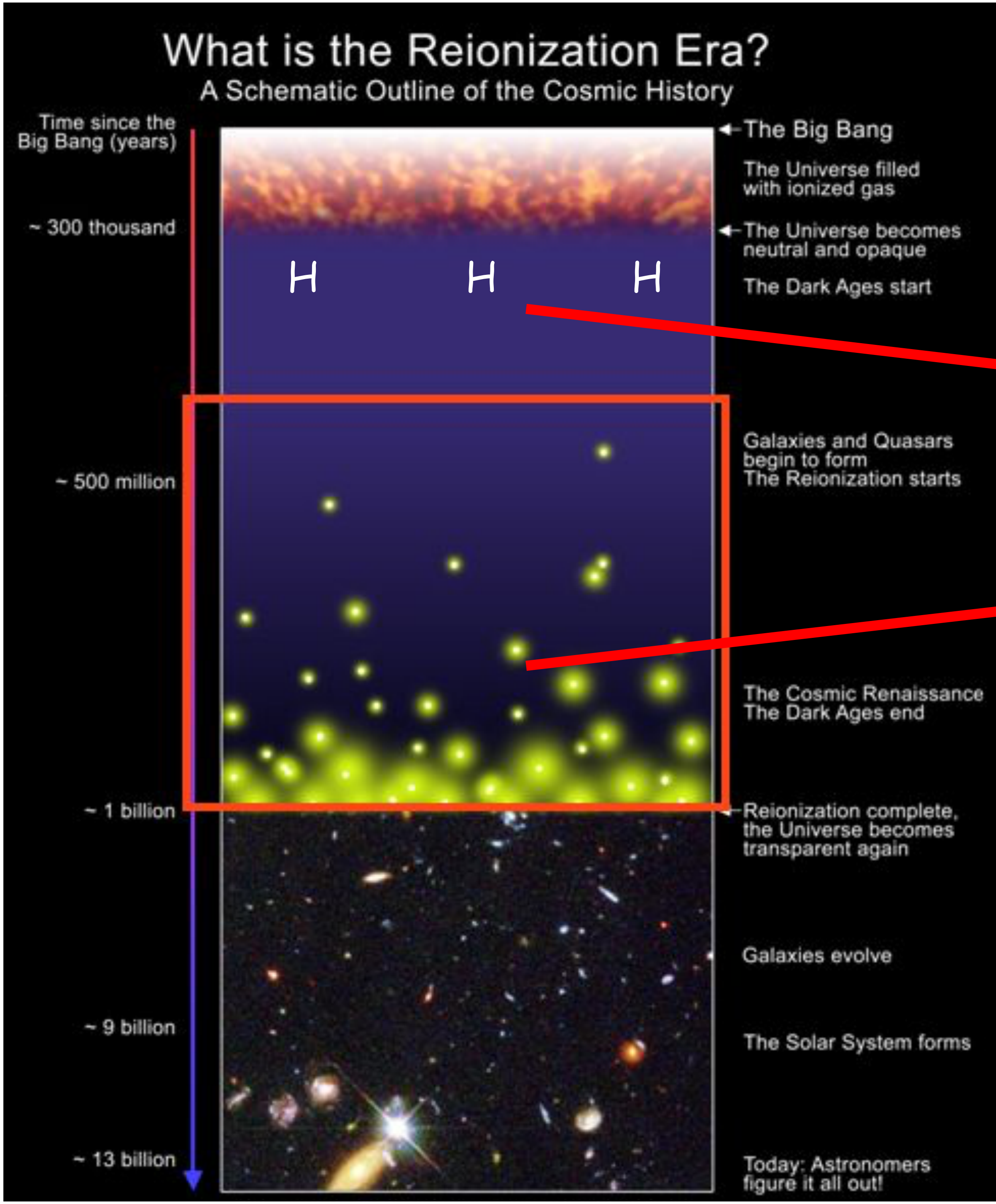
Beginnings

- In the '50s & '60s, Radio telescopes first discovered the "signature" line of Hydrogen at 21 cm wavelength ***between*** stars.
  - The hydrogen gas was found (in abundance) in the "empty" space between stars.
  - Note: Domestic microwave ovens use a signal of ~ 12 cm wavelength to cook food
- This gas was "dark" in optical wavelengths but "bright" in radio wavelengths.

Formação de H

Formação das primeiras estrelas !





Formação de H

Formação das primeiras estrelas !